不分明
拓扑译文集

FUZZY

汉中师范学院数学系

编 印 说 明

一九六五年，美国控制论专家 A•Zadeh 在《信息与控制》杂志(美)上发表了《Fuzzy Sets》，从此诞生了一门新兴的数学——不分明数学（或模糊数学）。不久又有人，将不分明集的思想，引进了拓扑空间理论。十多年来，不分明数学，特别是不分明拓扑学发展很快，受到了各国数学家的重视。近年来，我国的不分明拓扑研究蓬勃开展，取得好结果，四川大学蒲保明、刘应明同志的这方面研究成果在《1981年中国百科年鉴》上已列为我国为数不多的几项重大数学成果予以介绍。

本文集，搜集了一九六五年到一九八〇年期间，国外关于不分明拓扑方面的部分文献。编译成册，铅印交流，既是为了自己对不分明拓扑学开展学习和研究，同时也是为了向数学界的同行们，互相学习，共同提高。本文集的翻译工作，是由七个单位十二位同志协作完成的。他们是：赵万忠（河北化工学院数学教研室）胡诚明（内蒙古大学数学系）李崇靖、刘畅畅（宁夏大学数学系）孟杰、董根银、张露娜（西北大学数学系）张肇炽（西北工业大学数学教研室）、滙肇基（西安电力学校数学组）、房正祥、蔡秉衡、蒲义书（汉中师范学院数学系）。

本文集共载二十三篇文章，新译十八篇，其中五篇是为了读者阅读方便而转载的。

为了使译名统一和提高译文质量，去年三月份，由各协作单位派一人到我院酌商，对译文作了进一步审订。但由于不分明拓扑是一门新学科，加之参加翻译的同志，多数是不分明数学的初学者，特别是由于我们自己的水平不高，错误一定很多，敬请读者批评指正。

特别值得提出的是，四川大学蒲保明教授、刘应明付教授为本文集写了序言，并允许我们转载了他们发表在《四川大学学报》及《数学汇刊》上的《不分明拓扑学 I—不分明点的邻近构造与Moore—Smith式收敛》《不分明拓扑学 Ⅱ：乘积空间与商空间》《不分明拓扑学的进展 I》等文。这不仅对学习本文集的文献有很大帮助、而且对学习和

研究不分明拓扑学也有重要的指导意义。我们对他们的支持表示衷心的感谢！

本文集能够铅印，主要由于我院教学处领导的关心、重视和支持。院教学科和教材设备课的领导，也对文集的铅印给了大力的支持。当然，文集的铅印与各协作单位领导的大力支持也是分不开的。在此，我们一并表示感谢！

我们对王戌堂、王国俊、汪培庄、袁萌、耿春仁等同志的关心和支持也表示感谢。

需要提出的是，我系蒲义书同志在本文集的组稿和联络等方面做了大量的工作。

汉中师范学院数学系

一九八二年四月一日

前　言

不分明集论（Fuzzy set）是美国控制论专家，加州贝克利大学名教授查德（Zadeh）在1965年创立的。从实践角度看，这个理论正是吸取人脑对于事物的识别与判决十分有效与灵活的优点，建立了一套数学方法。现在这个理论正在解决模式识别等实际问题中取得很大进展。另一方面，从纯理论角度看，不分明集的提出进一步丰富了经典集合的概念。如所周知，集合的概念是近代数学的最基础概念。它的任何改变都会使数学的各分支受到深刻的影响。也就是说，作为数学结构来说，存在着数学的分支的不分明化的趋势。总的来说，这当然是一个漫长的过程。在这方面一般拓扑学算是成熟较快的一个分支。

自从1968年C、L、Chang发表关于不分明拓扑空间第一篇论文起算，到现在不过十来个年头，但这方面论文已逾百篇。有名杂志如《法国科学院通报》（C·R. Acad Sci），《拓扑学及其应用》（Top. & its Appl.），《数学分析及其应用》（JMAA），《不分明集与系统》（Fuzzy sets and systems）等刊物上都常有这方面论文发表，在最早期的工作中，一个中心问题是合适的收敛理论的建立问题。这个问题的本质困难在于不分明拓扑空间中邻近构造的特点与传统的邻域系给出的有很大的不同。在引入所谓“重域系”之后，一个完整的Moore—Smith收敛得以建立。与之同时，外刊上以Hutton等人为代表，沿着“无点化”（Poihtless）方向前进，在正规性，不分明单位区间，一致空间与度量化等方面作了较深刻的工作。之后，在商空间与积空间，紧性等方面都有好的工作。最近在嵌入定理与紧化上也有较系统的工作。所以无论从论文的数量与质量上，还是在研究的课题的广度与深度上，不分明拓扑空间理论都可以说已经历了襁褓时期到了比较成熟的阶段。有的人说它已到了“登堂入室”的地步。

不分明拓扑空间通常是以一般拓扑空间为特例的。大家知道，理论的框架扩大了，一方面固然可以包含更多的特款；但另一方面，则可能失去一些重要性质，从而相对地显得内容贫乏。这里有一个框架

的广泛性恰到好处的问题。现在不分明拓扑空间的理论框架的情形如何呢？经过中外数学家的努力，研究工作的实践已肯定地回答了这个问题。就以美国数学家P、J. Kelley的名著《一般拓扑学》来作比较，这部著作的前六章的基本结果都已被拓广到不分明拓扑空间中来。而且在这个更大框架中，原来概念与结论的实质与局限都可以看得更清楚。关于传统的邻域系思想的局限性分析及其一种替代——重域系的引入就是一例。同时，由于最一般的L—不分明拓扑理论中是以格作为真值集的，其讨论常常涉及到代数结构，主要是格的研究。这种理论中一些代数性质的探讨从代数学上看似乎具有独立的兴趣。

数学理论的生命力除了能解决学科自身内部矛盾之外，还很重要地表现为与具有实际背景的重要问题的关联程度。大家知道，查德在其奠基性论文《不分明集》(Inform,Contr. 8(1965), 338—353)中花了近半的篇幅讨论不分明凸集的性质。因为正如该文所指出，这方面研究与模式识别及优化问题关系密切。查德在该文中关于不分明凸集的两个主要结论都有些需待完善之处。其不足正是由于缺少适当拓扑条件。这种现象在不分明集理论初期几乎是不可避免的、现在用不分明拓扑空间理论的成果都作了完善。(请分别参看M.D.Weiss, J、Math、Anal, Appl. 50(1975), 142. 与刘应明，不分明凸集的若干性质，数学物理学报，1(1981), NO .2.)也就是说，不分明拓扑空间的研究并非纯粹地是寻找"更广泛框架"，追求"更一般结果"这种类型的工作，它有丰富的实践背景。

