结构动力可靠性理论及其应用

李桂青　曹宏
李秋胜　霍达　著

地震出版社
1993

$S_v(\omega)$——脉动风速谱

Re——雷诺数

V_{cr}——临界风速

$\bar{V}$——平均风速

$\bar{W}$——平均风压

V_{10}——时距为 10min 的平均风速

t——时间

$P(t)$——随时间变化的集中荷载

$p(x, t)$——随时间变化的荷载分布集度

m，$\bar{m}$，$M(x)$——质量分布集度

ρ——空气质量密度

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$——$x$ 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数

g——重力加速度

$\Gamma(\ )$——伽马函数，$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \quad (x>0)$

$\mathrm{Re}[z]$—— 复数 z 的实部

（京）新登字 095 号

内 容 简 介

本书全面、系统阐述结构动力可靠性的基本理论、计算方法及其在抗风、抗震结构设计和规范中的应用，共分四篇、十六章。第一篇为结构动力可靠性的基本理论，着重介绍结构随机反应的实用计算方法以及结构动力可靠性的数学基础、结构破坏准则、机制和可靠性分析的几类基本公式；第二篇为高层建筑和高耸结构动力特性的实用计算方法，附有便于工程设计应用的大量图表及实例，包括武汉电视塔动力特性的实测及分析等；第三篇为抗风结构的动力可靠性分析，包括风荷载的统计、随机反应分析、随机和模糊随机动力可靠性分析及武汉电视塔抗风可靠性分析等；第四篇为抗震结构的动力可靠性分析，包括新旧抗震规范的对比、地震危险性分析、抗震结构可靠性分析方法以及基于可靠性分析的震害预测等。第三、四篇还阐述了抗风、抗震规范的理论基础及其中若干重要问题的理论分析、某些近似公式的计算误差分析等。

本书对基础理论的阐述力求深入浅出，对应用问题密切结合规范和工程实例，可供广大工程设计人员、科学研究工作者和大专院校工科专业，特别是土建专业和力学专业的师生参考。

结构动力可靠性理论及其应用
李桂青　曹宏　李秋胜　霍达　著
责任编辑：蒋乃芳
※
地震出版社　出版
北京民族学院南路 9 号
中国地质大学轻印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
全国各地新华书店经售
※
787×1092　1/16　24.5 印张　600 千字
1993 年 4 月第一版　1993 年 4 月第一次印刷
印数　0001—1200
ISBN 7-5028-0793-4 / TU · 75
(1186)　定价：30.00 元

序　　言[①]

结构可靠性是指其安全性、耐久性和适用性，但迄今为止，国内外学者均以研究安全性为主。

结构可靠性以可靠度为其测度。所谓结构可靠度，是指结构在规定的时间内，在规定的条件下，完成预定功能的概率。

近十余年来，国内外虽已出版不少结构可靠度的专著，但这些专著无不以静力可靠度为主。而专门论述结构动力可靠性理论及其在抗风、抗震结构中应用的著作尚未见问世，本书正是为填补这一空白而作。

本书分四篇共十六章。第一篇为结构动力可靠性的基本理论，分六章。第一章介绍结构动力可靠性理论的数学基础，主要是有关随机变量与随机过程的基本知识。此章论述简明，概括性强，概念清楚，但未作严格的数学证明；第二章是结构随机反应分析，这是结构动力可靠性理论的力学基础；第三至第六章介绍单自由度和多自由度线性、非线性体系的动力可靠性一般理论和分析方法。由于这几章有较大的难度，故在写法上力求通俗易懂，并给出了一些主要公式和基本推导过程，便于读者自学。

第二篇为结构动力特性的实用计算方法，其中第七章主要介绍多层与高层建筑的布置、结构选型，多层砖石及框架建筑、高层建筑动力特性的实用计算方法和实测结果的统计分析；第八章论述高耸结构，包括计算简图的选取，单阶和多阶高耸结构的纵向、弯曲自由振动的计算方法以及武汉电视塔主体结构动力特性的实测与分析方法。在这一篇中还附有便于工程设计应用的大量图表及实例。

