應用線性代數

伯纳德·科尔曼 著

曉園出版社
世界图书出版公司

應用線性代數

原著者 Bernard Kolman
譯著者 方 世 榮

曉園出版社
世界圖書出版公司
北京·广州·上海·西安
1992

内 容 简 介

线性代数是一门广为应用的学科．本书由浅入深地阐述了线性代数的基本性质和应用．本书对于大学各专业的学生打好高等数学的基础很有益处．

应用线性代数

伯纳德·科尔曼原著

方世荣　　　　译著

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京分公司重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

1992 年 11 月第一版	开本：787×1245　1／20
1992 年 11 月第一次印刷	印张：24.5
印数：0001-1.000	字数：36.6 万字

ISBN:7-5062-1363-x／O·51

定价:18.50 元(WB9202／18)

譯　序

線性代數為一門廣為應用的學科，其應用範圍包括數學、物理學、生態學及管理學、經濟學等人文科學與自然科學之領域；此外，它亦漸成為專科學校以上各科系學生研修應用數學課程必備之一學科。

本書著者對線性代數由淺入深地作介紹；全書架構分為三大部分，第一部分介紹線性代數的基本概念，包括矩陣、行列式、向量、向量空間、線性轉換與特徵值及特徵向量，每一章節除了定義與定理性質外，更加入了許多例子作說明，使讀者更易了解與接受。

第二部分為線性代數之應用，對於某些重要的課題各自獨立地詳細討論，這些課題乃為線性代數中極為重要的應用。最後著者亦介紹了線性代數在電腦上的應用；事實上，電腦為各個學科領域中極為重要的工具，線性代數更須以電腦作為工具，因為實際上我們所面臨的問題皆不若理論上的簡單情況，而是煩雜的計算工作，若能以電腦來解決此類問題，則可事半功倍。此部分乃是本書的一大特色。

研習本書必須着重於概念的了解，這可從書上的許多例子得到幫助，此外書中所列的練習極其豐富，讀者不妨多花一點時間仔細地作過每個練習，這將可使讀者對於線性代數之課程奠下更深厚的基礎。

譯者謹識

75年5月

原　　序

線性代數如今已成爲大專各科系學生基礎的數學訓練課程之一部份，其原因至少有二：第一，其他的學科在數學的其他領域（例如，多變數微積分，微分方程式與機率理論）以及在物理學，生態學，化學，經濟學，心理學，社會學及所有的工程學領域上，很少像線性代數一樣廣泛地被應用。第二，這門學科能帶給學生進入命題性或公理性的數學之領域。

作者及出版社對於這本書的前兩版能被廣爲接受覺得十分欣慰。雖然在此版中，有許多更改之處，但我的目標仍與前兩版相同：寫出一本教科書以幫助教師授課並協助學生了解線性代數及其應用。爲了達成此目標，作者及出版社皆竭其精力並參考學生建議發行了具有以下特色的書。

本書特色

介　紹

在一個學期或一季的線性代數之課程中，教師與學生經常會遭遇到一些問題。重要的特徵值單元通常都草率的帶過而未能詳細的討論，學生因而很少了解到有意義的線性代數應用。他們也不會想去廣加運用，以及與電腦運用或是運用到數值的線性代數之新領域上。在這本書中，我們會試着去解決這些問題。

這本書概括地介紹線性代數入門及其重要的應用，此書可作爲大一或大二程度的課程。如果大部份的應用課題都涉及到，則這本書夠一年的教材使用。在包括其應用的線性代數課程中，這本書也可用來當參考教材。雖然在例子與習題中使用到基本微積分的計算，但微積分在本書中並非很重要。

本課程的重點在於計算與幾何方面的觀念，而使抽象的觀念減少到最低的程度。因此有時我們會省去一些艱澀定理的證明或者較不重要的定理，但却以例子來充分地說明有關性質。我們所列入書本中的證明都是很適合學生的學習水準。這本書把重心集中於線性代數的基本部份，因爲它並不打算大費周章地涉及到所有線性代數之課程。

內容介紹

第一部份包含基礎的線性代數內容。**第一章**，探討矩陣與其性質；**第二章**，爲行列式的簡介。**第三章**，向量與向量空間；**第四章**，在線性轉換和矩陣中，我們探討其幾何的觀念。首先我們討論平面上的向量然後是 n 維向量，接着再討論向量空間的概念。因此，R^n 被視爲 R^2，R^3（我們所熟知的二，三度空間）的衍生。**第五章**，在特徵值及特徵向量中，處理對角化對於對稱矩陣的問題。這章可不必先經由第四章而可直接研習。至此爲止，對於各種廣大領域的簡單應用已被包含在前五章；至於更廣泛地應用，在本書的第二部份討論。

第二部份包括第六章與第七章。**第六章**，爲線性規劃的介紹，此爲線性代數中極重要的應用。**第七章**，討論數個其他不同的線性代數之應用：包括：直線與平面，二次形式，圖形理論，競賽理論，最小平方法，線性經濟模型，馬可夫過程，費氏數列與微分方程式。從第一章到第七章在應用方面乃處理在數學，物理學，生態學，社會科學，管理，商業及經濟學上的問題。

第三部份中包含**第八章**的數值線性代數，我們簡略地以經常使用在線性代數上的數值方法求解線性聯立方程組以及用來找出矩陣的特徵值與特徵向量。這些方法常廣泛地與電腦運用，然而，在此所介紹的例子與習題都可在微電腦與隨身攜帶型計算器上作業。

第六，七，八章幾乎都是獨立的，唯一例外的是 7.4 節「競賽理論」，此節須先讀過第六章作爲啓蒙。前面五章包括基礎的線性代數之內容，此可在一學期或一季的課程裡從容地討論，且應有充裕的時間可做一些應用方面的探討。這可在前五章讀完後或在預先須知的內容皆探討之後再作練習。此外，有一些課題，特別是在第七，八章的，也可作爲獨立的研討個案。作者在教授以上的課題時，學生當時的反應皆相當熱列。因此教授在選擇內容及研究方法應用上都是有彈性的。

習　題

本書中的習題分爲兩類，第一類，「習題」包含一般性的練習。第二類，「理論性習題」則包含彌補書本中證明上不足的練習及擴充本書內容的練習。這些習題可提高此課程學習的水準，且讓有興趣學習此課程的同學得到更高的挑戰。奇數題的答案列在本書後面，而偶數題解答與理論性習題之解答的答案手冊在出版社那兒可免費地提供給教師。

每章結尾的內容

每章都包含有扼要的「重要觀念複習」，複習習題（單數題的答案列在本書後面）與每章測驗（每題的答案都列在本書的後面）。

線性代數在電腦上的應用

在此時代裡，我們不能忽視電腦在線性代數中的應用，因爲許多牽涉到線性代數計算的實際問題；在電腦上都可得到解決。這個關係在附錄中有簡略地介紹。首先，我們在本書中依各章節提出 6.3 個電腦專題，這些專題難度不一，學生們必須具有適當的程式設計技能來處理這些問題。大部份的專題皆可以微電腦與隨身攜帶型計算器來設計程式。接着我們討論使用套裝軟體來執行線性代數的技巧，雖然有些程式只須使用者懂得操作終端機。但有些軟體的使用仍須要具備一些程式設計的技巧。最後，我們歸納出APL的特色，APL 便是一種特別適合矩陣運算且易於學習的語言程式。我們亦對BASIC 語言作了一些說明，BASIC 是一種一般用途的電腦語言，它在微電腦上及分時系統上已廣爲應用。

目　　錄

I　線性代數導論

II 應用篇

III 數值線性代數

線性代數導論

1

線性方程式與矩陣

1·1 線性聯立方程組

在自然科學與社會科學的領域中，以及在工程與科學上，有很多問題處理着有關兩組變數的方程式。以下爲一個方程式的型式

$$y = ax.$$

此式表示變數 y 的值乃依著變數 x 和常數 a 而定，此式稱爲**線性方程式**(linear equation)。在此使用「線性」這個字眼，是因爲此方程式的圖形爲一直線。同理，下面方程式

$$b = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, \tag{1}$$

表示 b 的值須依著變數 x_1，x_2，⋯，x_n 及已知常數 a_1，a_2，⋯，a_n 之值而定，這也是**線性方程式**。在很多應用中我們已知 b 及常數 a_1，a_2，⋯，a_n，而必須求出 x_1，x_2，⋯，x_n 以滿足(1)。

線性方程式(1)的**解**(solution)爲一 n 個數的數列 s_1，s_2，⋯，s_n，它必須具有下面的性質，即：當 $x_1 = s_1$，$x_2 = s_2$，⋯，$x_n = s_n$，代入(1)時，能滿足此方程式。

由此可知，$x_1 = 2$，$x_2 = 3$ 和 $x_3 = -4$ 是下列方程式的一解

$$6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13.$$

因爲

$$6(2) - 3(3) + 4(-4) = -13.$$

但這並非是此方程式的唯一解，因爲 $x_1=3$ ， $x_2=1$ 和 $x_3=-7$ 可滿足上式方程式，因此亦是另外一個解。

通常一含有 n 個未知數的 m 條線性方程式之聯立方程組（或簡稱線性聯立方程組）爲含有 n 個未知數的 m 條方程式之集合。傳統上，線性聯立方程組可表示爲

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{aligned} \tag{2}$$

其中 i ， j 這兩個下標的功用如下：第一個下標 i 表示我們正處理第 i 個方程式；而第二個下標 j 則與第 j 個變數 x_j 有關。因此，第 i 個方程式是

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

在(2)中， a_{ij} 是已知常數。在 b_1 ， b_2 ，…， b_m 爲已知的情況下，我們欲求出 x_1，x_2 …， x_n 的值，使能滿足(2)中各個方程式。

線性聯立方程組(2)中的一解是一 n 個數的數列 s_1，s_2，…， s_n，它必須有下列的性質，即：當 $x_1=s_1$ ， $x_2=s_2$ ，…， $x_n=s_n$，代入(2)時，每個方程式皆能滿足。

爲了求出一線性聯立方程組的解，我們將使用一種稱爲消去法（method of elimination）的技巧。亦即，我們將一方程式乘以某倍數再加到另一個方程式，藉以消去某個未知數。大部份的讀者在高中代數課程中就已學過此方法了，讀者很可能亦曾經使用過此方法，但只侷限於當 $m=n$ 的線性聯立方程式；這也就是說，線性聯立方程組中，未知數有多少個，方程式就有多少個。在本課程中，我們將求解 $m=n$ ， $m<n$ 及 $m>n$ 的線性聯立方程組以擴展我們的觀念。事實上，有許多的應用是在 $m\neq n$ 的線性聯立方程組裡。如果我們處理 2 ， 3 或 4 個未知數時，我們經常將它們寫成 x ， y ， z 及 w 。在本節中，我們使用如高中所學的消去法，而在 1.4 節中，我們將以更有系統的方式來審視此方法。

例 1 考慮下面的線性聯立方程組

$$\begin{aligned} x - 3y &= -3 \\ 2x + y &= 8. \end{aligned} \tag{3}$$

爲了消去 x ，我們將第一個方程式乘上 2 ，然後以第二個方程式減之，可得

$$7y = 14,$$

上述並沒有 x 項。如此，我們便把未知數 x 消去了，y 的解即可求之如下：

$$y = 2,$$

代入(3)的第一式，得到

$$x = 3.$$

爲了印證 $x = 3$ ，$y = 2$ 是(3)的解，我們可證明 x 和 y 都滿足這些線性聯立方程組中的每個方程式。因此，$x = 3$ ，$y = 2$ 是(3)的唯一解。

例 2 考慮線性聯立方程組

$$\begin{aligned} x - 3y &= -7 \\ 2x - 6y &= 7. \end{aligned} \tag{4}$$

再次地，我們決定消去 x 。將第一式乘上 2 ，然後以第二式減之，得到

$$0 = 21,$$

上式爲無意義。這表示(4)無解。由此，我們可得到如下的結論：在(4)中，第二式的左方是第一式左方的二倍，但第二式的右方並不是第一式右方的二倍。

例 3

考慮線性聯立方程組

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 2x - 3y + 2z &= 14 \\ 3x + y - z &= -2. \end{aligned} \tag{5}$$

爲了消去 x ，我們將第一式乘上 2 ，然後以第二式減之；以及將第一式乘上 3 ，然後以第三式減之，可得

$$\begin{aligned} -7y - 4z &= 2 \\ -5y - 10z &= -20. \end{aligned} \tag{6}$$

上式爲含有未知數 y 和 z 之聯立方程組。我們將(6)的第二式乘上 $\left(-\frac{1}{5}\right)$，得

$$
\begin{aligned}
-7y - 4z &= 2 \\
y + 2z &= 4,
\end{aligned}
$$

接著將上、下二式交換如下：

$$
\begin{aligned}
y + 2z &= 4 \\
-7y - 4z &= 2.
\end{aligned} \tag{7}
$$

現在，我們將(7)的第一式乘上 7 ，然後以第二式加之，如此便得以消去 y ，得到

$$10z = 30,$$

或

$$z = 3. \tag{8}$$

將 z 值代入(7)的第一式，得到 $y = -2$ ； 再將 y 與 z 值代入(5)的第一式，可得到 $x = 1$ 。爲了印證 $x = 1$ ， $y = -2$ ， $z = 3$ 是(5)的一解，我們可求證出 x ， y ， z 的值都滿足(5)的各方程式。於是， $x = 1$ ， $y = -2$ ， $z = 3$ 是聯立方程組(5)的一解。除此外，我們可進一步地觀察出，上面的消去過程可導出以下的線性聯立方程組：

$$
\begin{aligned}
x + 2y + 3z &= 6 \\
y + 2z &= 4 \\
z &= 3.
\end{aligned} \tag{9}
$$

上式是用(5)，(7)及(8)的第一式所得之結果。這個過程使我們得知聯立方程組(5)及(9)有完全相同的解，但(9)有一優點，即它很容易求解，且可一連得出 x ， y ， z 之值。

例 4

考慮線性聯立方程組

$$
\begin{aligned}
x + 2y - 3z &= -4 \\
2x + y - 3z &= 4.
\end{aligned} \tag{10}
$$

爲了消去 x ，我們將第一式乘上 2 ，然後以第二式減之，可得

$$-3y + 3z = 12. \tag{11}$$

現在必須求(11)之解，其中一解爲

$$y = z - 4,$$

在此， z 可爲任意實數。然後將之代入(10)的第一式，

$$\begin{aligned} x &= -4 - 2y + 3z \\ &= -4 - 2(z-4) + 3z \\ &= z + 4. \end{aligned}$$

於是，線性聯立方程組(10)的一解為

$$\begin{aligned} x &= z + 4 \\ y &= z - 4 \\ z &= \text{任意實數} \end{aligned}$$

這表示線性聯立方程組(10)有無窮多解。每次只要給 z 一個值，就可得到另外的一解。例如，若 $z = 1$，則

$$x = 5, \quad y = -3, \quad \text{和} \quad z = 1$$

為一解，然而若 $z = -2$，則

$$x = 2, \quad y = -6, \quad \text{和} \quad z = -2$$

為另外一解。

例 5

考慮線性聯立方程組

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ 2x - 2y &= -4 \\ 3x + 5y &= 26. \end{aligned} \tag{12}$$

為了消去 x，將第一式乘上 2，然後以第二式減之，可得 $-6y = -24$，或

$$y = 4.$$

再將第一式乘上 3，然後以第三式減之，可得 $-y = -4$，或

$$y = 4.$$

於是可導出下列聯立方程組

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ y &= 4 \\ y &= 4, \end{aligned} \tag{13}$$

這和(12)的解相同。把 $y = 4$ 代入(13)的第一式，得到 $x = 2$，於是 $x = 2$，$y = 4$ 是(12)之一解。

例 6

考慮線性聯立方程組

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ 2x - 2y &= -4 \\ 3x + 5y &= 20. \end{aligned} \tag{14}$$

為了消去 x，將第一式乘上 2，然後以第二式減之，得到 $-6y=-24$，或

$$y = 4.$$

再將第一式乘上 3，然後以第三式減之，可得 $-y=-10$，或

$$y = 10.$$

於是可導出下列聯立方程組

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ y &= 4 \\ y &= 10, \end{aligned} \tag{15}$$

這和(14)的解相同。因為(15)沒有解，所以(14)亦沒有解。

以上這些例子告訴我們，一線性聯立方程組可有一解，無解或無限多解。

我們可發現，消去法包括下列步驟的重複使用：

1. 兩方程式交換。
2. 用以非 0 的常數乘上一方程式。
3. 將此方程式加到另一方程式。

從習題 T. 1 到 T. 3 中，不難發現，消去法使另一線性聯立方程組與原先的線性聯立方程組有相同的解，而且新的線性聯立方程組可很輕易地求得其解。

現在讓我們考慮一包含未知數 x 和 y 的兩方程式：

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y &= c_1 \\ b_1x + b_2y &= c_2. \end{aligned} \tag{16}$$

這兩方程式的圖形皆是一直線，我們在此分別用 l_1 與 l_2 來表示。如果 $x=s_1$，$y=s_2$ 是線性聯立方程組(16)的一解，則點 (s_1, s_2) 落在 l_1 與 l_2 上。反之，如果點 (s_1, s_2) 落在 l_1 與 l_2 上，則 $x=s_1$，$y=s_2$ 便是線性聯立方程組(16)之一解。由此，我們可導出如圖 1.1 所示的三種幾何上的可能情形如下：