不分明拓扑空间理论虽已"登堂入室"，将一般拓扑空间理论中诸如点的邻近构造，收敛理论，积空间与商空间的理论，度量化与嵌入定理以及一致空间理论作了成功的拓广，但它毕竟是一个新兴分支，还有许许多多的待开垦的处女地。现在在汉中师院数学系的大力支持下，蒲义书同志联系了七个院校的十几位同志，完成了这本《不分明拓扑学译文集》的翻译工作，把1980年以前外刊中有关不分明拓扑学的重要文献译成中文，汇编成册。这无疑会推动更多同志从事这个领域的学习与研究，是一件很有意义的事。在不分明拓扑学这个领域中，我国学者已作了重要的工作。我们相信，在更多有志于这个领域研究的同志参加下，同心协力，我们可以作出更出色的工作。

蒲保明 刘应明 1981.7.8写于川大

目　录

不分明拓扑学I—不分明点的邻近构造与Moore-Smith式收敛*

蒲保明　刘应明

近年来发展起来的不分明集（fuzzy set）[1]概念使得有可能用数学处理广泛存在的不分明现象。关于不分明拓扑学的工作也已不少[2]—[8]，我校周浩旋同志也作了有关于不分明拓扑与分明拓扑的关系方面有意思的工作(未发表)，但是有两个基本问题还有待解决。一、关于不分明点概念及其邻近构造。在[8]中所给的不分明点的定义既不能以正常点为特款，而且只是循着一般拓扑学（以下称作分明拓扑学）关于邻域系的思路进行研究，不能反映出不分明拓扑学中邻近构造的新特性，所导出的性质较呈病态，正如该作者自己所指出的那样，与分明拓扑学中直观性分歧很大。本文所给不分明点定义是以分明点（正常点）为特款的；对不分明点邻近构造，除了已有的邻域系以及点与集合的一种关系"属于"需要沿用外，还要引入更为重要的称之为重域系的结构以及点与集合之间一种新的关系"重于"；在分明拓扑学中，邻域系与重域系，关于"属于"与关系"重于"皆重而为一。二、关于收敛问题。已往工作中，只涉及到不分明集合的序列的收敛且由于局限于用传统的邻域系来刻划"邻近"概念，其结果不令人满意。正如[6]所指出，不分明拓扑学需要新的收敛与聚点的概念；至于一般的Moore-Smith式的网（net）收敛（亦称半序收敛）则无从着手。这两个问题由于目前的处理，在分明拓扑学代表性著作[10]中涉及点的邻近构造与收敛问题的第I、II章的定理，除一、二条不甚紧要者外，在不分明拓扑学中都得到推广，也就是说，这两个基本问题解决程度与分明拓扑学中相应问题的解决程度是差不多的。在本文所给的框架下，不分明拓扑还有许多性质可以研究，这将在以后一些工作中给出。

1．预　　备

因为不分明数学中不少概念与表述尚未定型，特把散见于论文[2]—[9]中有关的概念作一简要的回顾，本文中X总表示一个非空（分明）集。

定义 1·1　X至单位区间$[0,1]$的函数A称作X上一个不分明集，对于$x\in X$，$A(x)$称作A在点x的从属度(grade of membership)，X称作不分明集A的承载集(carrier)。X的子集$\{x\in X\mid A(x)>0\}$称作A的承集，记作Supp A或A_0。若A仅取值0或1，A又称作X上分明集，分明集A与作为X的子集的Supp A以后一般是不加区别的；特别地，在X上恒取值1的（不）分明集就用X来表示。此外，在X上恒取零值的（不）分明集除了用ϕ外也常用Φ表示。

*本文于1976年6月12日收到。

定义 1·2 若对每个 $x\in X$，有 $A(x)=B(x)$，则称不分明集 A 与 B 相等，记作 $A=B$。若对每个 $x\in X$，有 $A(x)\leqslant B(x)$，则称 A 包含于 B，记作 $A\subset B$。

定义 1·3 设 I 为指标集，$\mathscr{A}=\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$ 为 X 上不分明集族，则并 $\bigcup\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$（又可记作 $\bigcup\mathscr{A}$）以及交 $\bigcap\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$（又可记作 $\bigcap\mathscr{A}$）亦为 X 上不分明集，分别由下式定义：

$$(\bigcup\mathscr{A})(x)=\sup\{A_\alpha(x)\mid\alpha\in I\}\qquad x\in X,$$

$$(\bigcap\mathscr{A})(x)=\inf\{A_\alpha(x)\mid\alpha\in I\}\qquad x\in X,$$

定义 1·4 A 的补集，记作 A'，定义为 $A'(x)=1-A(x)$，$x\in X$。

由实数域的上下确界性质，易证下列 De Morgan 定律成立：

$$(\bigcup\{A_\alpha\mid\alpha\in I\})'=\bigcap\{A_\alpha'\mid\alpha\in I\}$$

定义 1·5 X 上不分明集族 $\mathscr{T}$ 称作 X 上一个不分明拓扑，若下列三条件成立：(1) Φ，$X\in\mathscr{T}$。(2) 若 $A,B\in\mathscr{T}$，则 $A\cap B\in\mathscr{T}$。(3) 若每个 $A_\alpha\in\mathscr{T}(\alpha\in I)$，则 $\bigcup\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}\in\mathscr{T}$。此时，称偶对（$X$，$\mathscr{T}$）为不分明拓扑空间，$\mathscr{T}$ 中集称作（拓扑 $\mathscr{T}$ 下）开集，开集的补集称作闭集。

X 上不分明拓扑 $\mathscr{T}_1$ 与 $\mathscr{T}_2$ 作为集合来说，若有包含关系 $\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_2$，则说拓扑 $\mathscr{T}_2$ 较细，拓扑 $\mathscr{T}_1$ 较粗。

定义 1·6 设 $\mathscr{T}$ 为 X 上不分明拓扑。$\mathscr{T}$ 的子族 $\mathscr{B}$ 称作 $\mathscr{T}$ 的一个基，若 $\mathscr{T}$ 中每个不分明集可以表作 $\mathscr{B}$ 中若干集的并；$\mathscr{T}$ 的子族 $\mathscr{S}$ 称作 T 的一个子基，若 $\mathscr{S}$ 中有限个集的交的全体形成 $\mathscr{T}$ 的基；当 $\mathscr{T}$ 有可数基时，称（X，$\mathscr{T}$）为满足第二可数公理或说是 C_{11} 空间。

