结构杆系分析

Jiegou Ganxi Fenxi

〔美〕J. J. 康诺尔
牟 彪 陈科昌 译
何福照 校

人民交通出版社

和任意曲杆的特性。

怎样汇集和解答杆系控制方程的讨论，放在第四部分。首先，简述直接刚度法；然后介绍控制方程的一般性推导。最末两章研究几何非线性杆系，讨论杆件力与位移的关系，包括弯曲与扭转的耦连问题和解答方法以及线性化的稳定性分析。

本书的目的是为讲授近代结构杆系分析提供一本合适的教材。这里奉献给读者的，就是作者近年在麻省理工学院的讲课笔记几经修改的产物。作者感谢那些提供意见而使本书得以改善的大学生，并对 Jane Malinnofsky 夫人为本书手稿耐心打字和 Charles Miller 教授的鼓励表示谢忱。

Jerome J. Connor

(J. J. 康诺尔)

内 容 提 要

本书分三大部分共十八章，包括有关的数学基础、理想桁架的控制方程和杆系分析，并附有例题、习题和参考书目。

本书可供研读结构理论的研究生和高年级学生参考；对于从事工程结构分析的技术人员也是一本较好的参考书。

该书由牟彪、陈科昌合译，何福照审校。

ANALYSIS OF STRUCTURAL MEMBER SYSTEMS

JEROME J. CONNOR

结 构 杆 系 分 析

[美] J. J. 康诺尔

牟 彪 陈科昌 译

何福照 校

人民交通出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

江苏省如东县印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：19.875 字数：522千

1986年6月第1版

1986年6月第1版第1次印刷

印数：1—3,300册 定价：6.25元

译 者 的 话

本书根据美国麻省理工学院J. J. 康诺尔教授所著«结构杆系分析» (Analysis of Structural Member Systems)一书译出。作者将传统的"结构力学"和近代的"结构分析"两门课程统一起来，系统地阐述了应用电子计算机进行结构分析的基础理论。对于线性和非线性的平面和空间杆件，应用代数方法或变分原理，建立了承受伸缩、剪切、弯曲和扭转变形的平衡方程、变形与位移的关系及力与变形的关系，导出了柔度矩阵和刚度矩阵。结合线性杆系，包括理想桁架结构，详细地介绍了直接刚度法。并就几何非线性杆系的受力和变形状态做了有启发性的导引。

本书源于作者在麻省理工学院授课的笔记，在侧重论述基础理论的同时，还以一定篇幅的例题说明解答方法，并在各章列有例题，绝大多数章中附有习题，以冀强调重点，巩固概念。因此，本书可作为我国高等院校讲授近代结构分析课程的参考书，也可供研读结构理论的研究生和高年级学生参考。从事工程结构分析的技术人员可直接采用书中的若干结果。

前　言

近十多年来，随着电子计算机分析方法的发展，结构分析课程的教学发生了革命性的变化，结构力学与结构分析之间的传统划分已无多大必要，而可把教学重点集中于基础理论，以取代讲授大量的解题细节。

本书系统地阐述了结构力学与结构分析相互结成整体的理论，包括单根杆件的力学分析，杆系的矩阵方程和解题技巧。在固体力学中解决问题的三个基本步骤，即满足平衡条件，建立变形与位移的关系和力与变形之间的关系，形成了推导的基础。中心问题是建立每一步的方程式，并讨论如何求解全部方程。循此途径，读者可建立统一考虑问题的观点，并清楚地看出在那些地方引进了简化假设。同时，也为扩展这一理论的用途做了较好的准备。

第一部分各章，包括了本书所涉及到的线性代数、微分几何和矩阵变换的基本知识。把这些内容写进第一部分，对于问题的数学处理的连贯性较为方便，也有利于以后各章之间的衔接。

第二部分论述理想桁架的分析。首先建立适用于小应变但为任意位移的控制方程，然后将其写成矩阵形式。之后，利用控制方程，导出虚位移原理和虚力原理，得出评价平衡位置稳定性的判别依据，并把控制方程解释为某一变分原理的平稳值条件。这些概念，对理解以后两章的解题方法是必要的。

