

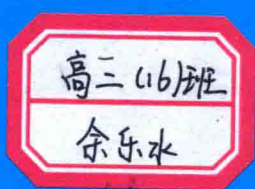
第十届全国教育图书展优秀畅销图书
国家集训队教练执笔联合编写
在香港出版繁体字版和网络版
版版畅销，网络销量居榜首

畅销15年
超1200万册

总主编 单 埈 熊 斌

奥数教程 能力测试

· 配《奥数教程》第六版 ·



高一 年 级

熊 斌 冯志刚 编著
周建新 边红平



上海市
著名商标
华东师范大学出版社

全国百佳图书出版单位

总主编 单 樽 熊 斌

奥数教程 能力测试

· 配《奥数教程》第六版 ·

华东师范大学出版社

高一年级

熊 斌 冯志刚 编著
周建新 边红平

图书在版编目(CIP)数据

奥数教程能力测试. 高一年级/熊斌等编著. —上海: 华东师范大学出版社, 2010. 6

ISBN 978-7-5617-7896-8

I. ①奥… II. ①熊… III. ①数学课—高中—教学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 118282 号

奥数教程(第六版)能力测试

高一年级

总主编 单 埏 熊 斌
编 著 熊 斌 冯志刚 周建新 边红平
总策划 倪 明
项目编辑 孔令志
审读编辑 吴思祺 李洋剑
封面设计 高 山
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
网 址 www.ecnupress.com.cn
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887
地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 店 <http://hdsdcbs.tmall.com>

印刷者 宜兴市德胜印刷有限公司
开 本 787×1092 16 开
印 张 10.75
字 数 246 千字
版 次 2014 年 6 月第二版
印 次 2016 年 7 月第 13 次
书 号 ISBN 978-7-5617-7896-8/G·4609
定 价 20.00 元

出版人 王 焰

(如发现本版图书有印订质量问题, 请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

目 录

测试 1	集合的概念与运算	(1)
测试 2	有限集元素的数目	(3)
测试 3	二次函数	(5)
测试 4	函数的图象和性质	(7)
测试 5	幂函数、指数函数、对数函数	(9)
测试 6	含绝对值的函数	(11)
测试 7	函数的最大值和最小值	(13)
综合测试题(一)		(15)
测试 8	等差数列与等比数列	(17)
测试 9	高阶等差数列	(19)
测试 10	数列求和	(21)
测试 11	数列综合题	(23)
综合测试题(二)		(25)
测试 12	三角函数的概念与性质	(27)
测试 13	三角恒等变形	(29)
测试 14	三角不等式	(31)
测试 15	三角函数的最大值和最小值问题	(34)
测试 16	反三角函数与三角方程	(36)
测试 17	正弦定理与余弦定理	(38)
综合测试题(三)		(40)
测试 18	向量的概念与运算	(42)
测试 19	空间的“角”和“距离”	(44)
测试 20	截面、折叠和展开	(46)

测试 21	射影与面积射影定理	(48)
综合测试题(四)		(50)
测试 22	集合的分划	(52)
测试 23	二次函数综合题	(54)
测试 24	离散量的最大值和最小值	(56)
测试 25	简单的函数迭代和函数方程	(58)
测试 26	构造函数解题	(60)
测试 27	向量与几何	(62)
测试 28	递推数列与递推方法	(64)
测试 29	周期数列	(66)
测试 30	抽屉原理	(68)
综合测试题(五)		(70)
模拟练习(一)		(72)
模拟练习(二)		(75)
模拟练习(三)		(78)
参考答案		(81)

集合的概念与运算

一、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

- 1 设集合 $A = \{2, 0, 1, 3\}$, 集合 $B = \{x \mid -x \in A, 2 - x^2 \notin A\}$. 则集合 B 中所有元素的和为_____.
- 2 已知集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $P = \{x \mid x \subset A\}$, $Q = \{x \mid x \subset B\}$, 则 $P \cap Q =$ _____.
- 3 若集合 $M = \{x \mid \log_{\frac{1}{2}}(x-1) > -1\}$, $N = \{x \mid 1 < 2^x < 4\}$, 则 $M \cap N =$ _____.
- 4 设 $A = \{2, 4, 7, 8, 13, 15\}$, 如果非空集合 M 满足: M 的各元素加 4 后成为 A 的一个子集, M 的各元素减 4 后也成为 A 的一个子集, 则 $M =$ _____.
- 5 设 $A = [-2, 4]$, $B = \{x \mid x^2 - ax - 4 \leq 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围为_____.
- 6 已知 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x \cos \alpha + 2(1 + \sin \alpha)(1 - y) = 0, \alpha \in \mathbf{R}\}$, $B = \{(x, y) \mid y = kx + 3, k \in \mathbf{R}\}$. 若 $A \cap B$ 为单元素集, 则 $k =$ _____.
- 7 集合 $A = \left\{x \mid \frac{1}{4} \leq 2^x \leq \frac{1}{2}, x \in \mathbf{R}\right\}$, $B = \{x \mid x^2 - 2tx + 1 \leq 0\}$, 若 $A \cap B = A$, 则实数 t 的取值范围是_____.
- 8 设在 xOy 平面上, $0 < y \leq x^2$, $0 \leq x \leq 1$ 所围成图形的面积为 $\frac{1}{3}$, 则集合 $M = \{(x, y) \mid |y| - |x| \leq 1\}$, $N = \{(x, y) \mid |y| \geq x^2 + 1\}$ 的交集 $M \cap N$ 所表示的图形面积为_____.