第三篇为抗风结构的动力可靠性，包括风荷载的特性、统计方法，以及结构风振反应和动力可靠性分析方法等。在这一篇中，首次提出了抗风结构基于舒适度准则的动力可靠性概念和计算方法，指出了我国建筑结构荷载规范 (GBJ9–87)中风振系数的误差，并介绍了武汉电视塔抗风可靠性分析方法及主要结论等。

第四篇为抗震结构的动力可靠性分析，包括结构抗震新规范(GBJ11–89)与旧规范(TJ11–78)的对比；基于新规范的动力可靠性分析，如抗震结构“小震不坏、中震可修、大震不倒”的可靠度分析方法和实例；基于可靠性分析的震害预测。第三、四篇的最大特点，一是密切结合抗风、抗震结构新规范，阐述了其理论基础及其中若干重要问题的理论分析等；二是着重介绍实用计算方法，涉及的数学基础不多；三是以实例来说明有关方法的应用步骤及值得注意的问题；四是附有大量图表，不仅应用方便，也易于加深对可靠性理论的理解。

本书是在作者所著的《概率论及其应用》、《结构可靠度》两本讲义以及所发表的数十篇论文的基础上写成的，曾对我校工业与民用建筑专业的大学生、硕士和博士生讲授过多次，其部分内容还在湖北、云南、辽宁、武汉、昆明等省市土木建筑学会、水利学会举办的专题讲座上讲过，这次出版时又进行了较大的修改。

---

① 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目

参加本书部分章节撰写的还有欧四媛、李芝艳工程师以及博士生王东炜、谢伟平、李正农、李大望、赵占朝等；参加本书工作的还有张武英、葛起宏等。

本书可供广大工程设计人员、科学研究工作者和大专院校工科专业，特别是土建专业和力学专业的师生参考。

限于著者水平，书中必定存在一些缺点、错误，敬希读者批评指正。

武汉工业大学

工程结构抗震研究所

李桂青　　曹　宏　　李秋胜

常　用　符　号

除特殊说明外，各符号代表意义如下:

$F_x(x)$，$f_x(x)$—— 随机变量 x(或随机过程)的概率分布函数、概率密度函数

m_x， $E[x]$——x的数学期望

$E[X^n]$——x 的 n阶原点矩

σ_x，σ_x^2——x 的标准差、方差

$R_x(\tau)$——x 的相关函数

$G_x(\omega)$，$S_x(\omega)$——x的谱密度（函数）

$R_{xy}(\tau)$，$S_{xy}(\omega)$—— 随机变量 x 与随机变量 y的互相关函数、互谱密度

$N(0,1)$——标准正态分布

$h(t)$——单位脉冲响应函数

$H(\omega)$——频率反应函数

I，$[I]$——单位矩阵

P_s——动力可靠性（度）

P_f——失效（破坏）概率

v_b—— 随机过程 $x(t)$ 在单位时间与界限 $x=b$的交差次数的期望值

v_0——$x(t)$ 在单位时间与零线 (界限 $x=0$)的交差次数期望值

v_b^+，v_b^-——$x(t)$ 在单位时间内以正、负斜率与界限 $x=b$的交差次数期望值

F——截面面积

η_j—— 第 j振型参与系数

J——截面惯性矩

T_j—— 第 j自振周期

ω_j—— 第 j自振圆频率

M_j^*—— 第 j振型的广义质量

f，n——频率(Hz)

Q_x——剪力

M_x——弯矩

$[M]$——质量矩阵

$[C]$——阻尼矩阵

$[K]$——刚度矩阵

$[\Phi]$——振型矩阵

Φ_{ij}——i 质点的第 j振型值

ξ——阻尼比

$X_j(x)$—— 第 j振型

E，G——材料的弹性模量、剪切模量

μ_s——剪应力分布不均匀系数

$\mu_s(x)$——风载体型系数

μ_z——风压高度变化系数

目　录

第一篇　结构动力可靠性的基本理论

第二篇 结构动力特性的实用计算方法

第三篇 抗风结构的动力可靠性

第四篇　抗震结构的动力可靠性

第一篇　结构动力可靠性的基本理论

第一章　随机过程

§1.1　随机变量及其分布

作为一门新发展起来的结构动力学分支，结构的动力可靠性理论，实际上是经典的结构动力学理论与概率论(主要是随机过程理论)相结合而形成的一门新学科．它所研究的是在随机动力荷载(如地震作用、风荷载、海洋波浪等)作用下，结构的动力反应及可靠性的理论和计算方法．