第三部分研究单根杆件的状态。考虑到完整性，首先介绍允许任意位移的可变形弹性固体的控制方程、虚位移原理和虚力原理以及稳定性判别依据。然后，详细地探讨等截面杆件无约束弯曲与扭转，并导出一种近似的工程理论。进而，阐述等截面杆件的约束弯扭理论，讨论包括扭曲约束影响的各种近似方法，以例说明扭曲约束对开口和闭口薄壁截面的影响。最末两章论述平面杆件

目　　录

第一部分　数学基础

第二部分 理想桁架的分析

第三部分　杆系分析

第四部分 杆系分析

第一部分　数学基础

第一章　矩阵代数

1-1　矩阵的定义

一组有序量可以是一维阵列，如

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$$

也可以是二维阵列，如

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots, & a_{mn} \end{matrix}$$

在二维阵列中，第一个角标表示该元素行的位置，第二个角标表示列的位置。

只要对一具有m行和n列的二维阵列规定一些算术运算法则（加法、减法、乘法），那么，就把它称为m乘n阶矩阵。通常把这种二维阵列用方括号括起来，写成①

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] = \mathbf{a} \tag{1-1}$$

应注意，矩阵的阶数中，第一个数指行的总数，第二个数指列的总数。为方便起见，以后把矩阵的阶数简写成$m \times n$。

只有一行的矩阵称为行矩阵。同样，只有一列的矩阵称为列

① 本书印刷时，矩阵均用黑体字表示。

矩阵。列矩阵有时也称为列向量①。通常，以大括号代替方括号用以表示列矩阵，并取消表示列序数的角标。同时，为了节省书写篇幅，可以把各元素横列，而不竖排。列矩阵的几种表示方法为：

$$\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{Bmatrix} = \{c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n\} = \{c_i\} = \mathbf{c} \qquad (1\text{-}2)$$

若矩阵的行数和列数相同，就称为方阵（方阵的一些特殊形式将于下节叙述）。若矩阵的所有元素均为零，就称为零矩阵，用 **0** 来表示（如前所述，用黑体字表示）。

例 1-1

3×4 矩阵

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 1 & -8 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

1×3 行矩阵

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

3×1 列矩阵

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{Bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \text{或} \{3,\ 4,\ 2\}$$

2×2 方阵

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

2×2 零矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

① 这里指的是矢量的数学定义。在力学中，矢量定义为具有大小和方向的量。力学矢量诸如力或力矩用斜体形字母在其顶上加一箭头来表示，如 $\vec{F}$。在本书中，认为读者已具备矢量代数的基本知识。参见文献 2（列在章末）。

1-2 矩阵的相等、加法和减法

两个矩阵 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$，如果同阶而且每一个对应元素都相等，则这两个矩阵相等：

$$\mathbf{a}=\mathbf{b} \quad \text{当 } a_{ij}=b_{ij} \text{ 时} \tag{1-3}$$

若 $\mathbf{a}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，则矩阵方程

$$\mathbf{a}=\mathbf{b}$$

相当于 mn 个方程：

$$a_{ij}=b_{ij} \quad \begin{array}{l} i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \end{array}$$

只有当几个矩阵同阶时，矩阵加法运算和减法运算才有定义。两个 $m\times n$ 阶矩阵 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的和是一个 $m\times n$ 阶矩阵 $[a_{ij}+b_{ij}]$：

$$[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}] \tag{1-4}$$

同样地

$$[a_{ij}]-[b_{ij}]=[a_{ij}-b_{ij}] \tag{1-5}$$

例如，若 $\mathbf{a}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

则 $$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

以及 $$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

由上例明显可见，矩阵相加满足交换律和结合律：

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a} \tag{1-6}$$

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} \tag{1-7}$$

1-3 矩阵乘法

纯量 k 与矩阵 $\mathbf{a}$ 的乘积，定义为矩阵 $[ka_{ij}]$，即把 $\mathbf{a}$ 中的每一个元素都乘以 k。例如，若

$$k=5 \qquad \mathbf{a}=\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

则
$$k\mathbf{a}=\begin{bmatrix} -10 & 35 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