定义 1·7 设 A 与诸 A_α（$\alpha\in I$）是 X 上不分明集，若 $\bigcup\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}\supset A$，则称集族 $\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$ 为 A 的一个复盖；若有 I 的子集 I_1，使得 $\bigcup\{A_\alpha\mid\alpha\in I_1\}\supset A$，则称 $\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$ 为子复盖。

本文中（X，$\mathscr{T}$）总表示一个不分明拓扑空间。不分明拓扑、不分明集等等一般常径称作拓扑、集等等，但是分明拓扑学中相应概念却常常冠以形容词"分明"以示强调。下文中诸定义与结论都是以习知的分明拓扑学中相应定义与结论为特款的，关于此点一般不再说明。

2．不分明点概念及其邻近构造

定义 2·1 *仅在点 $x\in X$ 处取值 $\lambda>0$，在其余点取零值的不分明集称作 X 上的不分明点，常记作 x_λ，点 x 称作它的承点。

定义 2·2 当 $0<\lambda\leqslant A(x)$，称点 x_λ 属于 A，记作 $x_\lambda\in A$。显然 A 可表作所有属于 A 的点的并。

定义 2·3 若（$A\cap B$）$(x)\neq 0$，称 A 与 B 相交于点 x，或者简单地说：A 与 B 相交。

定义 2·4 在（X，$\mathscr{T}$）中，集 A 称作点 x_λ 的邻域，若有开集 $B\in\mathscr{T}$，使 $x_\lambda\in B\subset A$；x_λ 的所有邻域组成它的邻域系；本身是开集的邻域称作开邻域。

对偶地，我们引入"重于"等概念

定义 2·2′ 当 $\lambda>A'(x)$，即 $\lambda+A(x)>1$，称点 x_λ 重于集 A。

---

*这里所给不分明点概念亦即［9］§4 中所谓的 Singelton，不过对其十分重要的邻近构造的探讨［9］是不涉及的。

定义 2·3′ 当 $A(x)>B(x)$，即 $A(x)+B(x)>1$，称 A 与 B 相重于点 x，或者简单地说：A 与 B 相重。显然，当 A 与 B 相重于点 x 时，$A(x)$ 与 $B(x)$ 均不为零，从而 A 与 B 必相交于点 x。

定义 2·4′ 在（X，$\mathscr{T}$）中，集 A 称作点 x_λ 的重域（或 Q 一邻域），若有开集 $B\in\mathscr{T}$ 使 $B\subset A$ 且 x_λ 重于 B。x_λ 所有重域组成它的重域系，本身是开集的重域称作开重域。

注解：不分明点的重域一般不包含该点，关于一点的"邻近构造"却不包含该点的邻域空间远在1916年就由 Fréchet 研究了（参看 M. Fréchet，Les Espases abstraits，Paris，1928，页 172 的注）并形成了现在称之为 Fréchet（V）空间的理论（参看 W. Sierpinski，General topology，Toronto，1952，章 I）。不过，在这种理论中，要求集 A 与其补集 A' 不相交，而这个事实在不分明拓扑学中显然一般不再保持，所以目下关于重域结构的研究并不同于（V）空间理论。**

代替分明拓扑学中 A 与 A' 不相交这一事实的是 A 与 A' 不相重，更一般些有

命题 2·1 集 $A\subset B$ 当且仅当 A 与 B' 不相重；特别地，$x_\lambda\in A$ 当且仅当 x_λ 不重于 A'。

这从 $A(x)\leqslant B(x)$ 当且仅当 $A(x)+B'(x)=A(x)+1-B(x)\leqslant 1$ 即明。

命题 2·2 不分明点 e 在（X，$\mathscr{T}$）中重域系记作 $\mathscr{U}_e$，则有

（1） 若 $U\in\mathscr{U}_e$，则 e 重于 U。

（2） 若 U，$V\in\mathscr{U}_e$，$U\cap V\in\mathscr{U}_e$。

（3） 若 $U\in\mathscr{U}_e$，$U\subset V$，则 $V\in\mathscr{U}_e$。

（4） 若 $U\in\mathscr{U}_e$，则有 $V\in\mathscr{U}_e$ 使 $V\subset U$ 且对每个重于（相应地属于）V 的不分明点 d，有 $V\in\mathscr{U}_d$。

反之，对 X 上不分明点 e，$\mathscr{U}_e$ 为一不分明集族且满足上述条件（1）—（3），那么下列集 U 组成 X 上一个不分明拓扑 $\mathscr{T}$：当任一不分明点 e 重于 U 时，必有 $U\in\mathscr{U}_e$；此外，若 $\mathscr{U}_e$ 还满足条件（4），则 $\mathscr{U}_e$ 就是 e 在拓扑 $\mathscr{T}$ 下的重域系（相应地邻域系）。

证明是直接的，参阅［10］问题 1.B.

命题 2·3 设 $\mathscr{A}=\{A_\alpha\}$ 为上不分明集族，则不分明点 e 重于 $\bigcup\mathscr{A}$ 当且仅当有某 $A_\alpha\in\mathscr{A}$ 使 e 重于 A_α。

当 e 重于集 A_α 时，自然亦重于 $\bigcup\mathscr{A}$. 反之，由上确界性质及重于定义，逆命题也易给出。

命题 2·4 在（X，$\mathscr{T}$）中，开集族 $\mathscr{B}$ 是拓扑基的充要条件是对 $\mathscr{T}$ 中任一开集 A 及任一重于 A 的不分明点 e，有 $B\in\mathscr{B}$ 使 e 重于 B 且 $B\subset A$.

