

# 结 构 杆 系 分 析

Jiegou Ganxi Fenxi

〔美〕 J. J. 康 诺 尔

牟 彪 陈科昌 译

何福照 校

人 民 交 通 出 版 社

和任意曲杆的特性。

怎样汇集和解答杆系控制方程的讨论,放在第四部分。首先,简述直接刚度法;然后介绍控制方程的一般性推导。最末两章研究几何非线性杆系,讨论杆件力与位移的关系,包括弯曲与扭转的耦连问题和解答方法以及线性化的稳定性分析。

本书的目的是为讲授近代结构杆系分析提供一本合适的教材。这里奉献给读者的,就是作者近年在麻省理工学院的讲课笔记几经修改的产物。作者感谢那些提供意见而使本书得以改善的大学生,并对 Jane Malinnofsky 夫人为本书手稿耐心打字和 Charles Miller 教授的鼓励表示谢忱。

Jerome J. Connor

(J. J. 康诺尔)

## 内 容 提 要

本书分三大部分共十八章,包括有关的数学基础、理想桁架的控制方程和杆系分析,并附有例题、习题和参考书目。

本书可供研读结构理论的研究生和高年级学生参考;对于从事工程结构分析的技术人员也是一本较好的参考书。

该书由牟彪、陈科昌合译,何福照审校。

## ANALYSIS OF STRUCTURAL MEMBER SYSTEMS

JEROME J. CONNOR

Copyright © 1976 by

The Ronald Press Company

## 结 构 杆 系 分 析

[美] J. J. 康诺尔

牟 彪 陈科昌 译

何福照 校

人民交通出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

江苏省如东县印刷厂印刷

开本: 850×1168 1/32 印张: 19.875 字数: 522千

1986年6月第1版

1986年6月第1版第1次印刷

印数: 1—3,300册 定价: 6.25元

## 译 者 的 话

本书根据美国麻省理工学院 J. J. 康诺尔教授所著《结构杆系分析》(Analysis of Structural Member Systems)一书译出。作者将传统的“结构力学”和近代的“结构分析”两门课程统一起来,系统地阐述了应用电子计算机进行结构分析的基础理论。对于线性和非线性的平面和空间杆件,应用代数方法或变分原理,建立了承受伸缩、剪切、弯曲和扭转变形的平衡方程、变形与位移的关系及力与变形的关系,导出了柔度矩阵和刚度矩阵。结合线性杆系,包括理想桁架结构,详细地介绍了直接刚度法。并就几何非线性杆系的受力和变形状态做了有启发性的导引。

本书源于作者在麻省理工学院授课的笔记,在侧重论述基础理论的同时,还以一定篇幅的例题说明解答方法,并在各章列有例题,绝大多数章中附有习题,以冀强调重点,巩固概念。因此,本书可作为我国高等院校讲授近代结构分析课程的参考书,也可供研读结构理论的研究生和高年级学生参考。从事工程结构分析的技术人员可直接采用书中的若干结果。

# 前 言

近十多年来,随着电子计算机分析方法的发展,结构分析课程的教学发生了革命性的变化,结构力学与结构分析之间的传统划分已无多大必要,而可把教学重点集中于基础理论,以取代讲授大量的解题细节。

本书系统地阐述了结构力学与结构分析相互结成整体的理论,包括单根杆件的力学分析,杆系的矩阵方程和解题技巧。在固体力学中解决问题的三个基本步骤,即满足平衡条件,建立变形与位移的关系和力与变形之间的关系,形成了推导的基础。中心问题是建立每一步的方程式,并讨论如何求解全部方程。循此途径,读者可建立统一考虑问题的观点,并清楚地看出在那些地方引进了简化假设。同时,也为扩展这一理论的用途做了较好的准备。

第一部分各章,包括了本书所涉及到的线性代数、微分几何和矩阵变换的基本知识。把这些内容写进第一部分,对于问题的数学处理的连贯性较为方便,也有利于以后各章之间的衔接。