二、解答题(每小题 18 分,共 36 分)

- 9 设集合 $S = \{1, 2, \dots, 15\}$, $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ 是 S 的子集, 且 (a_1, a_2, a_3) 满足: $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 \leq 15$, $a_3 - a_2 \leq 6$, 求满足条件的子集的个数.

10 设由正整数构成的数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_{10k-9} + a_{10k-8} + \cdots + a_{10k} \leq 19$$

对一切 $k \in \mathbf{N}^*$ 恒成立. 记该数列若干连续项的和 $\sum_{p=i+1}^j a_p$ 为 $S(i, j)$, 其中 $i, j \in \mathbf{N}^*$, 且 $i < j$. 求证: 所有 $S(i, j)$ 构成的集合等于 $\mathbf{N}^*$.

有限集元素的数目

一、填空题(每小题 8 分,共 48 分)

- 1 设集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 若 A 中所有三元子集的三个元素之和组成的集合为 $B = \{-1, 3, 5, 8\}$, 则集合 $A =$ _____.
- 2 从集合 $M = \{1, 2, 3, \dots, 2009\}$ 中, 去掉所有 3 的倍数以及 5 的倍数, 则剩下的元素个数为 _____.
- 3 从由 2008 个正整数构成的集合 $M = \{1, 2, \dots, 2008\}$ 中取出一个 k 元子集 A , 使得 A 中任两数之和不能被这两数之差整除, 则 k 的最大值为 _____.
- 4 集合 $A = \left\{x \mid x = \left[\frac{5k}{6}\right], k \in \mathbf{Z}, 100 \leq k \leq 999\right\}$, 其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 则集合 A 的元素个数为 _____.
- 5 集合 $\{1, 2, 3, \dots, 2009\}$ 的元素和为奇数的非空子集的个数为 _____.
- 6 设从集合 $\{1, 2, 3, \dots, 14\}$ 中取出的 5 元集合满足: 至少有两个元素为相邻整数, 并设 m 是满足这样条件的集合数目. 则 m 除以 1000 后的余数是 _____.

二、解答题(第 7、8 题每题 12 分,第 9、10 题每题 14 分,共 52 分)

- 7 (a) 问能否将集合 $\{1, 2, \dots, 96\}$ 表示为它的 32 个三元子集的并集, 且三元子集的元素之和都相等;
(b) 问能否将集合 $\{1, 2, \dots, 99\}$ 表示为它的 33 个三元子集的并集, 且三元子集的元素之和都相等.
- 8 已知 A 与 B 是集合 $\{1, 2, \dots, 100\}$ 的两个子集, 满足: A 与 B 的元素个数相等, 且 $A \cap B$ 为空集. 若 $n \in A$ 时, 总有 $2n+2 \in B$, 求集合 $A \cup B$ 的元素个数的最大值.

9 设 M 为 n 元集, 若 M 有 k 个不同的子集 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 满足: 对于每个 $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, 求正整数 k 的最大值.

10 设 k, n 为给定的整数, $n > k \geq 2$. 对任意 n 元数集 P , 作 P 的所有 k 元子集的元素和, 记这些和组成的集合为 Q , 集合 Q 中元素个数是 C_Q , 求 C_Q 的最大值.