证：必要性由拓扑基定义及命题 2.3 的必要性部分即得。今证充分性。若 $\mathscr{B}$ 不是拓扑基，则有 $A\in\mathscr{T}$ 使 $G=\bigcup\{B\in\mathscr{B}\mid B\subset A\}\neq A$，即有 x 使 $G(x)<A(x)$，记 $\lambda=1-G(x)>0$，得不分明点 $e=x_\lambda$. 由 $A(x)+\lambda>G(x)+\lambda=1$，知 e 重于 A. 但 $\mathscr{B}$ 中任包含于 A 的集 B 皆包含于 G，从而 $B(x)+\lambda\leqslant G(x)+\lambda=1$，即 e 不重于 B，矛盾于题设。

**在一类特殊的不分明拓扑空间中，重域与邻域是有一种对偶的关系，请参看［13］，另对开重域的补集称作相应点远域，有时论证中邻使用域有方便之处［14］。

3. 局部基，一个反例

定义 3·1 在（X，$\mathscr{T}$）中，不分明点 e 的若干重域（相应地邻域）形成一集族 $\mathscr{B}$，若对 e 的每个重域（相应地邻域）A，有 $B\in\mathscr{B}$ 使 $B\subset A$，则称 $\mathscr{B}$ 为 e 的一个重域基（相应地邻域基）。若（X，$\mathscr{T}$）中每个不分明点处都有可数的重域基（相应地邻域基），则空间（X，$\mathscr{T}$）称作满足 Q—第一可数公理（相应地满足第一可数公理），或称之为 $Q-C_{\text{I}}$ 空间（相应地 C_{I} 空间）。

命题 3·1 若（X，$\mathscr{T}$）为 C_{I} 空间，则工必是 $Q-C_{\text{I}}$ 空间。

证：任取不分明点 $e=x$，在（$1-\lambda$，1］中取收敛于 $1-\lambda$ 的序列 μ_n。记 $x_{\mu_n}=e_n$。对每个 n，取 e_n 的可数开邻域基 $\mathscr{B}_n$（注意：显然允许假定 e_n 的邻域基是可数开集族）。$\mathscr{B}_n$ 中每个集 B 满足 $B(x)\geqslant\mu_n>1-\lambda$，亦即 B 即为 e 的重域，于是诸 $\mathscr{B}_n$ 中所有的集组成 e 的一个可数开重域族，记作 $\mathscr{B}$。任取 e 的开重域 A，A、x）$>1-\lambda$。由于 $\mu_n\to1-\lambda$，有 m 使 $A(x)\geqslant\mu_m>1-\lambda$，从而 $e_m\in A$，即 A 为 e_m 的开邻域，于是有 $\mathscr{B}_m$（亦是 $\mathscr{B}$）中集 $B\subset A$，$B(x)\geqslant\mu_m>1-\lambda$，这说明 $\mathscr{B}$ 为 e 的可数重域基。

命题 3·2 若（X，$\mathscr{T}$）为 C_{II} 空间，则也必是 $Q-C_{\text{I}}$ 空间，

证：设 $\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{T}$ 的可数基，对任一点 e，$\mathscr{B}$ 中所有与 e 相重的（可数个）开集族记作 $\widetilde{\mathscr{B}}$，由命题2.3，易证 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 形成 e 的可数重域基。

命题 3·1 的逆一般不真，下面构造一 C_{II} 空间，从而是 $Q-C_{\text{I}}$ 的，但它不是 C_{I} 的。

定义 3·2 [6][5] 设（X，$\mathscr{U}$）为分明拓扑空间，易知所有在拓扑 $\mathscr{U}$ 下取值于［0，1］的下半连续函数全体 $F(\mathscr{U})$ 形成一个 X 上不分明拓扑，空间（X，$F(\mathscr{U})$）称作由（X，$\mathscr{U}$）诱出的不分明拓扑空间。

引理 3·1. 设（X，$\mathscr{U}$）为分明拓扑中完全正则空间，$h\in F(\mathscr{U})$，则存在拓扑 $\mathscr{U}$ 下若干连续函数形成的集族 $\mathscr{T}$，使 $h=\sup\{f\mid f\in\mathscr{T}\}$，换句话，$X$ 上拓扑 $\mathscr{U}$ 下的连续函数族（限取值于［0，1］者）形成 $F(\mathscr{U})$ 的一个不分明拓扑基。

证明可参照［11］章九节1的命题5的证明。

在本节内，以下设（X，$\mathscr{U}$）为实轴的子空间［0，1］。记（$-\infty$，1］中有理数全体为 T。对每个正整数 n，将 X 进行 2^n 等分，其 2^n+1 个分点依次记作 x_n^k（$k=0,1,\cdots,2_n$）。对固定的 n，在每点 x_n^k 上取值 $f_k\in T$，在每个等分区间 $\Delta_k=[x_n^k, x_n^{k+1}]$ 上为线性的函数 f 全体显然形成一可数的连续函数族 $\widetilde{\mathscr{B}}_n$。对 $f\in\widetilde{\mathscr{B}}_n$，由 $f^+(x)=\max\{f(x),0\}$ 定义一函数 f^+，它显然连续且取值于［0,1］。记 $\mathscr{B}_n=\{f^+\mid f\in\widetilde{\mathscr{B}}_n\}$，$\mathscr{B}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$。对可数连续函数族 $\mathscr{B}$，我们有

引理 3·2 设 g 为取值于［0，1］的 X 上连续函数，又设 $\varepsilon>0$，则有 $f^+\in\mathscr{B}$ 使

$$g(x)-\varepsilon<f^+(x)\leqslant g(x)\qquad x\in X,$$

从而 g 可表成 $\mathscr{B}$ 中可数个函数的上确界。

证：对 $\varepsilon>0$，由 g 在 X 上一致连续性，有整数 n，使 X 的 2^n 等分的每个等分区间上，

g 的最大值与最小值的差（即振幅）小于 $\varepsilon/8$. 对每个分点 x_n^k，取有理数 $f_k \in T$ 使 $g(x_n^k) - \varepsilon/8 > f_k > g(x_n^k) - \varepsilon/4$. 记在 x_n^k 上取值 f_k，在诸等分区间上为线性的函数为 f，那么 f_+ 即所求，事实上，任取等分区间 $\Delta_k = [x_n^k, x_n^{k+1}]$，不失一般性可设 $f_k \geqslant f_{k+1}$，那么 f 在 Δ_k 上以 f_k 为最大值，注意到 g 在 Δ_k 上振幅小于 $\varepsilon/8$，对每个 $x \in \Delta_k$，有 $g(x) > g(x_n^k) - \varepsilon/8 > f_k \geqslant f(x)$，从而对 $x \in X$，有 $g(x) > f(x)$，另一方面. f 在 Δ_k 上振幅为 $f_k - f_{k+1} < \left(g(x_n^k) - \frac{\varepsilon}{8}\right) - \left(g(x_n^{N+1}) - \frac{\varepsilon}{4}\right) = g(x_n^k) - g(x_n^{K+1}) + \frac{\varepsilon}{8} < \frac{\varepsilon}{4}$，于是对 $x \in \Delta_k$，有 $|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x) - f_k| + |f_k - g(x_n^k)| + |g(x_n^k) - g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} < \varepsilon$，从而对 $x \in X$，有 $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$，亦即 $g(x) - \varepsilon < f(x) < g(x)$. 又因为 $g(x) \geqslant 0$，易见有 $g(x) - \varepsilon < f^+(x) \leqslant g(x)$，即 f^+ 为所求。至于引理后半，只要取 $\varepsilon = \frac{1}{n}$ 记相应的 f^+ 为 $f_n^+ \in \mathscr{B}$，易见 g 为诸 f_n^+ 的上确界。

定理 3·1 设（X，$\mathscr{U}$）为实轴的子空间 $[0, 1]$，$\mathscr{T} = F(\mathscr{U})$ 为（X $\mathscr{U}$）诱出的不分明拓扑，则（X，$F(\mathscr{U})$）是 C_{II} 空间，但却不是 C_I 的。

证：由引理 3·1 与 3·2，引理 3·2 中所给的可数集族 $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ 显然形成 $\mathscr{T}$ 的可数基，即（X，$\mathscr{T}$）为 C_{II} 的。今任取 X 中一分明点 x，不失一般性可设 x 为 $[0,1]$ 中零点，考查以 x 为承点且取值为 1 的（不）分明点 e。若可数个开集 $B_n \in \mathscr{T}$ ($n = 1, 2, \cdots$) 形成 e 的邻域基，那么由 $e \in B_n$ 有 $B_n(x) = 1$. 又由下半连续性，对 $\varepsilon = \frac{1}{n}$，有 x 在拓扑 $\mathscr{U}$ 下的开邻域 G_n 使对 $y \in G_n$，恒有 $B_n(y) > 1 - \varepsilon = 1 - \frac{1}{n}$. 于是对正整数 n，可归纳地取出 X 分明点 $y_n > 0$，使 $y_n \in G_n$ 且 $y_n < \frac{y_{n-1}}{2}$（约定 $y_0 = 2$）. 今构造 X 上不分明集 B 如下：B 在 y_n 上取值 $1 - \frac{1}{n}$，在区间 $[y_n, y_{n-1}]$ 上为线性，在大于 y_1 处取零值（$= B(y_1)$），此外 $B(x) = 1$. 易见 B 是连续的且取值于 $[0, 1]$，从而 $B \in \mathscr{T}$. 又因 $B(x) = 1$，B 为 e 的开邻域，但 $B_n(y_n) > 1 - \frac{1}{n} = B(y_n)$，故任一 B_n 不包含于 B. 这与 $\{B_n\}$ 为 e 的邻域基矛盾，所以（X，$\mathscr{T}$）不是 C_I 空间。*

4. 闭包与 Kuratowski 的十四集定理

定义 4·1 （X，$\mathscr{T}$）中所有被包含于集 A 的开集的并称作 A 的内集，记作 A° 或 $\mathrm{Int}_{\mathscr{T}} A$. 显然 A° 是含于 A 中最大开集且 $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

* 其实这个不分明拓扑空间（X，$\mathscr{T}$）在每个不分明点处都不是 C_1 的。关于这个事实的证明可相仿进行。

定义 4·1′ $(X, \mathscr{T})$中所有含集A的闭集的交称作A的闭包，记作$\overline{A}$或$\mathrm{cl}\mathscr{T}\ A$。显然$\overline{A}$是包含$A$的最小闭集且$\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$。

定理 4·1 不分明点e属于A°的充要条件是e有一邻域包含于A。

证明是直接的，省略。

定理 4·1′ 不分明点$e=x_\lambda$属于$\overline{A}$的充要条件是e的每个重域与A相重。

证：x_λ属于$\overline{A}$的充要条件为对每个闭集$F\supset A$，恒有$x_\lambda\in F$，即$F(x)\geqslant\lambda$。取补集，这个充要条件可表述为：对每个开集$B\subset A'$，恒有$B(x)\leqslant 1-\lambda$，或者说，对满足条件$B(x)>1-\lambda$的开集B，B不含于A'。由命题2·1，B不含于A'等价于B与$(A')'=A$相重。这样我们证明了：$x_\lambda\in\overline{A}$的充要条件为x_λ的每个开重域B与A总是相重，这与题给的充要条件显然是等价的。

定义 4·2 若点e的每个重域与集A恒相重，称e为A的一个附着点。

系 $\overline{A}$是A的所有附着点的并。

定理 4·2 $A^{\circ}=(\overline{(A')})'$，$\overline{A}=((A')^{\circ})'$，$(\overline{A})'=(A')^{\circ}$，$\overline{(A')}=(A^{\circ})'$。

证：所有包含于A的开集全体记作$\mathscr{A}=\{A_\alpha\}$，那么$A^{\circ}=\bigcup\mathscr{A}$。显然集族$\mathscr{A}'=\{A_\alpha'\}$为所有包含$A'$的闭集族，那么$\overline{(A')}=\bigcap(\mathscr{A}')$。由De Morgan定律，有$(\overline{(A')})'=(\bigcap(\mathscr{A}'))'=\bigcup\{(A_\alpha')'\}=\bigcup\mathscr{A}=A^{\circ}$。第一式已得，其他各式可类似推出或由第一式推出。

定理 4·3 （十四集定理）。在$(X, \mathscr{T})$中，从一个集A出发，用取内集，闭包及补集这三种运算，可能得到的不分明至多为十四个，而且确有（不）分明拓扑空间，其中（不）分明集A，经过上述三种运算给出十四个两两不同的（不）分明集。

证：定理后半在分明拓扑学中是熟知的，而前半也可以如分明拓扑学中一样加以证明，因为原来证明中只用到$(A')'=A$，$\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$，$(A^{\circ})^{\circ}=A^{\circ}$以紧定理4·2的诸关系式（参看[10]页45的注及问题1.E.）

定义 4·3 对X上每个不分明集A，对应不分明集$f(A)$，这个对应f称作X上不分明闭包算子，若f满足下列Kuratowski四条公理：(1) $f(\Phi)=\Phi$，(2) $A\subset f(A)$，(3) $f(f(A))=f(A)$，(4) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$。

易见在不分明拓扑空间中，有$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$（[10]页42—43），从而由$A$对应于$\overline{A}$给出一闭包算子。反之，由任一闭包算子，也可决定相应的拓扑，我们有

定理 4·4 设f为X上不分明闭包算子，记X上满足$f(A)=A$的不分明集A全体为$\mathscr{F}$，$\mathscr{F}$中各集的补集全体记作$\mathscr{T}$，则$\mathscr{T}$是X上一个不分明拓扑，而且对不分明集B，恒有$\mathrm{cl}\mathscr{T}B=f(B)$。以后称$\mathscr{T}$为由闭包算子$f$决定的不分明拓扑，

证明可以逐字逐句地（记号相应改动）重复[10]页43定理8的证明，只是其中使用的一个简单事实：当$A\subset B$时，有$f(A)\subset f(B)$，需改证如次：由$A\subset B$，有$B=A\cup B$，从而$f(B)=f(A)\cup f(B)\supset f(A)$。

定义 4·4 属于$\overline{A}\cap\overline{(A')}$的不分明点称作$A$的边缘点。$A$的所有边缘点的并称作$A$的边缘集，记作$b(A)$。

显然 $b(A)=\overline{A}\cap\overline{(A')}$

命题 4·1 $\overline{A}\supset A\cup b(A)$，这里包含符号一般不能改作等号。

命题前半由定义自明，后半由下例给出，应该着重指出，在分明拓扑学中有$\overline{A}=A\cup b(A)$，所以此是与分明拓扑学不同的一个结果。

例 取 X 中一点 x，令 $\mathscr{T}=\{X,\Phi,x_{\frac{1}{2}}\}$，$A=\{x_{\frac{1}{3}}\}$，点 $e=x_{\frac{3}{4}}$，那么 e 在 $(X,\mathscr{T})$ 中开重域或为 X 或为 $x_{\frac{1}{2}}$，皆重于A，故 $e\in\overline{A}$(定理 4·1′)。但另一方面 $e\notin A$,且e 的重域 $\{x_{\frac{1}{2}}\}$与 A'不相重，即 $e\notin\overline{(A')}$，从而$e\notin b(A)$。即 $e\notin A\cup b(A)$。

5. 聚点，杨忠道（C. T. Yang）定理推广

定义 5·1 不分明点 e 称作不分明集 A 的聚点，若 e 是 A 的附着点并且当 $e\in A$ 时，还要求 e 的每个重域与 A 在异于 $\mathrm{supp}(e)$ 的某点相重。不分明集 A 的所有聚点的并称作 A 的导集，记作 A^d。显然 $A^d\subset\overline{A}$。

定理 5·1 $\overline{A}=A\cup A^d$，A^d为 A 的导集。

证：记 A 所有附着点形成的集为Ω。由定理 4·1′的系，有$\overline{A}=\cup\Omega$。另一方面，Ω 中点 e 或属于 A，或不属于 A；在后一种情形，按聚点定义，e 是 A 的聚点，从而属于 A^d。于是 $\overline{A}=\cup\Omega\subset A\cup A^d$；至于相反包含关系是自明的。

系 不分明集 A 为闭当且仅当 A 包含每个 A 的聚点。

注意 A 为闭集当且仅当$A=\overline{A}$，由定理 5.1 即得此系。

引理 5·1 在$(X,\mathscr{T})$中，设$A=\{x_\lambda\}$，则 (1) 对 $y\neq x$，有$\overline{A}(y)=A^d(y)$。(2) 当 $\overline{A}(x)>\lambda$时，$\overline{A}(x)=A^d(x)$。(3) $\overline{A}(x)=\lambda$ 当且仅当 $A^d(x)=0$。

证：(1) (2) 及 (3) 的充分性部分由定理 5.1 即有。今设$\overline{A}(x)=\lambda$，我们说任一点 x_μ 都不是 A 的聚点，从而 $A^d(x)=0$，事实上当 $\mu>\lambda$ 时，x_μ不属于$\overline{A}$，从而$x_\mu\notin A^d$；当 $\mu\leqslant\lambda$ 时，$x_\mu\in A$ 但此时x_μ 任一重域或显然不能与A 在异于点 x 处相重，故 x_μ 也不能是A的聚点。

命题 5·1 在$(X,\mathscr{T})$中，设 $A=\{x_\lambda\}$，则 (1) 当 $A^d(x)>0$ 时，$A^d=\overline{A}$为闭集。(2) 当 $A^d(x)=0$ 时，A^d 为闭集的充要条件为存在开集B^*，使 $B^*(x)=1$ 且对 $y\neq x$，$B^*(y)=(\overline{A})'(y)=(A^d)'(y)$。(3) $A^d(x)=0$ 的充要条件为存在开集 B 使$B(x)=1-\lambda$。

证：(1) 由引理 5·1 的 (3) 及 $\overline{A}(x)\geqslant A(x)=\lambda$，有 $\overline{A}(x)>\lambda$。由引理 5.1 的 (2) 及 (1) 即有 $\overline{A}=A^d$。(2) A^d 为闭集当且仅当 $(A^d)'$为开集。当 $A^d(x)=0$ 时，由引理 5·1 的(1)及(3)，即知 $(A^d)'$ 即是题给的 B^*，故 A^d 为闭集当且仅当题示的 B^* 为开集。(3) 由引理 5·1 的 (3)，$A^d(x)=0$ 当且仅当 $\overline{A}(x)=\lambda=A(x)$，这等价于存在闭集 F 使 $F(x)=\lambda$，或说存在开集 B 使$B(x)=1-\lambda$。

下面给出杨忠道结果（[10]页56）的推广，在不分明拓扑学中，这个结果证明是复杂些。

定理 5·2* （X，$\mathscr{T}$）中任意不分明集的导集为闭集的充要条件为每个不分明点的导集都是闭集。

证：必要性自明。任取不分明集 H，由定理 5·1 的系，要说明 $H^d \equiv D$为闭集，仅需任取 D 的一个聚点 x_λ，证明 $x_\lambda \in D$，由于 $x_\lambda \in D = \overline{(H^d)} \subset \overline{\overline{(H)}} = \overline{H}$，由定理 4·1′，$x_\lambda$ 是 H 的附着点，若 $x \notin H$，则 x_λ 为 H 聚点，即 $x_\lambda \in D$。所以不妨设 $x_\lambda \in H$，即 $\lambda \leqslant H(x) = \rho$，考察点，$x_\rho = A$，就 A^d 的两种情形分开讨论。（一）设 $A^d(x) = \rho_1 > 0$。由引理 5·1，有 $\rho_1 > A(x) = H(x)$，所以 $x_{\rho_1} \notin H$，但 $x_{\rho_1} \in A^d \subset \overline{A} \subset \overline{H}$。故 x_{ρ_1} 是 H 聚点，$x_{\rho_1} \in D$。又因 $\lambda \leqslant H(x) < \rho_1$，即有 $x_\lambda \in D$。（二）设 $A^d = 0$，任取 x_λ 的开重域 B，我们将证此时 B 与 H 在异于 x 的某点相重，从而得知 $x_\lambda \in D$。由命题 5·1 的（2），有开集 B^* 使 $B^*(x) = 1$ 且在其他点处，B^* 与 $(\overline{A})'$ 同值，记 $C = B \cap B^*$，$C(x) = B(x) > 1 - \lambda$，故 C 还是 x_λ 的开重域，因为 x_λ 为 D 的聚点，C 必重于 D 于某点 z，$D(z) + C(z) > 1$。又由于 D 是 H 的诸聚点的并，有 H 的聚点 z_μ 使 $\mu + C(z) > 1$。由此知 C 亦为 z_μ 的开重域，今再就 z_μ 的三种可能情形分别论证。(1) 当 $z = x$ 且 $\mu \leqslant \rho$ 时，此时 $z_\mu \in H$，但 z_μ 又是 H 的聚点，故 x_μ 的重域 C（从而 B）与 H 在异于 $z = x$ 点处相重。(2) 当 $z = x$ 且 $\mu > \rho$。此时 $z_\mu \notin H$。由命题5·1 的 (3)，有开集 $\widetilde{B}$ 使 $\widetilde{B}(x) = 1 - \rho > 1 - \mu$，从而 $G = G \cup \widetilde{B}$ 还是 z_μ 的开重域，G 与 H 重于某点 w。因 $G(x) \leqslant \widetilde{B}(x) = 1 - \rho = 1 - H(x)$，故 $w \neq x$，即 G（从而 C 及 B）与 H 在异于 x 的某点相重。(3) 当 $z \neq x$ 时，由命题 5·1 的 (2)，有 $B^*(z) = (\overline{A})'(z)$。但 $(\overline{A})' = (A')^\circ$（定理 4·2），又注意 $(A')^\circ(z) = B^*(z) \geqslant C(z) > 1 - \mu$，有开集 $\widetilde{B} \subset A'$ 且 $\widetilde{B}(z)$ 充分近 $(A')^\circ(z)$ 使 $\widetilde{B}(z) > 1 - \mu$，于是 $B \cap \widetilde{B}$ 仍是 z_μ 的开重域，它与 H 相重于某点 w。因 $\widetilde{B} \subset A'$，$\widetilde{B}(x) \leqslant 1 - A(x) = 1 - H(x)$，故 $w \neq x$，即 $B \cap \widetilde{B}$（从而 B）与 H 在异于 x 的某点相重。证毕

6. 分 离 性

定义 6.1 （X，$\mathscr{T}$）称作不分明准 T_0 空间，若对每点 $x \in X$ 及 $\lambda \neq \mu$，或 $x_\lambda \notin \overline{\{x_\mu\}}$ 或 $x_\mu \notin \overline{\{x_\lambda\}}$

因当 $\mu < \lambda$ 时，$x_\mu \in \overline{\{x_\mu\}}$，所以（$X$，$\mathscr{T}$）为准 T_0 空间当且仅当对 $x \in X$ 及 $0 < \mu < \lambda \leqslant 1$，有 $x_\lambda \notin \overline{\{x_\mu\}}$。

定义 6·2 （X，$\mathscr{T}$）称作不分明 T_0 空间，若任意两个不分明点 e 与 d，若 $e \neq d$ 则或 $e \notin \overline{\{d\}}$ 或 $d \notin \overline{\{e\}}$。

定义 6·3 （X，$\mathscr{T}$）定义称作不分明 T_1 空间，若每个不分明点是闭集。

---

* 四川大学李中夫同志指出这个定理中"每个不分明点的导集为闭集"可削弱，代之以"每个分明点的导集为闭集"。他还给出了这个定理（加强形式）的一个简单证明，参看他的论文 [12]。

显然 T_1 空间是 T_0 空间，T_0 空间是准 T_0 空间。在分明拓扑学中，每个空间都满足准 T_0 条件，所以准 T_0 的分离性是不分明拓扑学中特有的。

设（X，$\mathscr{T}$）为准 T_0 空间，任取 $x\in X$ 及区间 $\Delta=(\rho_1,\ \rho_2)$ $(0\leqslant\rho_1<\rho_2<1)$，则有 $\mathscr{T}$ 中开集 B 使 $B(x)\in\Delta$。事实上令 $\lambda=1-\rho_1$，$\mu=1-\rho_2$。有 $\lambda>\mu>0$，由准 T_0 性，$x_\lambda\notin\overline{\{x_\mu\}}$ 即有 x_λ 的某开重域 B（$B(x)>1-\lambda=\rho_1$）与 x_μ 不相重，即 $B(x)\leqslant1-\mu=\rho_2$，故有 $B(x)\in\Delta$。这个准 T_0 空间的性质可增强为

定理 6·1 （X，$\mathscr{T}$）为准 T_0 的充要条件是对每个 $x\in X$ 及 $\rho\in[0,\ 1]$，有开集 B 使 $B(x)=\rho$。

证： 必要性：当 $\rho=0$ 时，取 $B=\Phi$ 即可。当 $0<\rho\leqslant1$ 时，取正实数严格递增序列 ρ_n 收敛于 ρ。令 $\Delta_n=(\rho_n,\ \rho_{n+1}]$ $(n=1,2\cdots)$，由方才所论证的性质，有开集 B_n 使 $B_n(x)\in\Delta_n$，那么 $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ 为开集，且易见 $B(x)=\rho$。充分性：任取不分明点 x_λ 与 x_μ，$\mu<\lambda$，取开集 B 使 $B(x)=1-\mu>1-\lambda$，B 是 x_λ 的开重域且与 $\{x_\mu\}$ 不相重，即 $x_\lambda\notin\overline{\{x_\mu\}}$。

定理 6·2 （X，$\mathscr{T}$）为 T_0 空间的充要条件是（X，$\mathscr{T}$）为准 T_0 且对 X 中任两不同的点 x 与 y 以及任意 ρ，$\nu\in[0,\ 1)$，有开集 B 使 $B(x)=\rho$ 且 $B(y)>\nu$，或者 $B(x)>\rho$ 且 $B(y)=\nu$。

证： 必要性：当（X，$\mathscr{T}$）为 T_0 时自然亦为准 T_0 且对 $x\neq y$ 及 ρ，ν，记 $\lambda=1-\rho$，$\mu=1-\nu>0$，得不分明点 x_λ 与 y_μ。若 $x_\lambda\notin\overline{\{y_\mu\}}$ 有 x_λ 的开重域 $B_1(B_1(x)>1-\lambda=\rho)$ 与 $\{y_\mu\}$ 不相重，即 $B_1(y)\leqslant1-\mu=\nu$。由准 T_0 性及定理 6·1，有开集 B_2 使 $B_2(y)=\nu$。于是令 $B=B_1\bigcup B_2$ 即可。若 $y_\lambda\notin\overline{\{x_\lambda\}}$ 可类似讨论。充分性：由于准 T_0 性，仅需考察 $x\neq y$ 时，不分明点 x_λ 与 y_μ 分离情形。取 $\rho=1-\lambda$，$\nu=1-\mu$，由题设不妨设有开集 B 使 $B(x)=$ 且 $B(y)>\nu$。那么 B 为 y_μ 的重域且与 $\{x_\lambda\}$ 不相重，即 $y_\mu\notin\overline{\{x_\lambda\}}$