本书中，我们不打算系统或全面地介绍概率论的基本理论，因为这样既不必要也不可能．但为了完整性和方便阅读本书起见，在本章和下一章中，将对本书所涉及的概率论的基本概念和随机振动的基本概念作一较全面的介绍．

一、　基本概念

人们对自然界的种种现象进行分析之后，认为这些现象大致可以划分为二类：

(1) 确定性现象；

(2) 不确定性现象．

当一种现象本身是确定的或固定的，其条件和结果之间存在着一种必然的因果关系时，为**确定性现象**；反之则为**不确定性现象**．

所谓确定性现象是指人们根据条件可以预先推断出其结果的现象．例如，质量为m的质点，受力F作用时，其加速度a必为F/m，且沿F的方向．这种在一定条件下必然出现的现象亦称为必然事件．反之，如果在一定条件下必然不出现的现象称为不可能事件．

但是，自然界也存在大量的另一类现象，它们在一定条件下可能出现，也可能不出现；或者客观上现象本身是存在的，但人们对现象的认识即主观上却存在着不确定性，即所谓的不确定性现象．通常，这种不确定的现象又可以划分为**随机性现象**、**模糊性现象**及**模糊随机性现象**．例如：

(a) 掷硬币一次出现正面；

(b) 在未来某一时刻武汉电视塔上风荷载的最大值；

(c) 青年人的概念；

(d) 地震烈度的概念．

所谓随机性现象是指在这类现象的每次观测中，相同的条件可能会产生不同的结果，即所谓因果关系的破裂．但在大量的条件相同的重复性观测中，各种结果出现的可能性会呈现出某种规律性，即统计规律性，例如上述例子中的(a)和(b)．

而模糊性现象则是现象本身在客观上是具体存在的，但人们对这些现象的认识则是模糊不清的，即这些现象在概念上没有明确的定义和或明确的外延，一个对象是否符合这个

概念也是难以确定的，例如上述例子中的(c)．模糊性现象中的不确定性实际上反映了所谓"非此即彼"的互补关系的破裂．模糊随机性现象是既具有模糊性又具有随机性的现象，例如上述例子中的(d)．对于一个未来的地震，它发生的时间、空间、强度、频谱及持续时间等都是不能预先确定的，因而具有随机性；而又因地震烈度这一概念缺乏明确定义和清晰的边界，因而又具有模糊性．为了叙述方便和连续性，我们在本章中仅讨论随机性现象，而在第十三章中讨论模糊性现象和模糊随机性现象．

下面我们从概率论的角度给出描述随机现象的诸多术语的严格定义．

试验—— 一随机现象的一次观测，它有三个要素：

(1) 在相同条件下可以重复进行；

(2) 一次试验的可能结果不止一个；

(3) 一次试验的结果是无法预先确知的，但有可能事先确定试验的所有可能结果．

样本空间—— 一次试验的所有可能的结果的集合，而样本空间的每一元素则称为样本(或样本点)．

事件——样本空间的一个子集，即一次试验的一个或一些可能结果的集合．当这一集合包含样本空间的所有元素时，称为**必然事件**，而当该集合不包含样本空间的任何元素时，则称之为**不可能事件**．

试验中每一个可能结果，称为该试验的一个**基本事件**．若试验的结果只能是某些基本事件中出现一件，则称这些事件为完备的事件群．

例如掷硬币一次就是一种试验，它只有两个可能结果(基本事件)，出现正面与出现反面．

概率——某一事件出现的可能性的测度．为了比较一次试验中各个事件出现的可能性的大小，用$P(E)$表示事件 E 出现的可能性，称$P(E)$为事件 E 的概率．

有关概率的三个公理是：

(1) 对于任一事件 E 有 $0<P(E)<1$；

(2) $P(S)=1$，其中 S为样本空间；

(3) 对于两两不相容的事件E_j ($j=1$，$2\cdots n$)，有

$$P(E_1\bigcup E_2\bigcup\cdots\bigcup U_n)=\sum_{j=1}^{n} P(E_j) \tag{1-1}$$

有些事件的概率是可以直接计算的，典型的例子是古典型试验，即具有下列两个性质的试验：

(1) 试验的可能结果只有有限多个；

(2) 所有基本事件都是等可能的．

前述例子(a)就是一个著名的古典型试验．

对于古典型试验，若试验结果是由n个基本事件组成，而事件 A 由其中m个基本事件组成，则定义 A 的概率$P(A)$为

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

不难看出，$P(A)$介于 0 与 1 之间，即

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

若$P(A)=1$，则 A 为必然事件；若$P(A)=0$，则 A 为不可能事件.

对于一个古典型的概率问题(如掷硬币)，一般我们可以直接求得其(指定)事件的概率，但对于工程实际中的许多问题来说，一个特定的事件的概率通常是很难甚至是不可能直接求得的．因而必须通过一种方式间接求得，也就是用事件出现的频率来代替事件的概率.

定义 在N次试验中，事件 E 出现的次数为N_E，则事件 E 出现的频率(相对频率)为

$$f_N(E)=\frac{N_E}{N} \tag{1-2}$$

显然，发生事件 E 的频率的大小与试验的次数N是有关的，但在相当广泛的条件下，当试验次数N无限增加时，事件 E 出现的频率收敛于事件 E 出现的概率为

$$\lim_{N\to\infty} f_N(E)=\lim_{N\to\infty}\frac{N_E}{N}=P(E) \tag{1-3}$$

式(1−3)即所谓的"统计规律"，据此可以用事件 E 出现的频率估计其概率．应当指出的是，若试验是在不同条件下进行的，即上述试验的第一个要素不成立时，就不存在式(1−3)所表示的统计规律了.

二、 随机变量的概念

随机变量与随机事件是有紧密联系的重要概念，它的产生推动了概率理论的研究及应用，使其研究的对象由随机事件扩大为随机变量.

所谓**随机变量**，是指在一定条件下的试验中，每次都取一个不能预先确知的数值的变量.

例如，某混凝土制品厂每天不出废品的概率为 0.8，出一件废品的概率为 0.2，出二件及二件以上废品的概率为 0，求下周 6 天中的废品总数．我们设它为 x，显然它可能取的值为 0，1，2，3，4，5，6，但不能预先确知取哪一个，因而是随机变量．随机变量的严格数学定义如下:

定义 设随机试验的样本空间为S，如果对于每一个$s\in S$，有一实数$x=x(s)$与之对应，则可以得到一定义在S上的实单值函数 $x(s)$，称 x为**随机变量**①.

随机变量可分为两种基本类型：离散型随机变量和连续型随机变量.

若随机变量x的取值范围为有限个或可列的无限多个，则称之为**离散型随机变量**.

若随机变量x的取值范围为某一区间（或多个区间)，则称之为**连续型随机变量**.

例如，在上面的例子中，废品总数x即为离散型随机变量，它的取值为 0—6 这七个整数中的某一个．而北京的年最大风速就是在某个实数范围内取任意值的连续型随机变量.

实际上，有的随机变量是两种基本类型的组合，但这已超出本书的范畴，故不予讨论.

显然连续型随机变量的样本空间是不可数的．而对于多个随机变量$X=\{x\}$，通常称之为随机向量或随机矢量.

① 在下文中，我们均用x 而不是 $x(s)$来表示随机变量.

三、 随机变量的统计特性

为了研究随机变量x 的统计规律，必须知道 x的所有可能取的值及取这些值的相应概率。而随机变量x的概率分布是用概率函数、概率分布函数和概率密度函数来表示的。

对于离散型随机变量显然不难列出其所有取值及相应的概率，这通常是通过概率函数或分布律来表示的。

定义 若离散型随机变量 x 的值域为$x_j(j=1，2\cdots)$，则随机变量x 取 x_j 的概率 p_j:

$$p_j = P_x(x_j) = P_{rob}(x = x_j) \qquad j=1，2，\cdots \tag{1-4}$$

定义为随机变量x的概率函数$P_x(x_j)$。若将式 (1－4) 中的 p_j 与 x_j以列表的形式给出，则该表称为随机变量x的分布律。

因为连续型随机变量的样本空间是不可数的，所以无法用列表的形式给出。此外，对于连续型随机变量，一般定义其取某一指定值的概率为零。因此，对于连续型的随机变量，一般是用其分布函数来表示的。