二次函数

一、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

- 1 已知 $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 1$, 若存在实数 x_0 满足 $f(x_0) < bg(x_0)$, 则 b 的取值范围是_____.
- 2 已知二次函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 若方程 $f(x) = 0$ 有两个非整数根 x_1, x_2 , 且 $m < x_1 \leq x_2 < m + 1$. 则 $\min\{|f(m)|, |f(m+1)|\}$ 的最大值是_____.
- 3 已知 $f(x) = x^2 + ax + 3 - a$, 若 $x \in [-2, 2]$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则 a 的取值范围是_____.
- 4 若函数 $f(x) = ax^2 + (2a - 1)x - 3$ 在 $x \in \left[-\frac{3}{2}, 2\right]$ 上的最大值为 1, 则实数 a 的值是_____.
- 5 二次函数 $f(x) = x^2 - tx - 1$ 在 $x \in [t, t + 1]$ 上的最小值是 $g(t)$, 则 $g(t)$ ($t \in \mathbf{R}$) 的最大值是_____.
- 6 设二次函数 $f(x) = x^2 + ax + b$, 若方程 $f(f(x)) = 0$ 有 4 个不同的实根, 其中有两个根的和等于 -1 . 则 b 的取值范围是_____.
- 7 二次函数 $f(x) = x^2 + ax + 2$, 关于 x 的方程 $f(x) = 0$ 的两个互异实根都在区间 $[0, 2]$ 上, 则 a 的取值范围是_____.
- 8 若关于 x 的二次方程 $mx^2 - (m - 1)x + m - 7 = 0$ 有两个实根 a, b , 且 $-1 < a < 0, 0 < b < 1$, 则 m 的取值范围是_____.

二、解答题(每小题 12 分,共 36 分)

- 9 关于 x 的二次函数 $f(x) = x^2 - (m + 1)x + 4$ 的图象与 x 轴上从 0 到 3 的长为 3 的一段线段只有一个交点. 求 m 的取值范围.

10 已知函数 $f(x) = x^2 + |x + a - 1| + (a + 1)^2$ 的最小值 $f(x)_{\min} > 5$, 求 a 的取值范围.

11 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x - 4$ 的定义域和值域相同, 且都是非空连续区间 M , 求所有区间 M .

函数的图象和性质

一、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

- 1 函数 $f(x) = \sqrt{x-5} - \sqrt{24-3x}$ 的值域是_____.
- 2 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且对任意实数 x_1, x_2 , 有 $f(x_1 + x_2) + f(x_1 - x_2) = 2f(x_1) \cdot f(x_2)$, 且 $f(0) \neq 0$. 则函数 $f(x)$ 的奇偶性是_____.
- 3 函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{Z}$ 的一个实值函数, 且 $f(1) = 0$, $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ ($x, y \in \mathbf{Z}$). 则 $f(x)$ 是周期函数, 写出 $f(x)$ 的一个正周期 $T =$ _____.
- 4 若函数 $y = f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象关于点 $A(a, y_0)$ 中心对称且关于直线 $x = b$ ($b > a$) 轴对称, 则 $f(x)$ 是周期函数, 写出 $f(x)$ 的一个正周期 $T =$ _____.
- 5 函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 满足: $f(2+x) = f(2-x)$, $f(7+x) = f(7-x)$, 且在闭区间 $[0, 7]$ 上, 只有 $f(1) = f(3) = 0$, 其余函数值非零. 则方程 $f(x) = 0$ 在闭区间 $[-2005, 2005]$ 上实根的个数为_____.
- 6 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 则 $f(ax) + f\left(\frac{x}{a}\right)$ ($a > 0$) 的定义域是_____.
- 7 设二次函数 $f(x) = x^2 + ax + b$. 对任意实数 x , 都存在 y , 使得 $f(y) = f(x) + y$, 则 a 的最大值是_____.
- 8 设 $D = \{1, 2, \dots, 10\}$, 映射 $f: D \rightarrow D$ 的一一映射. 集合 D 的某一个排列 $\pi: \{x_1, x_2, \dots, x_{10}\}$, 满足 $\sum_{i=1}^{10} x_i \cdot f^{(2520)}(i) = 220$. 写出 D 的该排列 π :_____.

二、解答题(每小题 12 分,共 36 分)

- 9 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是一组不全为零的实数. 证明: 关于 x 的方程 $\sqrt{1+a_1x} + \sqrt{1+a_2x} + \dots + \sqrt{1+a_nx} = n$ 至多有一个非零实数解.

10 已知 $f(x)$ 为一次函数, 且 $f^{(100)}(x) = 2^{100}x + 3(2^{100} - 1)$. 求 $f(x)$ 的解析式.

11 设 X 表示从 $\{1, 2, \dots, n\}$ 到 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的所有一一对应构成的集合, 对于每一个 $f \in X$, 定义

$$T_f(j) = \begin{cases} 1, & \text{若 } f^{(12)}(j) = j, \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases} \quad \text{其中 } f^{(1)}(x) = f(x), f^{(k)}(x) = f(f^{(k-1)}(x)) \ (k \geq 2).$$

