初等数学研究丛书

初等函数

四川人民出版社

初等数学研究丛书

初 等 函 数

四川省数学会普及工作委员会主编
程　汉　晋　编　著

四 川 人 民 出 版 社

一九八三年·成都

初等数学研究丛书《**初等函数**》

四川人民出版社出版　　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　　宜宾地区印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 印张7.25 插页1 字数156千
1983年8月第一版　　1983年8月第一次印刷
印数：1—13,400册

书号：7118·712　　**定价：0.57元**

内 容 简 介

本书是以现代数学的思想方法，来研究中学数学里讲述的初等函数。它与中学教材紧密配合，但在理论上有所加深，知识面有所扩大，培养解题能力有所提高。全书共六章，分别讲述一般函数的概念，各种初等函数及其恒等变形，初等函数的超越性与用函数方程来定义初等函数。内容循序渐进，讲解深入浅出，具有中学数学水平的读者，可畅读无阻。书末附有习题解答，以便自学。

本书可供中学数学教师教学参考；也可作为师范院校学生的阅读材料，中学生的提高读物；还可作为师范院校、进修院校开设中学数学课程的教材。

前　言

“精简、增加和渗透”是中学数学教学大纲中提出的一条原则。在这原则下，以传统数学为形，现代数学为实，实现中学数学内容的现代化，是当前我们面临的重要课题。四川省数学会普及工作委员会主编了一套“初等数学研究丛书”，邀请了四川师范学院数学系中学数学教研组同志从事编写工作，我觉得很有意义。这对中学数学教师和师范院校学习数学的学生，用现代数学的观点和方法，来研究传统数学内容，可供参考。

编好这样的小册子，不是一件很容易的事。这套“初等数学研究丛书”自然还会有一些缺点，我相信在广大教师和学生的帮助下定会使它逐步完善的。

我希望有更多的数学普及小册子问世。

四川省数学会理事长　柯　召

一九八三年一月

于是他认为这个东西就是花生。这个简单的逻辑在定义一些过程的时候是不成立的，此时定义该过程随机变量的测度空间有一些特殊需要的性质。然而本书在讨论 Brown 运动的时候，这种逻辑在证明某些不变性质中却是基本的。例如N维空间中两个有公共初始点和方差的 Brown 运动过程有相同的命中一个解析集的概率。这个事实不是一目了然的。本书中研究了这样的一些问题。

本书中没有非常新奇的东西。位势理论家们可以找到在一些很有意思的边界集上的约化的研究，还可以找到用叠约化来得到一些极限定理。对应地，概率论专家们可以找到一些新的上鞅下穿不等式，以及一些有意思的上鞅叠约化的技巧。一种新的上鞅控制原理说明经典位势理论仍然启示了一些有趣的概率论结论。

作者对 Bruce Hajek, Naresh Jain 以及 John Taylor 在不同的章节中提出的有益的意见表示感谢。最后作者也感谢打字员的忠实、准确的工作。

记 号 和 约 定

$\mathbf{R}^N$ 是N维 Euclid 空间，$\mathbf{R}=\mathbf{R}^1$，而 $\mathbf{R}^+$ 是正实数的集$[0,+\infty[$.$\overline{\mathbf{R}}$ 是广义实数的集$[-\infty,+\infty]$,而 $\overline{\mathbf{R}}^+$ 是正广义实数的集$[0,+\infty]$.

$\mathbf{Z}$ 是整数集，$\mathbf{Z}^+$ 是集$\{0,1,2,\cdots\}$而 $\mathbf{Z}_n^+$ 是集$\{0,1,\cdots,n\}$.

$\mathbf{R}^N$ 的无界子集的边界,如不指明其它的紧致化就包含 $\mathbf{R}^N$ 的一点紧化的添加点∞. 这个相对于 $\mathbf{R}^N$ 的一点紧化的边界称为集合的 Euclid 边界.

若ξ是 $\mathbf{R}^N$ 的一点,A是 $\mathbf{R}^N$ 的子集，那么ξ和A之间的距离写作$|\xi-A|$.

在任意指明的一个度量空间中，$B(\xi,\delta)$ 都表示ξ为中心，δ为半径的球.特别地,在 $\mathbf{R}^N$ 中: $B(\xi,\delta)=\{\eta:|\eta-\xi|<\delta\}$.

l_N 表示N维 Lebesgue 测度.

若A和B都是一个空间的子集，那么在A中但不在B中的点集记作 $A-B$.