第二部分论述理想桁架的分析。首先建立适用于小应变但为任意位移的控制方程,然后将其写成矩阵形式。之后,利用控制方程,导出虚位移原理和虚力原理,得出评价平衡位置稳定性的判别依据,并把控制方程解释为某一变分原理的平稳值条件。这些概念,对理解以后两章的解题方法是必要的。

第三部分研究单根杆件的状态。考虑到完整性,首先介绍允许任意位移的可变形弹性固体的控制方程、虚位移原理和虚力原理以及稳定性判别依据。然后,详细地探讨等截面杆件无约束弯曲与扭转,并导出一种近似的工程理论。进而,阐述等截面杆件的约束弯扭理论,讨论包括扭曲约束影响的各种近似方法,以例说明扭曲约束对开口和闭口薄壁截面的影响。最末两章论述平面杆件

# 目 录

## 第一部分 数学基础

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| 第一章 矩阵代数 .....                 | 1  |
| 1-1 矩阵的定义 .....                | 1  |
| 1-2 矩阵的相等、加法和减法 .....          | 3  |
| 1-3 矩阵乘法 .....                 | 3  |
| 1-4 矩阵的转置 .....                | 7  |
| 1-5 特殊方阵 .....                 | 8  |
| 1-6 分块矩阵的运算 .....              | 11 |
| 1-7 行列式的定义与性质 .....            | 15 |
| 1-8 余子式展开公式 .....              | 19 |
| 1-9 克莱姆法则(Cramer's rule) ..... | 21 |
| 1-10 伴随矩阵和逆矩阵 .....            | 22 |
| 1-11 矩阵的基本运算 .....             | 24 |
| 1-12 矩阵的秩 .....                | 28 |
| 1-13 线性方程组的可解性 .....           | 32 |
| 参考文献 .....                     | 36 |
| 习题 .....                       | 36 |
| 第二章 特征值问题和二次型 .....            | 49 |
| 2-1 引论 .....                   | 49 |
| 2-2 二阶特征值问题 .....              | 50 |
| 2-3 相似变换和正交变换 .....            | 55 |
| 2-4 $n$ 阶对称矩阵的特征值问题 .....      | 58 |
| 2-5 二次型 .....                  | 61 |
| 参考文献 .....                     | 65 |
| 习题 .....                       | 65 |

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| 第三章 函数的相对极值                       | 76  |
| 3-1 一个变量函数的相对极值                   | 70  |
| 3-2 $n$ 个独立变量函数的相对极值              | 75  |
| 3-3 拉格朗日乘子(Lagrange multiplier)   | 79  |
| 参考文献                              | 83  |
| 习题                                | 83  |
| 第四章 杆件的微分几何                       | 87  |
| 4-1 空间曲线的参数表达式                    | 87  |
| 4-2 弧长                            | 89  |
| 4-3 单位切线矢量                        | 90  |
| 4-4 主法线及副法线矢量                     | 91  |
| 4-5 曲率、挠率和弗朗内方程(Frenet equations) | 93  |
| 4-6 空间曲线几何关系小结                    | 95  |
| 4-7 杆件的局部坐标系                      | 96  |
| 4-8 杆件的曲线坐标                       | 99  |
| 参考文献                              | 102 |
| 习题                                | 102 |
| 第五章 杆件的矩阵变换                       | 105 |
| 5-1 旋转变换                          | 105 |
| 5-2 力的三维变换                        | 108 |
| 5-3 位移的三维变换                       | 114 |
| 参考文献                              | 115 |
| 习题                                | 116 |