$$\text{求 } \sum_{f \in X} \sum_{j=1}^n T_f(j).$$

幂函数、指数函数、对数函数

一、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

- 1 两个不同的幂函数 $y_1 = x^m$, $y_2 = x^n$ ($m, n \in \mathbf{Q}$) 的图象的交点个数的可能值是_____.
- 2 不等式 $2^{\frac{1-x}{2}} < 2^{\frac{1-2x}{2x}} + 1$ 的解集是_____.
- 3 不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{(x^2-2x-15)^3}} \cdot 7^{(x+3)^2(x-5)} \leq 1$ 的解集是_____.
- 4 已知 $a > 0$, $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \frac{x}{1-a^x} - \frac{x}{a}$ 的奇偶性是_____.
- 5 设 $a > 0$, $a \neq 1$, 且函数 $f(x) = \log_a(6ax^2 - 2x + 3)$ 在 $x \in \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right]$ 上是增函数, 则 a 的取值范围是_____.
- 6 关于 x 的不等式 $\log_{ax} x + \log_x(ax)^2 > 0$ 的解集是_____.
- 7 函数 $f(x) = \ln \frac{1+2^x+a \cdot 4^x}{3}$ (其中 a 为参数). 当 $x \in (-\infty, 1]$ 时, 函数 $f(x)$ 总有意义, 则 a 的取值范围是_____.
- 8 关于 x, y, z 的方程组
$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2x+6} \cdot \log_3(6-y) = x, \\ \sqrt{y^2-2y+6} \cdot \log_3(6-z) = y, \\ \sqrt{z^2-2z+6} \cdot \log_3(6-x) = z \end{cases}$$
 的解 $(x, y, z) =$ _____.

二、解答题(每小题 12 分,共 36 分)

- 9 设函数 $f(x) = |\lg(x+1)|$, 实数 a, b ($a < b$) 满足 $f(a) = f\left(-\frac{b+1}{b+2}\right)$, $f(10a+6b+21) = 4\lg 2$, 求 a, b 的值.

10 求所有实参数 a 的值, 使得不等式

$$\log_a(a^x + 1) + \frac{1}{\log_{a^{x-1}} a} \leq x - 1 + \log_a(a^2 - 1)$$

对所有 $x \in (0, 1]$ 恒成立.

11 求关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x^2 + y^3 = 29, \\ \log_3 x \cdot \log_2 y = 1 \end{cases}$ 的不同实数解的个数.

含绝对值的函数

一、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

- 1 不等式 $|x-3| - |2x+1| < 4$ 的解集是_____.
- 2 函数 $f(x) = |x+3| + |x+1| + |x| + |x-2| + |x-6|$ 的最小值为_____.
- 3 函数 $f(x) = |x+1| + |ax+1|$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$, 则 $a =$ _____.
- 4 若关于 x 的不等式 $|ax+b| < 2$ ($a \neq 0$) 的解集为 $\{x | 2 < x < 6\}$, 则 $ab =$ _____.
- 5 已知方程 $|x-2n| = k\sqrt{x}$ (这里 n 是给定的正整数) 在区间 $(2n-1, 2n+1]$ 内有两个不相等的实根, 则 k 的取值范围是_____.
- 6 设 $x \in (0, 1)$, $a > 0$, 且 $a \neq 1$. 比较大小: $|\log_a(1-x)|$ _____ $|\log_a(1+x)|$ (填“>”、“<”、“=”).
- 7 在区间 $[a, b]$ 上任取 98 个分点 $x_2, x_3, \dots, x_{99}$ 满足:

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{99} < x_{100} = b. \quad \textcircled{1}$$

记 $y_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$ ($k = 1, 2, \dots, 100$). 已知对任何满足条件 ① 的 $x_1, x_2, \dots, x_{100}$, 恒有

$$\sum_{i=1}^{99} |y_i - y_{i+1}| < M. \text{ 则最小的正数 } M \text{ 为} \underline{\hspace{2cm}}.$$

- 8 设 $a_1, a_2, \dots, a_{50}, b_1, b_2, \dots, b_{50}$ 为互不相同的数, 则关于 x 的方程: $|x-a_1| + |x-a_2| + \dots + |x-a_{50}| = |x-b_1| + |x-b_2| + \dots + |x-b_{50}|$ 的所有有限个实根的个数最大值是_____.

二、解答题(每小题 12 分,共 36 分)

- 9 设 $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$, 对任意 $x \in \mathbf{R}^+$, $f(3x) = 3f(x)$, 且 $f(x) = 1 - |x-2|$ ($1 \leq x \leq 3$). 求最小实数 x , 使 $f(x) = f(2004)$.

10 解不等式: $|\log_2 x - 3| + |2^x - 8| \geq 9$.

11 设奇数 $n \geq 3$, 对 $x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, n$, 求 $f = \sqrt{|x_1 - x_2|} + \sqrt{|x_2 - x_3|} + \dots + \sqrt{|x_{n-1} - x_n|} + \sqrt{|x_n - x_1|}$ 的最大值.