"正"意指"$\geqslant 0$",而单调的概念是广义的单调，所以譬如由 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 中的常数函数又是单调递增的又是单调递减的.

若D是 $\mathbf{R}^N$ 的开子集,那么 $C^{(k)}(D)$表示从D到 $\mathbf{R}$ 中具有k阶连续导数的函数类.

函数f在一点的极限概念不涉及f在该点的值. 于是 $\lim_{\eta\to\xi}f(\eta)=\alpha$ 是指f在一个不含ξ的小空心邻域上趋向 α.

序列的下标常常用小圆点表示. 如没有其它声明，指标集总是指 $\mathbf{Z}^+$. 比如 $A.=\{A_0,A_1,\cdots\}$.

如f在一个集上满足某条件S，则该集就用 $\{S\}$ 表示. 比如f是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 中的函数,则f的正值集写为 $\{f\geqslant 0\}$.

本书分为三部分．1.II.3 表示第 1 部分第 II 章第 3 节．在某一部分内，II.3 表示该部分第 II 章第 3 节．在某一章内，第 3 节就是该章的第 3 节等等．

目　次

第一章 对应与函数

1,1. 对应

1,1,1. 两集的直积

对数学中的研究对象(即集中的元素)，有时要由两个对象a与b组成一个新的对象——序对(a, b)来加以研究。例如在坐标平面上研究点时，就要用两个实数a与b组成实数序对(a, b)来表示点。

所以称之为序对(a, b)，是因为两个对象a与b是有顺序的，当$a \neq b$时，$(a, b) \neq (b, a)$，换言之对于两个序对(a, b)与(c, d)：

当且仅当$a=c$，$b=d$时才有$(a, b)=(c, d)$。

有了序对的概念，下面我们对两集的直积给以定义：

定义 设有两集A与B，将A中的每一元素a与B中的每一元素b，组成所有的序对(a, b)，这些所有序对组成一个新的集(集中的元素是序对)叫做A乘以B的直积或卡氏积记为$A \times B$。即是：

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A;\ b \in B\}.$$

例1 设$A=\{1, 2, 3, 5\}$与$B=\{4, 5, 6\}$，则：

$$\begin{aligned} A \times B = \{ & (1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 4), \\ & (1, 5), (2, 5), (3, 5), (5, 5), \\ & (1, 6), (2, 6), (3, 6), (5, 6)\}; \end{aligned}$$

又 $$B\times A=\{(4,1),(5,1),(6,1),\\(4,2),(5,2),(6,2),\\(4,3),(5,3),(6,3),\\(4,5),(5,5),(6,5)\}.$$

一般$A\times B\neq B\times A$，即是两集的直积不满足交换律.

例 2 设$A=\{1,2,3,\cdots,9\}$与$B=\{1,2,3,\cdots,9\}$，则$A\times B$的元素可写成如下"九九表"：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(7,1)	(8,1)	(9,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)	(7,2)	(8,2)	(9,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)	(7,3)	(8,3)	(9,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)	(7,4)	(8,4)	(9,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)	(7,5)	(8,5)	(9,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)	(7,6)	(8,6)	(9,6)
7	(1,7)	(2,7)	(3,7)	(4,7)	(5,7)	(6,7)	(7,7)	(8,7)	(9,7)
8	(1,8)	(2,8)	(3,8)	(4,8)	(5,8)	(6,8)	(7,8)	(8,8)	(9,8)
9	(1,9)	(2,9)	(3,9)	(4,9)	(5,9)	(6,9)	(7,9)	(8,9)	(9,9)

共有81个序对作为元素.

例 3 设$A=R$（实数集）与$B=R$（实数集），则$A\times B=R\times R$是坐标平面上所有点组成的点集.

1,1,2. 二元关系

在数学中，"二元关系"这个概念是经常遇到的，如两个数的"相等关系"、"大小关系"、"整除关系"、"倍数关系"等等，这种种关系都是二元关系，它们都可以用两集的直积的一个子集表示出来.