## 第二部分 理想桁架的分析

|                    |     |
|--------------------|-----|
| 第六章 理想桁架的控制方程      | 119 |
| 6-1 概述             | 119 |
| 6-2 杆件伸长与节点位移的关系   | 120 |
| 6-3 总的杆件伸长与节点位移的关系 | 124 |
| 6-4 杆件轴力与伸长的关系     | 128 |

|     |                 |     |
|-----|-----------------|-----|
| 6-5 | 总的轴力与节点位移的关系    | 132 |
| 6-6 | 节点力的平衡方程        | 133 |
| 6-7 | 引用位移约束; 控制方程    | 135 |
| 6-8 | 任意约束方向          | 136 |
| 6-9 | 初始不稳定           | 140 |
|     | 参考文献            | 145 |
|     | 习题              | 145 |
| 第七章 | 理想桁架的变分原理       | 153 |
| 7-1 | 概述              | 153 |
| 7-2 | 虚位移原理           | 153 |
| 7-3 | 虚力原理            | 159 |
| 7-4 | 应变能; 平稳势能原理     | 162 |
| 7-5 | 余能; 平稳余能原理      | 165 |
| 7-6 | 稳定性的判别依据        | 169 |
|     | 参考文献            | 174 |
|     | 习题              | 175 |
| 第八章 | 理想桁架的位移法        | 179 |
| 8-1 | 概述              | 179 |
| 8-2 | 分块矩阵方程的运算       | 179 |
| 8-3 | 直接刚度法           | 181 |
| 8-4 | 增量方程; 正统稳定性判别依据 | 193 |
| 8-5 | 线性化稳定分析         | 203 |
|     | 参考文献            | 207 |
|     | 习题              | 208 |
| 第九章 | 理想桁架的力法         | 213 |
| 9-1 | 概述              | 213 |
| 9-2 | 用代数方法推导控制方程     | 213 |
| 9-3 | 用变分法推导控制方程      | 219 |
| 9-4 | 力法与网络法的比较       | 221 |
|     | 参考文献            | 227 |

|          |    |
|----------|----|
| 习题 ..... | 22 |
|----------|----|

### 第三部分 杆系分析

|                                  |     |
|----------------------------------|-----|
| 第十章 变形固体的控制方程 .....              | 230 |
| 10-1 概述 .....                    | 230 |
| 10-2 求和规则; 笛卡尔张量 .....           | 231 |
| 10-3 变形分析; 笛卡尔应变 .....           | 233 |
| 10-4 应力分析 .....                  | 241 |
| 10-5 弹性应力与应变的关系 .....            | 248 |
| 10-6 虚位移原理; 平稳势能原理; 正统稳定性判别依据 .. | 254 |
| 10-7 虚力原理; 平稳余能原理 .....          | 258 |
| 参考文献 .....                       | 264 |
| 习题 .....                         | 264 |
| 第十一章 圣文南等截面杆件的弯曲与扭转理论 .....      | 272 |
| 11-1 引论和记号 .....                 | 272 |
| 11-2 纯扭转问题 .....                 | 274 |
| 11-3 开口薄壁截面扭转问题的近似解答 .....       | 282 |
| 11-4 闭口薄壁截面扭转问题的近似解答 .....       | 286 |
| 11-5 可自由扭曲的弯曲与扭转问题 .....         | 294 |
| 11-6 矩形截面精确的弯曲剪应力 .....          | 306 |
| 11-7 薄壁截面中弯曲剪应力的工程理论 .....       | 309 |
| 参考文献 .....                       | 325 |
| 习题 .....                         | 325 |
| 第十二章 等截面杆件的工程理论 .....            | 331 |
| 12-1 引论 .....                    | 331 |
| 12-2 力的平衡方程 .....                | 332 |
| 12-3 力与位移的关系; 虚力原理 .....         | 334 |
| 12-4 控制方程提要 .....                | 340 |
| 12-5 等截面杆件的位移法 .....             | 341 |
| 12-6 等截面杆件的法力法 .....             | 353 |