矩阵与纯量相乘满足交换律，即：

$$k\mathbf{a}=\mathbf{a}k=[ka_{ij}] \tag{1-8}$$

为了建立矩阵与列矩阵相乘的定义，现考查由m个线性代数方程组成的方程组，方程中含n个未知量x_1, x_2, $\cdots$, x_n:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=c_1 \\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=c_2 \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=c_m \end{aligned} \tag{1-9}$$

该式可以改写成

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k=c_i \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{a}$$

式中k是哑角标。利用列矩阵记号，式(1-9)可写成如下形式：

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right\}=\{c_i\} \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{1-10}$$

进而，把式(1-9)写成矩阵乘积形式：

$$[a_{ij}]\{x_j\}=\{c_i\} \quad \begin{matrix} i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \end{matrix} \tag{1-11}$$

由于式(1-10)和式(1-11)必等，因此矩阵与列矩阵的相乘定义为

$$\mathbf{ax}=[a_{ij}]\{x_j\}=\left\{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right\} \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{1-12}$$

只有当$\mathbf{a}$的列数等于$\mathbf{x}$的行数，其乘积才有定义，所得乘积为列矩阵，其行数与$\mathbf{a}$相同。一般地说，若$\mathbf{a}$为$r\times s$阶，$\mathbf{x}$为$s\times 1$阶，则乘积$\mathbf{ax}$为$r\times 1$阶矩阵。

例 1-2

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 8 & -4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}=\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{ax}=\begin{Bmatrix}(1)(2)+(-1)(3)\\(8)(2)+(-4)(3)\\(0)(2)+(3)(3)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-1\\4\\9\end{Bmatrix}$$

其次讨论两个矩阵的乘积。两个矩阵相乘的乘积可结合变量的线性交换来推求。设想把式(1-9)中 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x^n$ 表达成 s 个新变量 $y_1, y_2, \cdots, y_s$ 的线性组合:

$$x_k=\sum_{j=1}^{s} b_{kj}y_j \quad k=1, 2, \cdots, n \tag{1-13}$$

把 x_k 代入式(1-10),

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{j=1}^{s} b_{kj}y_j\right)\right\}=\{c_i\} \qquad i=1, 2, \cdots, m \tag{a}$$

交换求和次序,并设

$$p_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad \begin{matrix} i=1, 2, \cdots, m\\ j=1, 2, \cdots, s\end{matrix} \tag{1-14}$$

则方程变换为

$$\left\{\sum_{j=1}^{s} p_{ij}y_j\right\}=\{c_i\} \qquad i=1, 2, \cdots, m \tag{1-15}$$

注意到式(1-12),则上式可改写成

$$\mathbf{py}=\mathbf{c} \tag{1-16}$$

式中 $\mathbf{p}$ 是 $m\times s$ 阶矩阵, $\mathbf{y}$ 是 $s\times 1$ 阶矩阵。同时把变量转换式(1-13)写成矩阵形式

$$\mathbf{x}=\mathbf{by} \tag{1-17}$$

式中 $\mathbf{b}$ 是 $n\times s$ 阶矩阵。把 $\mathbf{x}$ 代入式(1-11),得到

$$\mathbf{aby}=\mathbf{c} \tag{1-18}$$

再要求式(1-16)和式(1-18)相同,结果就得到 $\mathbf{ab}$ 乘积的定义式:

$$\mathbf{ab}=[a_{ik}][b_{kj}]=[P_{ij}] \qquad \begin{matrix} i=1, 2, \cdots, m\\ k=1, 2, \cdots, n\\ j=1, 2, \cdots, s\end{matrix} \tag{1-19}$$

$$p_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

很明显,只有当 $\mathbf{a}$ 的列数等于 $\mathbf{b}$ 的行数,乘积才有定义。一般地说,若 $\mathbf{a}$ 为 $r\times n$ 阶矩阵,$\mathbf{b}$ 为 $n\times q$ 阶矩阵,则乘积 $\mathbf{ab}$ 为 $r\times q$