例如，在前面例2"九九表"中序对（a，b），两个数a

与b的：

"相等关系"$a=b$，就是"九九表"中一条对角线上的序对组成的集$S_1=\{(1,1),(2,2),\cdots,(9,9)\}$，它是$A\times B$的一个子集，即是$S_1\subset A\times B$；

"大于关系"$a>b$，就是"九九表"中一条对角线上面的序对组成的集$S_2=\{(2,1),(3,1),\cdots,(9,8)\}$，它也是$A\times B$的一个子集，即是$S_2\subset A\times B$；

"整除关系"$a|b$（表示a整除b），就是"九九表"中的序对$(1,1)$，$(1,2)$，…，$(1,9)$，$(2,2)$，$(2,4)$，…，$(2,8)$，…，$(8,8)$，$(9,9)$组成的集S_3，它同样是$A\times B$的一个子集，即$S_3\subset A\times B$；

"2倍关系"$2a=b$，就是"九九表"中的序对$(1,2)$，$(2,4)$，$(3,6)$，$(4,8)$组成的集S_4，它也同样是$S_4\subset A\times B$。

通过上面这些例子，我们对"二元关系"给以下面的定义。

定义 若集$S\subset A\times B$，则S叫做A与B间的一个二元关系．当序对$(a,b)\in S$时，则叫a对b有关系S记为aSb。

又，两个集：$D=\{a|(a,b)\in S\}$ $R=\{b|(a,b)\in S\}$分别叫做S的定义集和值集。

例如，上面所举出的二元关系中：

S_1的：$D=\{1,2,\cdots,9\}$，$R=\{1,2,\cdots,9\}$；

S_2的：$D=\{2,3,\cdots,9\}$，$R=\{1,2,\cdots,8\}$；

S_3的：$D=\{1,2,\cdots,9\}$，$R=\{1,2,\cdots,9\}$；

S_4的：$D=\{1,2,3,4\}$，$R=\{2,4,6,8\}$。

1,1,3. 对应

当其我们已知A与B间的一个二元关系$S\subset A\times B$时，则

对于每个$a\in A$，与之有关系S的b，在B中可能没有或有一个或有多个．例如，前面讲的大于关系S_2：

对于A中的$a=1$，与之有关系S_2的b，在B中没有；

对于A中的$a=2$，与之有关系S_2的b，在B中有$b=1$；

对于A中的$a=3$，与之有关系S_2的b，在B中有$b=1$，2；

……

对于A中的$a=9$，与之有关系S_2的b，在B中有$b=1$，2，…，8。

所以A与B间的一个二元关系$S\subset A\times B$，我们可以看成是从集A向集B的一种对应，即是对于每个固定的$a\in A$，在B中可以没有或有一个或有多个b与之对应．对于“对应”给以下面的定义．

定义　A与B间的每一个二元关系$S\subset A\times B$，叫做从集A向集B的一个对应，A叫做出发集，B叫做达到集．

同样，对应的定义集与值集分别是：

$$D=\{a|(a,\ b)\in S\}\text{与}R=\{b|(a,\ b)\in S\},$$

显然有

当$(a,\ b)\in S$时，我们称a对应b记为$a\xrightarrow{S}b$。

1,2．函数

1,2,1．函数

由上节我们知道A与B间的每一个对应$S\subset A\times B$,应有：

每个$a\in A\xrightarrow{S}$没有或有一个或有多个$b\in B$．下面来研究一种特殊的对应，也是数学中重要的对应$f\subset A\times B$，使

有

$$\text{每个}x\in A\xrightarrow{f}\text{唯一的}y\in B,$$

即是这种对应对每个$x\in A$，不能出现没有或多个$b\in B$与之对应的情形，我们称为由A到B的单值对应。

定义1 由A到B的每个单值对应f：

$$\text{每个}x\in A\xrightarrow{f}\text{唯一}y\in B,$$

叫做由A到B的一个函数或映射，记为

$$y=f(x),$$

x叫自变元或原象，y叫值元或象．

这时对应f的定义集为$A=\{x|(x,y)\in f\}$叫做函数或映射的定义域或原象集，对应f的值集$R=\{y|x\in A;\ y=f(x)\}$叫做函数或映射的值域或象集，记为$R=f(A)$．

一般有$R\subset B$．若$R=B$，则称为由A到B上的函数或映射；若$R\subset B$且$R\neq B$，则称为由A到B内的函数或映射．

从上面的定义知道函数是一种特殊的二元关系或对应，所以有时把函数又称为函数关系或函数对应，这便是称呼的由来．至于函数的记号$y=f(x)$，也可用二元关系f写为afb，所以记号中的f应理解为是$A\times B$的一个子集（元素是序对），这样去理解函数就深入一步了．