|                                           |     |
|-------------------------------------------|-----|
| 参考文献 .....                                | 368 |
| 习题 .....                                  | 368 |
| 第十三章 等截面杆件的约束弯曲与扭转理论 .....                | 374 |
| 13-1 引论 .....                             | 374 |
| 13-2 位移表达式; 平衡方程 .....                    | 375 |
| 13-3 用位移模型建立力与位移的关系 .....                 | 379 |
| 13-4 用位移模型解答约束扭转问题 .....                  | 383 |
| 13-5 用混合法建立力与位移的关系 .....                  | 387 |
| 13-6 用混合法解约束扭转问题 .....                    | 394 |
| 13-7 在开口薄壁截面中的应用 .....                    | 401 |
| 13-8 在闭口薄壁截面中的应用 .....                    | 411 |
| 13-9 几何非线性杆件的约束扭转的控制方程 .....              | 419 |
| 参考文献 .....                                | 427 |
| 习题 .....                                  | 428 |
| 第十四章 平面杆件的平面变形 .....                      | 432 |
| 14-1 引论; 几何关系 .....                       | 432 |
| 14-2 力的平衡方程 .....                         | 434 |
| 14-3 力与位移的关系; 虚力原理 .....                  | 437 |
| 14-4 用构成位移表达式的方法建立力与位移的关系;<br>虚位移原理 ..... | 442 |
| 14-5 笛卡尔坐标法 .....                         | 452 |
| 14-6 位移法解圆弧杆件 .....                       | 456 |
| 14-7 用力法解题 .....                          | 465 |
| 14-8 数值积分法 .....                          | 481 |
| 参考文献 .....                                | 485 |
| 习题 .....                                  | 485 |
| 第十五章 任意杆件的工程理论 .....                      | 490 |
| 15-1 引论; 几何关系 .....                       | 490 |
| 15-2 力的平衡方程 .....                         | 493 |
| 15-3 略去扭曲约束的力与位移的关系; 虚力原理 .....           | 495 |

|       |                      |     |
|-------|----------------------|-----|
| 15-4  | 平面圆形杆件的位移法 .....     | 498 |
| 15-5  | 力法示例 .....           | 504 |
| 15-6  | 约束扭曲理论 .....         | 511 |
| 15-7  | 杆端完全约束的力与位移的关系 ..... | 517 |
| 15-8  | 杆件矩阵的产生 .....        | 523 |
| 15-9  | 等截面杆件矩阵 .....        | 527 |
| 15-10 | 平面圆弧细杆矩阵 .....       | 532 |
| 15-11 | 圆柱螺旋杆件的柔度矩阵 .....    | 539 |
| 15-12 | 杆端部分约束的力与位移的关系 ..... | 543 |
|       | 参考文献 .....           | 547 |
|       | 习题 .....             | 547 |

#### 第四部分 杆系分析

|       |                    |     |
|-------|--------------------|-----|
| 第十六章  | 线性杆系的直接刚度法 .....   | 551 |
| 16-1  | 引论 .....           | 551 |
| 16-2  | 杆件的力与位移的关系 .....   | 552 |
| 16-3  | 杆系的平衡方程 .....      | 554 |
| 16-4  | 节点位移约束的引进 .....    | 555 |
|       | 参考文献 .....         | 560 |
| 第十七章  | 线性杆系的一般性理论 .....   | 561 |
| 17-1  | 引论 .....           | 561 |
| 17-2  | 杆件方程 .....         | 562 |
| 17-3  | 体系的力与位移的关系 .....   | 564 |
| 17-4  | 杆系的平衡方程 .....      | 567 |
| 17-5  | 节点位移约束; 控制方程 ..... | 568 |
| 17-6  | 网格法 .....          | 571 |
| 17-7  | 位移法 .....          | 574 |
| 17-8  | 力法 .....           | 577 |
| 17-9  | 变分原理 .....         | 580 |
| 17-10 | 引进杆件的变形约束 .....    | 584 |

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| 参考文献 .....              | 596 |
| 第十八章 几何非线性杆系分析 .....    | 597 |
| 18-1 引论 .....           | 597 |
| 18-2 平面变形杆件的控制方程 .....  | 597 |
| 18-3 任意变形的杆件的控制方程 ..... | 604 |
| 18-4 解题方法; 稳定性分析 .....  | 611 |
| 参考文献 .....              | 616 |
| 中英名词对照 .....            | 618 |