定义 随机变量 x 的概率分布函数$F_x(X)$ 定义为 x 的取值不超过 X的概率:

$$F_x(X) = P_{rob}\{x \leqslant X\} \tag{1-5}$$

概率分布函数的定义式(1−5)对于离散型随机变量亦适用。考虑到式(1−4)，则离散型随机变量的分布函数可写为

$$F_x(X) = P_{rob}\{x \leqslant X\} = \sum_{x_j \leqslant X} P_x(x_j) \tag{1-5'}$$

概率分布函数的主要性质有:

(1) $F_x(-\infty)=0$ 和 $F_x(\infty)=1$;

(2) 分布函数是单调不减函数，且是右连续的。

对于连续型随机变量，在许多情况下采用其分布函数的导数(如果存在的话)，即概率密度函数，要更为方便一些。

定义 对于连续型随机变量x，若对任意实数 X，存在一非负函数 $f_x(X)$，使

$$F_x(X) = \int_{-\infty}^{x} f_x(s)ds \tag{1-6}$$

则称$f_x(X)$ 为随机变量 x的概率密度函数。定义式(1−6)亦可以写成:

$$f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} \tag{1-7}$$

概率密度函数$f_x(x)$①的主要性质有:

(1) $f_x(x) \geqslant 0$;

(2) $\int_a^b f_x(x)dx = F_x(b) - F_x(a)$ 及 $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = 1$ (1－8)

当随机变量x的概率函数或概率密度函数已知时，可以用其来研究随机变量的统计参数如均值和方差了。

1. 数学期望

若连续型随机变量 x 的概率密度函数为$f_x(x)(-\infty \leqslant x \leqslant \infty)$，则 x的**数学期望**(亦称

---

① 在下文中不致引起歧义之处，概率分布函数或概率密度函数中的变量X 均用小写 x来代替。

均值)为

$$m_x = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx \tag{1-9}$$

当x为离散型随机变量时，式(1-9)应改为

$$m_x = E[x] = \sum_{j=1}^{\infty} x_j P_x(x_j) \tag{1-9'}$$

这里要指出的是，数学期望式(1-9)存在的条件是该式绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_x(x) dx < \infty \tag{1-10}$$

2. 矩和方差

一类重要的数学期望是随机变量x的幂的数学期望——矩。随机变量x的n阶原点矩定义为

$$E[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_x(x) dx \tag{1-11}$$

或

$$E[x^n] = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^n P_x(x_j) \tag{1-11'}$$

一阶原点矩就是数学期望，而二阶原点矩$E[x^2]$称为**均方值**。

随机变量x的相对于均值的n阶矩，即中心矩定义为

$$E[(x-m_x)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^n f_x(x) dx \tag{1-12}$$

或

$$E[(x-m_x)^n] = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j-m_x)^n P_x(x_j) \tag{1-12'}$$

显然，一阶中心矩为零，而二阶中心矩称为**方差**，一般用D_x或σ^2来表示，其平方根σ称为均方根或标准离差、标准差。

不难导出均方值和方差的关系为

$$\sigma^2 = E[x^2] - E^2(x) \tag{1-13}$$

随机变量最重要的统计参数是其一阶矩和二阶矩，即均值和方差(或均方值)。

四、 几种常见的概率分布

1. 二项式分布

若事件E在一次试验中出现的概率是p，而在n次独立试验中事件E出现的次数显然是一离散型随机变量，设其为x，x的值域为0—n。在n次试验中$x=m$(即事件A出现m次)的概率为

$$\begin{aligned} P_{rob}(x=m) &= P_n(m) \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} \qquad m=0,\ 1\cdots n \end{aligned} \tag{1-14}$$

由式(1-14)定义的随机变量x称为**二项式分布**。二项式分布的概率分布函数为

$$F_x(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \sum\limits_{m\leqslant x} P_n(m) & 0\leqslant x\leqslant n\\ 1 & x\geqslant n\end{cases} \tag{1-15}$$

不难证明，$P_n(m)$是$(px+q)_n$ $(q=1-p)$展开式中x的m次幂的系数，故称之为二项式分布．二项式分布的均值和方差分别为np和$np(1-p)$.

2. 泊松分布

离散型随机变量中另一种重要的分布是泊松分布．它可以看成是二项式分布的一种极限状态．当$n\to\infty$，$p\to 0$且它们的乘积np等于一常数λ时，则式(1-14)给出的概率函数收敛于一极限:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m)=\frac{\lambda^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

即泊松分布的概率函数定义为

$$P_n(m)=\frac{\lambda^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda} \tag{1-16}$$

泊松分布的概率分布函数亦可以用式(1-15)来定义，只是式中的概率函数应由式(1-16)来定义．泊松分布的均值和方差均等于参数λ.

3. 均匀分布

在连续型随机变量中最重要的是高斯分布(亦称正态分布)．其它几种重要的分布有均匀分布、瑞利分布和对数正态分布等等．由于在本书中将常涉及到高斯随机变量(或随机过程)的各类运算，故将在下一小节对其作较详细的介绍．

若随机变量x的概率密度函数为

$$f_x(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & x\text{为其它值}\end{cases} \tag{1-17}$$

则称x为(在区间$[a,\ b]$上的)均匀分布．均匀分布的概率分布函数为

$$F_x(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\leqslant x<b\\ 1 & x\geqslant b\end{cases} \tag{1-18}$$

而均匀分布的均值和方差分别为

$$m_x=\frac{1}{2}(b+a) \qquad \sigma_x^2=\frac{1}{12}(b-a)^2$$

4. 瑞利分布

若随机变量x的概率密度函数为

$$f_x(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}\exp(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}) & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases} \tag{1-19}$$

则称x为瑞利分布．瑞利分布的均值和方差分别为

$$m_x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma \qquad \sigma_x^2=(2-\frac{\pi}{2})\sigma^2$$

5. 对数正态分布

顾名思义，对数正态分布应指随机变量x的对数$\ln x$应当服从正态分布．若随机变量x的概率密度函数为

$$f_x(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma}\exp\left[-\dfrac{(\ln x-m)^2}{2\sigma^2}\right] & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases} \tag{1-20}$$

则称x为**对数正态分布**．上式不难由正态分布作变换而得到．上式中的参量分别为

$$m=E[\ln x] \qquad \sigma^2=E[(\ln x-m)^2]$$

五、 高斯分布

1. 高斯分布的定义与性质

定义 若随机变量x的概率密度函数为

$$f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_x^2}(x-m_x)^2\right\} \qquad -\infty<x<\infty \tag{1-21}$$

则称x为**高斯分布或正态分布**．上式中的参量m_x、σ_x^2分别高斯随机变量x的均值和方差．而当其均值等于零及方差等于1时，一般称为标准正态分布或规格化正态分布，但也常简称为正态分布，并记为$N(0,\ 1)$．

标准正态分布的概率密度函数一般用$\varphi(x)$表示，而其概率分布函数(常常称为概率积分函数)则用$\Phi(x)$表示．两者间的关系为

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})dx \tag{1-22}$$

可以证明，概率积分函数$\Phi(x)$满足:

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x) \qquad \Phi(0)=0.5$$

许多文献中都给出了$\Phi(x)$的数值表(称为概率积分函数表)．不过在一些文献中，$\Phi(x)$是以其变换的形式——误差函数的形式给出的．所谓的误差函数为

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \tag{1-23}$$

显然，误差函数是偶函数．它与概率积分函数的关系为

$$\mathrm{erf}(x)=2\Phi(\sqrt{2}x)-1 \tag{1-24}$$

高斯分布的一个重要性质是它的高阶矩可以用其均值和方差来表示．换句话说，高斯分布的统计特性可以由其均值和方差唯一地确定．

这里不加证明地给出一般高斯分布的n阶中心矩:

$$E[(x-m_x)^n]=\begin{cases}0 & \text{当}n\text{为奇数时}\\ 1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)\sigma_x^2 & \text{当}n\text{为大于0的偶数时}\end{cases}$$

2. 中心极限定理

高斯分布的另一个也许是更为重要的性质是由概率论中极为重要的中心极限定理来表述的。

中心极限定理

对于独立的随机变量x_j ($j=1,\ 2\cdots n$)的和: