

板壳磁弹性理论基础

白象忠 编著



机械工业出版社

可以进一步研究磁场对声波传播阻尼、衰减的规律。该理论既可以用于声学,又可为声响结构设计计算带来新的优化设计方法。可见,对磁弹性理论的进一步研究,将会给磁弹性的应用开辟广阔的途径。预计在 21 世纪,耦合场理论的研究,其中电磁场与机械系统间相互作用理论的发展,必将成为固体力学的主要发展方向之一,它对于促进我国工业革命和实现科学技术现代化将起到重要作用。

目前,在我国,关于磁弹性理论应用的研究尚属空白,愿本书能对我国科学工作者、工程技术人员和广大师生起到抛砖引玉之作用。

在本书编写过程中,参考了国内外已经公开出版的许多书籍、资料,在此特向有关作者表示敬意。马世麟同志对书稿提出许多宝贵意见;在出版过程中,得到了齐齐哈尔市科委的专项资助,在此一并致以由衷的谢意。

限于编著者的水平,书中难免会有疏漏甚至谬误之处,望广大读者批评指正。

编著者

1996 年 10 月

“板壳磁弹性理论”是一门新兴的学科,是弹性体耦合场理论的一个分支。该理论的创立对于处在高温、高压和强电磁场作用下的结构元件的强度、可靠性的分析具有非常重要的意义。本书首次向国内读者介绍了磁弹性力学的发展简史及应用前景;板与壳的磁弹性理论基础包括磁弹性力学的数学基础、电动力学基础、弹性力学基础等内容。本书给出了弹性体的磁弹性力学的普遍方程及解题的计算方法,并且列举了计算实例。

本书可供大专院校教师、研究生、本科生及科研工作者、工程技术人员学习使用,是研究板壳弹性的必备读物。

图书在版编目(CIP)数据

板壳磁弹性理论基础/白象忠编著. —北京:机械工业出版社,1996.12

ISBN 7-111-05495-4

I. 板… II. 白… III. 壳体(结构)-磁性力学:弹性力学-基础理论 IV. TU33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 23312 号

出版人:马九荣(北京市百万庄南街1号 邮政编码 100037)

责任编辑:王正琼 版式设计:杨丽华 责任校对:肖新民

封面设计:郭景云 责任印制:侯新民

北京市昌平振南印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

1996年12月第1版·1996年12月第1次印刷

787mm×1092mm^{1/32}·6^{5/8}印张·144千字

0 001—1000册

定价:11.00元

前 言

“板壳磁弹性理论”是一门新兴的学科,是弹性体耦合场理论的一个分支。磁弹性理论在世界范围内也是最近几年才发展起来的。它的发展同现代技术部门的一系列问题都有紧密的联系。该理论的创立对于处在高温、高压和强电磁场作用下的结构元件的强度、可靠性分析具有非常重要的意义。利用这一理论可以建立电磁泵原理、磁积累发电机原理、磁流体动力加速器及磁垫工作原理等等。在最近的二三十年中,由于航天、航空、化工、原子及核工业装置的防护系统、热加工、无损探伤、超声技术、电声技术、地球物理、磁声加工工艺分析等实际应用的需要,尤其是薄壁结构的强度设计及结构优化的需要,导致耦合场理论及其应用向新的方向发展。例如,应用这一理论可以改进原子核反应堆保护壳的设计;利用电磁效应和热磁效应能遏制导体内部裂纹的扩展,确定裂纹前缘电场、温度场的分布状态,可以在裂纹前缘形成焊口,以提高裂纹体结构元件的使用寿命,排除工作险情;用于飞机飞行时机翼裂纹的止裂,建立飞机除冰系统和防雷系统。该理论与磁电效应、压磁压电和热磁电效应的应用相结合,可以改进声发射和接收元件的设计,改进电路中选择、继电、滤波、变压、延时元件的设计,以及压电加速度计的设计等。其中,磁电效应又可用于磁声加荷、雷放电激波、磁声加工、磁感应加热、磁冲压和磁悬浮技术中。