# 第一部分 数学基础

## 第一章 矩阵代数

### 1-1 矩阵的定义

一组有序量可以是一维阵列, 如

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

也可以是二维阵列, 如

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$$

$$a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}$$

在二维阵列中, 第一个角标表示该元素行的位置, 第二个角标表示列的位置。

只要对一具有  $m$  行和  $n$  列的二维阵列规定一些算术运算法则 (加法、减法、乘法), 那么, 就把它称为  $m$  乘  $n$  阶矩阵。通常把这种二维阵列用方括号括起来, 写成①

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] = \mathbf{a} \quad (1-1)$$

应注意, 矩阵的阶数中, 第一个数指行的总数, 第二个数指列的总数。为方便起见, 以后把矩阵的阶数简写成  $m \times n$ 。

只有一行的矩阵称为行矩阵。同样, 只有一列的矩阵称为列

---

① 本书印刷时, 矩阵均用黑体字表示。

矩阵。列矩阵有时也称为列向量<sup>①</sup>。通常,以大括号代替方括号用以表示列矩阵,并取消表示列序数的角标。同时,为了节省书写篇幅,可以把各元素横列,而不竖排。列矩阵的几种表示方法为:

$$\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \right\} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\} = \{c_i\} = \mathbf{0} \quad (1-2)$$

若矩阵的行数和列数相同,就称为方阵(方阵的一些特殊形式将于下节叙述)。若矩阵的所有元素均为零,就称为零矩阵,用 $\mathbf{0}$ 来表示(如前所述,用黑体字表示)。

#### 例 1-1

##### $3 \times 4$ 矩阵

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 1 & -8 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

##### $1 \times 3$ 行矩阵

$$[3 \quad 4 \quad 2]$$

##### $3 \times 1$ 列矩阵

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \text{ 或 } \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ 或 } \{3, 4, 2\}$$

##### $2 \times 2$ 方阵

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

##### $2 \times 2$ 零矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

---

<sup>①</sup> 这里指的是矢量的数学定义。在力学中,矢量定义为具有大小和方向的量。力学矢量诸如力或力矩用斜体形字母在其顶上加一箭头来表示,如 $\vec{F}$ 。在本书中,认为读者已具备矢量代数的基本知识。参见文献2(列在章末)。

## 1-2 矩阵的相等、加法和减法

两个矩阵  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$ , 如果同阶而且每一个对应元素都相等, 则这两个矩阵相等:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad \text{当 } a_{ij} = b_{ij} \text{ 时} \quad (1-3)$$

若  $\mathbf{a}$  是  $m \times n$  阶矩阵, 则矩阵方程

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

相当于  $mn$  个方程:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \begin{matrix} i=1, 2, \dots, m \\ j=1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

只有当几个矩阵同阶时, 矩阵加法运算和减法运算才有定义。两个  $m \times n$  阶矩阵  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的和是一个  $m \times n$  阶矩阵  $[a_{ij} + b_{ij}]$ :

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \quad (1-4)$$

同样地

$$[a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}] \quad (1-5)$$

例如, 若  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$   $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

则  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

以及  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

由上例明显可见, 矩阵相加满足交换律和结合律:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (1-6)$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} \quad (1-7)$$

## 1-3 矩阵乘法

纯量  $k$  与矩阵  $\mathbf{a}$  的乘积, 定义为矩阵  $[ka_{ij}]$ , 即把  $\mathbf{a}$  中的每一个元素都乘以  $k$ 。例如, 若

$$k=5 \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{则} \quad k\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -10 & 35 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

矩阵与纯量相乘满足交换律, 即:

$$k\mathbf{a} = \mathbf{a}k = [ka_{ij}] \quad (1-8)$$

为了建立矩阵与列矩阵相乘的定义, 现考查由  $m$  个线性代数方程组成的方程组, 方程中含  $n$  个未知量  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= c_m \end{aligned} \quad (1-9)$$

该式可以改写成

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = c_i \quad i=1, 2, \dots, m \quad (a)$$

式中  $k$  是哑角标。利用列矩阵记号, 式(1-9)可写成如下形式:

$$\left\{ \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k \right\} = \{c_i\} \quad i=1, 2, \dots, m \quad (1-10)$$

进而, 把式(1-9)写成矩阵乘积形式:

$$[a_{ij}]\{x_j\} = \{c_i\} \quad \begin{matrix} i=1, 2, \dots, m \\ j=1, 2, \dots, n \end{matrix} \quad (1-11)$$

由于式(1-10)和式(1-11)必等, 因此矩阵与列矩阵的相乘定义为

$$\mathbf{ax} = [a_{ij}]\{x_j\} = \left\{ \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k \right\} \quad i=1, 2, \dots, m \quad (1-12)$$

只有当  $\mathbf{a}$  的列数等于  $\mathbf{x}$  的行数, 其乘积才有定义, 所得乘积为列矩阵, 其行数与  $\mathbf{a}$  相同。一般地说, 若  $\mathbf{a}$  为  $r \times s$  阶,  $\mathbf{x}$  为  $s \times 1$  阶, 则乘积  $\mathbf{ax}$  为  $r \times 1$  阶矩阵。

### 例 1-2

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 8 & -4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{ax} = \begin{Bmatrix} (1)(2) + (-1)(3) \\ (8)(2) + (-4)(3) \\ (0)(2) + (3)(3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{Bmatrix}$$

其次讨论两个矩阵的乘积。两个矩阵相乘的乘积可结合变量的线性交换来推求。设想把式(1-9)中  $n$  个变量  $x_1, x_2, \dots, x^n$  表达成  $s$  个新变量  $y_1, y_2, \dots, y_s$  的线性组合:

$$x_k = \sum_{j=1}^s b_{kj} y_j \quad k=1, 2, \dots, n \quad (1-13)$$

把  $x_k$  代入式(1-10),

$$\left\{ \sum_{k=1}^n a_{ik} \left( \sum_{j=1}^s b_{kj} y_j \right) \right\} = \{c_i\} \quad i=1, 2, \dots, m \quad (a)$$

交换求和次序, 并设

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad \begin{matrix} i=1, 2, \dots, m \\ j=1, 2, \dots, s \end{matrix} \quad (1-14)$$

则方程变换为

$$\left\{ \sum_{j=1}^s p_{ij} y_j \right\} = \{c_i\} \quad i=1, 2, \dots, m \quad (1-15)$$

注意到式(1-12), 则上式可改写成

$$\mathbf{py} = \mathbf{c} \quad (1-16)$$

式中  $\mathbf{p}$  是  $m \times s$  阶矩阵,  $\mathbf{y}$  是  $s \times 1$  阶矩阵。同时把变量转换式(1-13)写成矩阵形式

$$\mathbf{x} = \mathbf{by} \quad (1-17)$$

式中  $\mathbf{b}$  是  $n \times s$  阶矩阵。把  $\mathbf{x}$  代入式(1-11), 得到

$$\mathbf{aby} = \mathbf{c} \quad (1-18)$$

再要求式(1-16)和式(1-18)相同, 结果就得到  $\mathbf{ab}$  乘积的定义式:

$$\mathbf{ab} = [a_{ik}] [b_{kj}] = [P_{ij}] \quad \begin{matrix} i=1, 2, \dots, m \\ k=1, 2, \dots, n \\ j=1, 2, \dots, s \end{matrix} \quad (1-19)$$

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

很明显, 只有当  $\mathbf{a}$  的列数等于  $\mathbf{b}$  的行数, 乘积才有定义。一般地说, 若  $\mathbf{a}$  为  $r \times n$  阶矩阵,  $\mathbf{b}$  为  $n \times q$  阶矩阵, 则乘积  $\mathbf{ab}$  为  $r \times q$