在中学数学里研究的函数，集A与集B都为实数集，这时函数$y=f(x)$叫做一元实函数．

在研究一元实函数时，常用一种特殊的集——区间．我们对区间给以下面的定义．

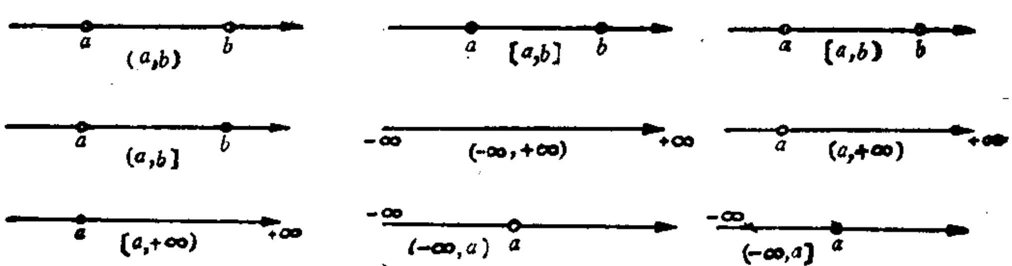
定义2 集：$\{x|x\text{是实数},a<x<b\}$记为(a,b)叫做开区间；

集：$\{x|x$ 是实数，$a\leqslant x\leqslant b\}$ 记为$[a,b]$叫做闭区间；

集：$\{x|x$ 是实数，$a\leqslant x<b\}$ 与 $\{x|x$ 是实数，$a<x\leqslant b\}$ 分别记为$[a, b)$与$(a, b]$叫做半开或半闭区间；

集：$\{x|x$是任何实数$\}$与$\{x|x$是实数，$x>a\}$与$\{x|x$是实数，$x\geqslant a\}$与$\{x|x$是实数，$x<a\}$与$\{x|x$是实数，$x\leqslant a\}$分别记为$(-\infty, +\infty)$与$(a, +\infty)$与$[a, +\infty)$与$(-\infty, a)$与$(-\infty, a]$都叫做无穷区间，其中符号"$+\infty$"与"$-\infty$"叫做正无穷大与负无穷大.

我们知道实数可以表示为数轴上的点，所以上面定义2中的各个区间可以表示为如图1.1中的各个点集.



（图　1.1）

例1　设单值对应 f：

$$每个x\in A\xrightarrow{f}同一的a\in B,$$

这函数$y=f(x)=a$称为常值函数，它的定义域为A，值域为$\{a\}$.

例2　设$A=B$，单值对应f：

$$每个x\in A\xrightarrow{f}唯一的x\in B,$$

这函数 $y=f(x)=x$ 称为恒等函数，它的定义域与值域都是A，是由A到A上的函数.

例 3 设函数 $y=f(x)=x-(-1)^x$ 的定义域 $A=\{1,2,3,4,5,6,\cdots\cdots\}$. 则它的值域

$$R=f(A)=\{2,1,4,3,6,5,\cdots\cdots\}=A,$$

是由 A 到 A 上的函数，但不是恒等函数.

例 4 函数 $y=f(x)=2x$, $A=(-1,5)$ 是由 $(-1,5)$ 到 $(-2,10)$ 上的函数，也是由 $(-1,5)$ 到 $(-2,10]$ 内的函数.

例 5 函数 $y=x^2$, $A=[-5,5]$. 是由 $[-5,5]$ 到 $[0,25]$ 上的函数，也是由 $[-5,5]$ 到 $[-25,25]$ 内的函数.

1,2,2. 函数的图象

由前节我们知道一元实函数 $y=f(x)$ 是由定义域 A(某个实数集)到值域 R(某个实数集)上的单值对应：

$$\text{每个}x\in A\xrightarrow{f}\text{唯一的}y\in R.$$

如果将这样对应得到的所有数对 (x,y) 作为点的坐标，在坐标平面上便得到一个点集，这个点集是函数 $y=f(x)$ 的一种几何表示，给以下面的定义.

定义 设一元实函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A，值域为 R. 由对应：

$$\text{每个}x\in A\xrightarrow{f}\text{唯一的}y\in R,$$

得到所有数对 (x,y) 作为点的坐标，在坐标平面上的点集：

$$F=\{(x,y)\,|\,x\in A,\ y=f(x)\},$$

或者为 $F=\{(x,f(x))\,|\,x\in A\}$,

叫做函数 $y=f(x)$ 的图象.

例 1 作函数 $y=2x$, $A=\{0,1,2,3,\}$ 的图象.