经济数学难点剖析及例题选讲

（微积分·线性代数·概率论）

韩立岩 刘长乃

经济数学难点剖析及例题选讲

（微积分·线性代数·概率论）

韩立岩　刘长乃　编著

北京经济学院出版社

(京)新登字 211 号

图书在版编目(CIP)数据

经济数学难点剖析及例题选讲/韩立岩,刘长乃编著.
北京:北京经济学院出版社,1995.1
ISBN 7-5638-0461-7

Ⅰ.经…　Ⅱ.①韩…②刘…　Ⅲ.经济数学-高等教育-教学参考资料　Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 08966 号

北京经济学院出版社出版
北京经济学院[illegible]版[illegible]照排中心排版
(北京市朝阳区红庙)
北京门头[illegible]胶[illegible]厂印刷
全国新华书店发行
787×1092 毫米　32 开本　12.125 印张　270 千字
1995 年 1 月第 1 版　1995 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
印数:00 001—5 000
定价:9.90 元

前　　言

这是一本学习辅导书和教学参考书，其目的是帮助读者学习或复习经济应用数学基础。因此，我们以教学大纲和经济应用数学基础的基本要求为准，剪裁和编排所讲授内容，希望能帮助读者提高学习效率和更系统、更牢固地掌握所学知识。

既然是学习的辅导书，就不应该依照教材的叙述思路而照搬或重复，而应针对读者特点对复习的内容加以概述与分析，使读者站在不同的角度对所学内容有新的更系统、更深刻的认识。因此，本书没有完全按照教材的逻辑顺序，而是将一些相关联的重要概念放在一起加以阐述和比较，从而突出重点结构。这在线性代数部分与概率论部分尤其重要，因为这两部分的重点概念不是集中在一处叙述完，而是贯穿教材的始终，如果依然按教材叙述的逻辑过程总结，则读者不一定能抓住要领。

读者在复习的过程中应将教材与本书结合起来学习。要熟练到这种程度：离开书可以分微积分、线性代数、概率论这三部分，每一部分再分章地叙述基本概念与定理，并能将贯穿各章的重点概念与方法的实质及各种情形的表达陈述清楚。做到这一点对全书的内容就系统地、整体地掌握了，做起题目来就不再盲目了。

建议读者看例题及分析时，不要忙于看过程与结果，而是自己先做做看，不会时再看书，并找出自己做不出的原因。每

做一题，不要做完后就弃置一边，而要思考其作用与特点，是巩固哪个概念与定理的？是运用哪种方法的？这样才可达事半功倍之效．对于书中总结的解题方法、解题思路以及需要注意的地方，希望读者反复思考、深刻理解并掌握之．这对于提高读者的水平与能力无疑会大有益处．

全书每章都分为三节：1．内容提要；2．重点、难点与例题选讲；3．习题、例题并非面面俱到，而是抓住基本概念、基本方法与基本问题，突出重点问题．

本书的微积分部分由刘长乃执笔，线性代数、概率与统计部分由韩立岩执笔．

由于编写时间仓促，错误与不足难免，谨望广大读者批评指正．

作者

1994年7月

目　录

第一部分　微积分

第一章　函数

§1.1　内容提要

一、集合

（一）集合的基本概念

1. 集合：把一些确定的对象看成一个整体就形成了一个集合，或把具有某种属性的事物的全体作为一个集合．一般用大写拉丁字母 $A,B,C\cdots$ 等表示集合．

2. 元素：构成集合的事物或对象，称为集合的元素．一般用小写拉丁字母 $a,b,c\cdots$ 等表示集合的元素．如果 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$，读作 a 属于 A 或 a 在 A 中；如果 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a\overline{\in}A$，读作 a 不属于 A 或 a 不在 A 中．

3. 有限集：由有限个元素组成的集合．

4. 无限集：由无限个元素组成的集合．

5. 全集：由所研究的全体事物构成的集合称为全集，记作 I 或 U.

6. 空集：不含有任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$.

7. 常用的数集有自然数集(N)、整数集(Z)、有理数集(Q)、实数集(R)以及复数集(C).

注意：

(1) 集合中的元素应具有以下三个特征：

①确定性：某一个元素是否属于某个集合是确定的，"是"或者"不是"二者必居其一.

②互异性：一个集合中的元素应该是互不相同的. 同一个元素在某集合中重复出现数次，只能作为一个元素.

③无序性：集合中的元素无排列顺序.

(2) 全集是相对的. 一个集合在某一问题中是全集，在另一问题中就可能不是全集.

(3) $\{0\}$与$\{\varnothing\}$都不是空集，前者是以"0"为元素的集合，后者是以空集"$\varnothing$"为其元素的集合.

(二)集合的表示法

1. 列举法：把集合中的元素一一列举出来并写在花括号$\{\}$内表示集合的方法. 如 $A=\{a,b,c,d\}$.

2. 描述法：把集合中元素的共同特性描述出来并写在花括号$\{\}$内表示集合的方法. 如 $A=\{x|1<x\leqslant 3\}$，$B=\{$锐角三角形$\}$.

(三)集合与集合的关系

集合与集合之间的关系可以用图形表示，称为文氏图. 文氏图是用一个简单的平面区域代表一个集合，集合内的元素以区域内的点表示，如图 1-1 所示.

1. 子集：如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 中的元素，也即若 $a\in A$，则 $a\in B$，则称 A 为 B 的子集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A. 如图 1-2 所示.

真子集：若集合 A 是集合 B 的子集，且集合 B 中至少有一个元素不属于 A，则称集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 如图 1-2 所示.

集合相等：若两个集合 A 和 B 满足 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，那么集合 A 和 B 相等，记作 $A=B$.

2. 交集：设有集合 A 和 B，由 A 和 B 所有公共元素构成的集合，称为 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$. 如图 1-3 中的阴影部分所示.

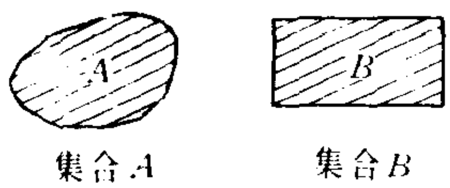


图 1-1

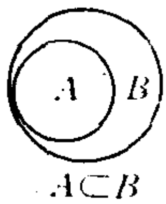


图 1-2

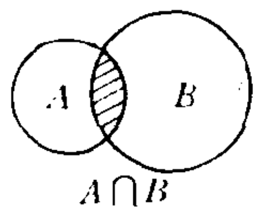


图 1-3

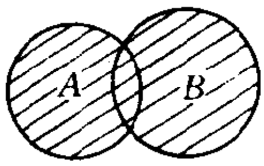
3. 并集：设有集合 A 和 B，由 A 和 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$. 如图 1-4 中的阴影部分所示.

4. 补集：若集合 A 是全集 I 的子集，则全集 I 中所有不属于 A 的元素构成的集合，称为集合 A 的补集，记作 $\overline{A}$（读作 A 的补集）. 如图 1-5 中的阴影部分所示.

5. 差集：设有集合 A 和 B，由属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的差集，记作 $A-B$. 如图 1-6 中的阴影部分所示.

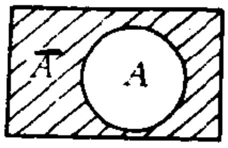
（四）集合的运算律

1. 交换律：(1) $A \cup B=B \cup A$;



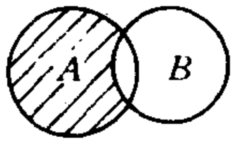
$A\cup B$

图 1-4



$\overline{A}$

图 1-5



$A-B$

图 1-6

(2) $A\cap B=B\cap A$.

2. 结合律：(1) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

(2) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

3. 分配律：(1) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

(2) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

4. 摩根律：(1) $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$；

(2) $\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

二、实数与绝对值

(一)实数与数轴

1. 实数：有理数与无理数统称为实数.

2. 数轴：规定了原点、正方向和单位长度的直线称为数轴. 如图 1-7 所示.

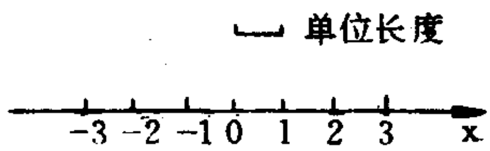


图 1-7

全体实数与数轴上的所有点是一一对应的，也即每一个实数必是数轴上某一点的坐标；反之，数轴上每一点的坐标必是一个实数，因此点 a 和实数 a 具有

相同的意思．

（二）绝对值

一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；0 的绝对值是 0．一个实数 x 的绝对值记作 $|x|$，规定为

$$|x|=\begin{cases} x, & x>0; \\ 0, & x=0; \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义是表示该点 x 到原点的距离．

绝对值及其运算具有下列性质：

(1) $|x|=\sqrt{x^2}$；　(2) $|-x|=|x|\geqslant 0$；

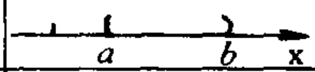
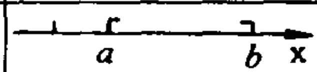
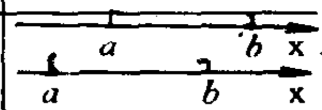
(3) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$；　(4) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$；

(5) $|x-y|\geqslant |x|-|y|$；　(6) $|xy|=|x||y|$；

(7) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$　$(y\neq 0)$.

（三）区间

区间是指介于某两个实数之间的全体实数．这两个实数称为区间的端点．现将一些常见的区间及表示法列表如下：

区　间	不等式表示	集合表示	数轴表示
开区间 (a,b)	$a<x<b$	$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$	
闭区间 $[a,b]$	$a\leqslant x\leqslant b$	$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	
半开区间 $[a,b)$ $(a,b]$	$a\leqslant x<b$ $a<x\leqslant b$	$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$ $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$	

以上三类区间称为有限区间，$b-a$ 称为区间的长.

常见的无穷区间有：$(a,+\infty)$、$[a,+\infty)$、$(-\infty,b)$、$(-\infty,b]$、$(-\infty,+\infty)$.

（四）邻域

在数轴上，一个以点 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，称为点 x_0 的 δ 邻域．x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径．如图 1-8 所示用集合表示为

$$\{x \mid |x-x_0| < \delta, \delta > 0\}.$$

若 $0<|x-x_0|<\delta$，则集合

$$(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$$

称为以 x_0 为中心，δ 为半径的空心邻域（或去心邻域），如图 1-9 所示．

注意：邻域一定是一个开区间．

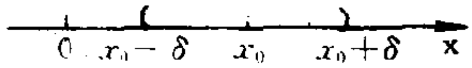


图 1-8

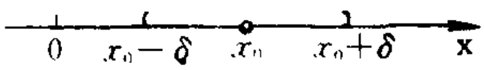


图 1-9

三、函数概念

（一）常量与变量

在某一过程中，如果一个量只能取一个固定的值，这个量就称为常量．如果一个量可以取不同的数值，这个量就称为变量．

需要注意的是，某一个量是常量还是变量都是相对某一个过程或某一问题而言的．例如在精确度要求不高时，地球上的重力加速度就可以看成常量；若要求比较精确，在不同的地点的重力加速度是不同的，此时它就是变量．

（二）函数

在某个过程中有两个变量 x 和 y，当变量 x 在一个非空实数集合 D 上取值时，如果变量 y 依照某一对应规则 f，总有唯一确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数．记

作

$$y=f(x)\quad (x\in D).$$

x 叫做自变量，y 叫因变量.

集合 D 称为函数的定义域，可记为 $D(f)$.

当 x 取定值 x_0 时所对应的 $y_0=f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，称为当 $x=x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的函数值.

全体函数值的集合 $\{y|y=f(x),x\in D(f)\}$，称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记为 Z 或 $Z(f)$.

注意：本课程只讨论单值函数，即一个 x 值只有一个 y 值与之对应.

(三)函数的表示方法

常用的函数表示法有公式法、表格法和图象法.

(四)分段函数

有些函数不能用一个统一的数学表达式表示，需要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为分段函数. 例如

$$y=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0,\\ x^2, & x>0;\end{cases}\qquad y=\begin{cases}x+1, & x<-1,\\ x-1, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1.\end{cases}$$

都是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的分段函数.

注意：分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数.

(五)函数的简单性质

1. 奇偶性：对于定义在 D 上的函数 $y=f(x)$，如果对任意的 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数是关于 y 轴对称，奇函数是关于原点对称.

2. 单调性：设函数 $y=f(x)$ 定义在区间 (a,b) 内，对任意

$x_1, x_2 \in (a,b)$，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$（或 $f(x_1) > f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加（或减少）的.

3. 有界性：设函数 $f(x)$ 定义在 D 上，若存在一正数 M，使得对所有的 $x \in D$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界的．如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 D 上是无界的．

需要注意的是：

(1)函数的有界性是函数本身的性质，它与所讨论问题的区间有关．例如 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，而 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是无界的，但在任何有限区间内它都是有界的．$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 内无界，而在 $[a,+\infty)$ 内是有界的（a 为大于零的常数）.

(2)函数有界切不要与函数有上界或有下界混淆．$y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是无界的，但它有下界 0. 而 $y=-x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是无界的，但有上界 0.

4. 周期性：对于函数 $y=f(x)$，若存在常数 $T>0$，使得 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称此函数为周期函数．满足这个等式的最小正数称为函数的周期．

例如 $y=\sin x$ 就是周期为 2π 的周期函数，而 $y=\cos(x^2)$ 就不是周期函数．

需要注意的是：证明一个函数是否是周期函数，有时是很困难的，而且这个问题也是很次要的，不必化很多精力去讨论它．另外，求一个函数的最小正周期有时是不可能的．例如 $y=c$（c 为常数）就是以任意正常数为周期的周期函数，显然很难求它的最小正周期．

四、反函数与复合函数

(一)反函数的概念

在研究同一过程中的两个变量 x 和 y 的关系时，若把 x 当作自变量，y 是因变量，则其函数关系为 $y=f(x)$，定义域为 $D(f)$，值域为 $Z(f)$. 若把 y 看成自变量，当 y 值取定以后，相应的 x 值也随之唯一确定，这时 x 就是 y 的函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，此时的定义域为 $Z(f)$，值域为 $D(f)$. 我们称 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，或称它们互为反函数.

(二)反函数的图象

由于习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量. 因此将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 的位置互换得 $y=f^{-1}(x)$. 这时我们说 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，或互为反函数. 在同一坐标系中，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象是关于 $y=x$ 对称的.

(三)复合函数

设函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$，当 x 在定义域中变化时，相应的 $u=\varphi(x)$ 的值也在 $y=f(u)$ 的定义域内变化. 因此，当 x 确定后，根据 $u=\varphi(x)$ 就得到 u 的值，由 u 的值根据 $y=f(u)$ 又确定了 y 的一个值，这样变量 x 与 y 之间通过变量 u 而形成一个函数关系，这个函数关系称为复合函数. 记为

$$y=f[\varphi(x)].$$

其中，x 为自变量，y 为因变量，u 称为中间变量.

必须注意：不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 例如

$$y=\arcsin u \quad 与 \quad u=2+x^2$$

就不能复合成一个复合函数. 这是因为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的任何 x 值所对应的 $u=2+x^2\geqslant 2$，都不能使 $y=\arcsin u$ 有意

义.

(四)初等函数

1. 基本初等函数:幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数,也称为简单函数.

2. 初等函数:由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.例如

$$y=\ln^2\mathrm{tg}(1+x^2) \quad 与 \quad y=2^{x^2}\arcsin\sqrt{x}$$

都是初等函数.

§1.2 重点、难点与例题选讲

一、重点、难点

本章的重点与难点都是函数概念与复合函数.

函数是微积分中最基本、最重要而且贯穿于整个教材的概念.因此正确地理解和掌握函数概念是非常重要的,所以对函数 $y=f(x)$ 再作如下的几点说明:

1. $y=f(x)$ 中的字母"f"它仅仅表示变量 y 与 x 之间的一种对应关系,即表示了函数关系的存在性,因此它是可以任意选取的,所表达的意义并不因为选择不同的字母而有所改变.例如

$$y=f(x)=\frac{1}{2}x^2$$

也可记为

$$y=\varphi(x)=\frac{1}{2}x^2, \quad y=s(x)=\frac{1}{2}x^2,$$

等等.