由于磁弹性理论研究了磁弹性波在介质中的传播,因此

目 录

前言

绪论	1
1 数学基础知识	7
1.1 矢量分析概述	7
1.2 正交曲线坐标	25
1.3 坐标互易	35
1.4 张量分析基础	45
2 电动力学基础知识	53
2.1 基本概念与部分基本定理	53
2.2 磁场的散度和旋度	68
2.3 位移电流与极化电流	71
2.4 麦克斯威尔方程组	77
2.5 洛仑兹力及边界条件	79
3 板壳力学的基本方程	84
3.1 弹性体的变形方程	84
3.2 各向同性板壳理论的普遍方程	90
3.3 板壳非线性问题的基本方程	101
4 非稳定载荷下柔性载流壳体的磁弹性二维方程 与运动方程	137
4.1 运动介质中电动力学方程的欧拉形式与拉格朗日 形式	137
4.2 薄壳薄板理论的电动力学方程	145
4.3 柔性薄板薄壳的磁弹性方程	149

V

5 几何非线性的轴对称问题	164
5.1 方程组的建立及正交离散法	164
5.2 轴对称问题的解	179
参考文献	201

绪 论

电磁效应是指变形场同电磁场、温度场在弹性固体内部或者外部产生相互作用的一种效应。在线性状态范围内,这种效应无论是对电介质,还是对导电物体都具有各种各样的数学模型。近几年来,研究这种效应的学科称为耦合场理论,这是一门新兴学科。磁弹性就是专门研究电磁场同变形场的耦合,即研究在弹性固态物质中,电磁场和变形场相互作用的理论。这个理论是在线性弹性理论和线性电动力学理论的基础上发展起来的。如果所研究的弹性物体位于初始强大的磁场中,机械载荷、热载荷在引起变形场的同时,将要产生电磁场,这样,两个场将发生相互作用和相互影响,即出现耦合机制。电磁场对变形场的作用是通过在运动方程中表现出来的洛仑兹力引起的。变形场则会影响磁场的强度、磁弹性波和电磁波的传播速度与位相,具体表现在欧姆定律中多了电流密度增长项,该项取决于变形物体在磁场中位移的速度。

热磁弹性理论是专门用以研究电磁场、温度场同变形场的耦合效应的。热磁弹性理论的产生,对于处在高温、高压和强电场作用下的结构及结构元件的强度与可靠性的分析具有重要的意义。众所周知,热弹性是将弹性和热传导相结合研究温度场与变形场相互耦合影响的理论,这也正是考虑自然界各物理场相互作用的一个古典例证;而热磁弹性将囊括经典的弹性理论、热传导及电磁场理论,并在这些理论的基础上,进一步解决位于磁场中,且考虑热作用下的导体弹性变

形及运动的一些技术问题,即解决温度场、变形场和电磁场相互作用、相互影响的问题。

弹性电磁效应研究的另一个典型问题,是变形场和电磁场、温度场的耦联,例如,在压电晶体中的压电效应与温度场联系在一起的热压电效应等。

在上个世纪,固体力学的发展主要局限于研究解决线性弹性理论和与其平行发展的计算技术及简化板壳问题的方法;而本世纪中产生了变形体力学的新分支,即塑性理论和粘弹性、粘塑性理论;近二三十年来,随着科学技术的进步与发展,以及理论研究和实际应用研究的需要,使耦合场理论的研究有了飞速发展,特别是磁弹性和热磁弹性相互作用的问题,在现代的力学发展中占有更加重要的位置。W. Nowacki^[1]指出:“耦合场理论的研究,其中电磁场与机械系统间的相互作用理论的发展,必将成为固体力学今后的主要发展方向之一。”耦合场理论的发展有着十分广泛的应用前景,它对于促进工业技术革命和实现科学技术现代化都将会起到重要作用。

应该指出,对温度场、电磁场与导体、变形物体间的相互作用问题的研究才刚刚起步,与该理论相关的许多因素尚未考虑,其中大部分工作是在没有考虑磁和电的极化特征的前提下进行的。当弹性物体材料(例如铁磁材料)具有磁极化特征时,场相互作用的机制将会显著地复杂化。近十几年来,曾对磁化采用简化理论——线性化理论来处理较复杂的问题。此外,在耦合场理论的研究中,由于考虑了温度场、变形场和电磁场的相互作用,建立了具有复杂的线性和非线性微分方程的混合系统。

磁、热、电、变形相互作用的如下理论,在某种程度上可以

代表对其现象的一些不同观点,而这些观点将成为目前解决问题的有效手段^[2]。

1)认为变形弹性物体位于强的静电磁场中,其变形与电磁相互作用所产生的洛仑兹力对于在磁场中运动的物质是满足广义欧姆定律的,且可得到与弹性介质相关的电动力学方程。弹性介质由此产生的电磁场所引起的机械作用比原来磁场引起的机械作用小,这一理论曾广泛应用在定常磁场中的薄板和薄壳的磁弹性计算。