定理 6·3 （X，$\mathscr{T}$）为 T_1 空间的充要条件为对每一 $x\in X$ 及 $\lambda\in[0,\ 1]$，有开集 B 使 $B(x)=1-\lambda$ 且 B 在其他处取值 1。

证： 必要性：当 $\lambda=0$ 时，取 $B=X$，当 $\lambda>0$ 时，x_λ 为不分明点，按题设它为闭集，其补集 B 为开且显然符合要求。充分性：任取不分明点 x_λ，容易检明题给开集 B 满足 $B'=\{x_\lambda\}$，即 x_λ 为闭集。

定义 6·4 （X，$\mathscr{T}$）称作不分明 T_2 空间（Hausdorff 空间），若对承点不同的任意两个不分明点 e 与 d，存在各自的重域 B 与 C 使 $B\bigcap C=\Phi$。

命题 6·1 设（X，$\mathscr{T}$）为 T_2 空间，$A=\{y_\mu\}$，则 A 的任一聚点必作 y_λ $(\lambda>\mu)$ 型。

证： 当 $\lambda\leqslant\mu$ 时，$y_\lambda\in A$，而 y_λ 的任一重域与 A 至多只能重于 y 点，故 y_λ 不是 A 的聚点。当 $x\neq y$，由 T_2 性，点 x_λ 有重域 B 与 y_μ 某重域 B_1 不相交，但 $B_1(y)>1-\mu\geqslant0$，从而 $B(y)=0$，即 B 与 A 不相重，x_λ 也不能是 A 的聚点。故 A 的聚点只能作 y_λ $(\lambda>\mu)$ 型。

由于 T_2 空间只讨论承点不同的不分明点的分离问题，故如下例所示，T_2 空间可能不是准 T_0 的，从而更不是 T_1 的。

例 设 X 由不相同的点 y 与 z 组成。拓扑 $\mathscr{T}$ 以 $\{y_\lambda\mid\lambda\in(\frac{1}{2},\ 1]\}$ 及 $\{z_\lambda\mid\lambda\in(0,\ 1]\}$ 及 Φ 为基。易见（X，$\mathscr{T}$）为 T_2 空间，但 $\mathscr{T}$ 中无开集在 y 点取值 $\frac{1}{2}$。由定理 6·1，它不是准

T_0空间。

定理 6·4 （X，$\mathscr{T}$）若是T_2与准T_0的，则也是T_1的。

证： 任取点y_μ，由命题6·1，$\{y_\mu\}$的聚点只能$y_\lambda(\lambda>\mu)$型，但由准T_0性及定理5·1，有开集B使$B(y)=1-\mu>1-\lambda$，即B为y_λ的重域且与$\{y_\mu\}$不相重，故$y_\lambda(\lambda>\mu)$也不能是$\{y_\mu\}$的聚点。即$\{y_\mu\}$是没的有聚点，由定理5·1的系，$\{y_\mu\}$为闭集，所以（X，$\mathscr{T}$）为T_1空间。

由于T_1空间中每个不分明点的导集显然为Φ，由定理5·2有

定理 6·5 在T_1空间中，每个不分明集的导集为闭集。

7. Ω聚点，Lindelöf 性质

定义 7·1 X上不分明集A称作不可数集，若Supp A为X的不可数分明集。

命题 7·1 在C_{II}空间中，任一不可数集必含有它的不可数个承点两两不同的不可数个聚点，这个命题是下面定理7·1的系。

定义 7·2 不分明点e称作集A的$Ω$聚点，若e的每个重域与A相重的点所构成的集之势皆为不可数。

定义 7·3 （X，$\mathscr{T}$）中不分明集D称作具有Lindelöf性质的，若D的每个开集族形成的复盖(即开复盖)都有可数的子复盖。若(X,$\mathscr{T}$)中每个不分明集都具有Lindelöf性质，则称它为遗传Lindelöf空间。如果（X，$\mathscr{T}$）中集X具有Lindelöf性质，则称它为Lindelöf空间。

命题 7·2 C_{II}空间是遗传Lindelöf空间。

证明可仿照[10]页49定理15之证。

定理 7·1 设（X，$\mathscr{T}$）为遗传Lindelöf空间，A为X上不分明集，属于A自身的A的$Ω$聚点全体的并记作B，那么$X_1=\text{Supp}\,A-\text{Supp}\,B$为$X$中可数分明集。

证： 若X_1为非空集，任取$y\in X_1$. 记$\lambda=A(y)>0$. 不分明点$y_\lambda\in A$. 因$y\notin\text{Supp}\,B$，y_λ不是A的$Ω$聚点。于是y_λ的某开重域B_y与A相重的点至多为可数，即使$B_y(z)>1-A(Q)$的点z至多为可数个。现在记$\mathscr{B}=\{B_y|y\in X_1\}$，$D$为在$y\in X_1$处取值$B_y(y)$，在$X_1$外取零值的不分明集。显然$\mathscr{B}$为$D$的开复盖。因$D$有Lindelöf性质，故有可数个$B_{y_i}\in\mathscr{B}$，$i=1,2,\cdots$使$W=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_{y_i}\supset D$. 显然使$W(z)>1-A(z)$成立的点$z$也至多可数。另一方面对每个$y\in X_1$，有$W(y)\geqslant D(y)$，$B_y$又是$y_\lambda$的重域，即$B_y(y)>1-\lambda=1-A(y)$，所以$W(y)>1-A(y)$，所以$X_1$至多为可数。

8. 子 空 间

定义 8·1 设（X，$\mathscr{T}$）为不分明拓扑空间，Y为X的分明子集，那么$\mathscr{T}$中诸不分明集在Y上限制显然给出一个以Y为承载集的不分明拓扑$\mathscr{U}$. 称作$\mathscr{T}$在Y上的相对拓扑，空间（Y，$\mathscr{U}$）称作（X，$\mathscr{T}$）的子空间。$\mathscr{U}$中开集(闭集)也称作Y上相对开集(闭集)。

由于空间与子空间在讨论中常常同时出现，为表述简洁，在不发生混淆情形下，采取以