2)在研究位于变化的电磁场中导体的热弹性问题时,大多数采用简化系统。该系统忽略了机械电效应和热电效应。利用电动力学不相关的方程可确定感应电流和由它们引起的、且按照电磁波波动周期进行的热传导规律。因此,在所给定的模型中没有考虑电磁场与变形及温度之间的联系,而由热源的传播和分布来确定温度场和电导体的应力应变状态。该系统还可以用来确定时变电磁场作用下变形导体的热弹性状态,成为研究金属结构零件感应热加工工艺规范的理论基础。

3)在研究磁感应材料的磁弹性相互作用时,必须考虑外电磁场所引起的磁感应效应。静电磁场中具有小磁滞损失的软磁材料的磁感应理论,其电磁场方程中除了洛仑兹力外还包含有其它成分的电磁感应质动力项。这时,会导致线性状态方程和软磁材料原始状态的方程变得过于复杂。对这类问题的研究有着实际应用前景。

4)磁弹性、热磁弹性理论和其它理论,例如,相对论理论、大变形理论、磁各向异性理论、导流理论以及在顺磁材料中或在软磁材料中的磁感应理论等等,共同建立起了更加复杂的、能反映出相互作用的数学模型与物理模型。

一些学者致力于磁弹性、热磁弹性理论的实际应用研究，同时在实验领域内，开始对磁弹性、热磁弹性力学效应，以及对耦合场作用下的振型及其稳定性进行测试，提出了一些实际应用的建议和设想^[3]。

总的来说这方面的研究才刚刚起步，成果不甚显著。不过，学者们已经认识到，该理论研究的应用前景十分广阔。

对置于磁场的导电物体波的传播过程和振动过程的研究表明，其研究成果与实际应用联系紧密而且有可能飞速发展，可在无损探伤、结构元件的磁声加工、金属电热加工、磁电效应的利用以及其它科技领域中得到广泛应用。

在理论研究方面，多数学者致力于方程式的建立和解题方法的研究，并广泛利用计算手段进行数值解^[4,5]。同时研究领域扩展到了电热粘弹性的磁弹性问题中^[6,7]。文献^[8,9]给出了非线性磁弹性问题的数值解，并讨论了磁场强度、侧向电流方向和密度对应力应变状态的影响。

例如，现代技术的各个领域利用有磁场作用的薄板和薄壳作为结构元件已是屡见不鲜^[10,11,12,13]，如热核反应装置的保护壳。当存在有绕线激起的外电磁场时，反应堆壳体内会产生很大的应力，甚至导致结构丧失工作能力。

又如，对于裂纹体的磁弹性问题的解，必须研究电磁场作用下的材料破坏问题。目前，线性断裂力学研究的是机械载荷和热温度载荷共同作用下，弹性体内裂纹的萌生和发展。磁场对弹性体的作用导致了体积力和体积力矩的产生，而这些因素在分析裂纹尖端处的应力状态时是必须考虑的。

В. М. финкель、Ю. И. Галовин 和 А. А. Слетков^[14,15]用实验方法研究了薄板内有电流脉冲时裂纹扩展的动力过程。他们观察了裂纹尖端的集肤效应。在裂纹前缘处一个很小的范围

内,很快地熔化了板的材料,导致裂纹前缘尖端区金属的熔化,并形成了微小焊口,结果使裂纹前缘的曲率半径增大,减少了机械应力集中。利用这种办法,当热量集中在裂纹前缘时,可以阻止干线裂纹源的形成,从而防止裂纹的扩展。

实验证明,将脉冲电流通入带有裂纹的导体,利用电磁和热磁效应有可能制止分布在板壳导电材料中的裂纹扩展。借助于超高速摄影机,曾记录了这一实验过程的如下几个阶段:第一阶段,可观察到物体材料在裂纹前缘小范围内强化加热,然后进入第二阶段,即裂纹前缘曲率半径增大,并局部迸发爆炸形成焊口。当脉冲电流有较长的作用时间时,裂纹尖端的曲率半径在数秒内将会增大一至二个数量级,大大减小了机械应力的集中。这便意味着在制止裂纹扩展时,允许利用所产生的热效应抑制形成裂纹主干线的势能源。利用磁弹性和热磁弹性在不考虑有质动力、变形场、温度场之间耦联的条件下,对上述过程进行研究,可以得到裂纹前缘的电场、温度场的分布状态。

目前,对处于非定常机械场和电磁场作用下的壳体非线性热磁弹性问题,已经开始进行了理论和实验研究。例如,对位于电磁场的导电壳体中产生感生电流的同时,伴随着产生的热量可以使温度应力达到相当大的值,甚至超过允许值。研究表明:必须制定新的计算模型、计算方法和新的优化设计方法;必须进一步研究和确定物体与外部介质的热容量及材料的热物理特性、热机械特性与热磁弹性效应间的关系;必须研究关于改变侧向电流的流动方向和大小,从而改善壳体在非定常电磁场和机械场作用下的应力状态。虽然这些研究在某种程度上还处于初级阶段,但从目前的研究结果表明,这对于改善壳体的工作状态是非常有益的,由此可见,磁弹性和热磁

弹性理论具有巨大的应用价值和广阔的发展前景。

本书主要介绍薄板薄壳磁弹性的数学基础、电动力学基础和非线性弹性力学基础,并给出了载流板壳的非线性磁弹性的计算方法及部分计算结果,可作为读者研究板壳磁弹性的入门参考读物。

1 数学基础知识

1.1 矢量分析概述

1.1.1 场、标量场、矢量场、电磁场矢量

一般来说,如果在空间中一个区域内的每一点都有一个物理量的确定值与之对应,则这个区域就构成了该物理量的场。如果这个物理量是标量,这种场就叫做标量场,例如温度场、压力场、密度场、电位场等等。如果这个物理量是矢量,这种场就叫做矢量场,例如速度场、重力场、电场、磁场等等。

在电磁场理论中主要论述的是电场强度矢量 E 和磁场强度矢量 H , 电位移矢量 D 和磁感应强度矢量 B 。这些矢量在整个场内都是有限的,并且在一切正常点上都具有连续导数,空间上和时间上均为连续函数。但在介质的物理特性发生突变的界面上,这些矢量或者它们的导数就会出现不连续性。

电磁场的场源是电荷与电流的分布。对于它们的宏观作用,可以假定这些分布是连续的,而不是离散的,且视它们为空间和时间的函数。

1.1.2 矢量函数的概念

模和方向都保持不变的矢量称为常矢量,模和方向或者其中之一会改变的矢量称为变矢量。

表示物理量的矢量一般都是一个或几个(标量)变量的函数,叫做矢量函数。例如,静电场中的电场强度矢量 E ,一般是空间直角坐标变量 x, y, z 的函数,记作 $E(x, y, z)$,它的三个

直角坐标分量一般也是 x, y, z 的函数, 即

$$\mathbf{E}(x, y, z) = E_x(x, y, z)\mathbf{i} + E_y(x, y, z)\mathbf{j} + E_z(x, y, z)\mathbf{k} \quad (1.1)$$

式(1.1)中, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 为相应于直角坐标系中 x, y, z 轴的单位矢量。如果给定矢量场中任意一点的坐标, 由式(1.1)就给出该点的一个确定矢量——电场强度。

1.1.3 标量函数、等值面、方向导数、梯度

1.1.3.1 标量函数

一个标量场可以用一个标量函数来表示。例如, 在直角坐标系中, 某一标量物理函数 f 可以表示为

$$f = f(x, y, z) \quad (1.2)$$

若用矢径来确定点的位置, 则可以写成: $f = f(\mathbf{r})$ 。这里, 假定 $f(x, y, z)$ 是坐标变量的连续可微函数。

1.1.3.2 等值面

$$\text{若} \quad f = f(x, y, z) = c \quad (1.3)$$

c 为任意常数。随着 c 的取值不同, 给出一组曲面。在每一个曲面上的各点, 虽然坐标值 x, y, z 不同, 但函数值相等, 这样的曲面称为标量场 f 的等值面。例如, 温度场中的等温面, 电场中的等位面, 气象学中的等压面, 地理学上的等高线等等。式(1.3)称为等值面方程。

如果某一个标量的物理函数 g 是两个坐标变量 x, y 的函数, 这样的场称为平面标量场。则

$$g(x, y) = c \quad (1.4)$$

c 为任意常数。式(1.4)称为等值线方程, 它在几何上表示为一组等值曲线

1.1.3.3 方向导数

借助于标量场的等值面或等值线, 可以了解物理量在场

中的分布情况,但在研究标量场时,还需要了解标量函数 $f(x, y, z)$ 在场中各点的领域内每一方向的变化情况,故引入方向导数的概念。

如图 1-1 所示,设 $A_0(x_A, y_A, z_A)$ 为标量场 $f(x, y, z)$ 中的一点,从 A_0 点出发,朝任一方向引一条射线 l ,在 l 方向上靠近 A_0 点取一动点 $A(x_A + \Delta x, y_A + \Delta y, z_A + \Delta z)$,点 A_0 到点 A 的距离为 Δl ,根据偏导数定义,可以写出:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{A_0} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\Delta l} \quad (1.5)$$

$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{A_0}$ 称为函数 $f(x, y, z)$ 在 A_0

点上沿 l 方向的方向导数。可见,方向导数是函数 $f(x, y, z)$ 在给定定点沿某一方向对距离的变化率。在直角坐标系中 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ 就是函数 f 沿三个坐标轴方向的方向导数。

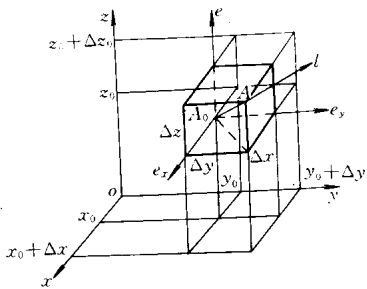


图 1-1 直角坐标系中
方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 的计算

在图 1-1 中, $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ 且 $\Delta x = \Delta l \cos \alpha, \Delta y = \Delta l \cos \beta, \Delta z = \Delta l \cos \gamma, \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 l 的方向余弦。

根据多元函数全增量和全微分的关系有:

$$\Delta f = f(A) - f(A_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{A_0} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{A_0} \Delta y + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{A_0} \Delta z + \omega \Delta l,$$

当 $\Delta l \rightarrow 0$ 时, $\omega \rightarrow 0$ 取极限有:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma \quad (1.6)$$

式(1.6)即为标量场中函数 $f(x, y, z)$ 在直角坐标系中任意点上沿 l 方向的方向导数。

1.1.3.4 梯度

方向导数是函数 $f(x, y, z)$ 在给定点 A 沿某个方向对距离的变化率。但是,从标量场中的 A 点出发有无穷多个方向,函数 $f(x, y, z)$ 沿其中哪个方向的变化率最大呢?最大的变化率为多少?

引入 l 方向的单位矢量

$$\mathbf{L}_0 = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$$

及矢量 $\Phi = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$

则式(1.6)可以写成

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \Phi \cdot \mathbf{L}_0 = |\Phi| \cos(\widehat{\Phi \cdot \mathbf{L}_0}) \quad (1.7)$$

式(1.7)说明矢量 Φ 在 l 方向上的投影等于函数 $f(x, y, z)$ 在该方向上的方向导数。当矢量 Φ 与 l 方向一致时,有 $\cos(\widehat{\Phi l}) = 1$, 这时,方向导数取最大值,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{\max} = |\Phi| \quad (1.8)$$

即矢量 Φ 的方向就是函数 $f(x, y, z)$ 在给定点 A 变化率最大的方向,最大变化率为 $|\Phi|$ 。矢量 Φ 称为函数 $f(x, y, z)$ 在给定点 A 的梯度,记作

$$\text{grad}f = \Phi \quad (1.9)$$

由此可见,一个标量场 f 的梯度是一个矢量函数。在给定的点,梯度的方向就是函数 f 变化率最大的方向,它的模恰好等于函数 f 在该点的最大变化率的数值。因为 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{\max} = |\text{grad}f| = |\Phi|$, 所以梯度总是指向函数 $f(x, y, z)$ 增大的方

向。点函数 f 的梯度仍是点函数。

此外,函数 f 在给定点沿任意方向 l 的方向导数等于函数 f 的梯度在 l 方向的投影。

为了简便,引入哈密顿算子

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.10)$$

它包含矢量和微分双重运算。它对一个标量场 $f(x, y, z)$ 的作用定义为

$$\begin{aligned} \nabla f &= \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) f \\ &= i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.11)$$

该算子的矢量运算有两种形式,分别定义为

$$\begin{aligned} 1) \nabla \cdot A &= \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (iA_x + jA_y + kA_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} 2) \nabla \times A &= \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (iA_x + jA_y + kA_z) \\ &= i \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

标量场 f 的梯度: $\text{grad} f = \nabla f$, 以后梯度改用哈密顿算子 ∇ 表示。上述运算仅仅是在直角坐标系中进行的,若在曲线坐标系中将具有其它的形式。

1.1.4 矢量线、通量、矢量场的散度、高斯定理

1.1.4.1 矢量线

一个矢量场可以用一个矢量函数来表示。例如,在直角坐标系中,某一矢量物理函数 F 可以表示为

$$F = F(x, y, z)$$

或者用分量表示为: