

# 自由质点 动力学

张健保 著

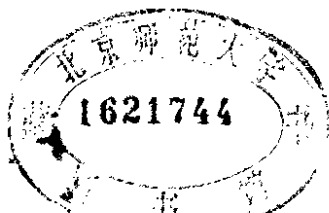


湖南科学技术出版社

# 自由质点动力学

张健保 著

JY11/26/2/



湖南科学技术出版社

湘新登字004号

## 自由质点动力学

张健保 著

责任编辑：普平安

\*

湖南科学技术出版社出版发行

(长沙市展览馆路3号)

湖南省新华书店经销 长沙政院印刷厂印刷

\*

1992年5月第1版第1次印刷

开本：787×1092毫米 1/32 印张：5.25 字数：117,000

印数：1—1,000

ISBN 7-5357-1030-1

0.99 定价：2.30元

地科101—019

## 出版说明

《自由质点动力学》是一本严格的科技书籍，它能帮助大学、中专的力学教师备课、讲课；也能帮助大学生学习物理和力学；同时，对弹道工作者，航天工作者的理论学习、设计计算，也有很大的参考价值。

过去，“自由质点动力学”没有专著，有关问题，只散见于各种力学文献内，或多或少，或深或浅，全凭著作需要或各家著者的取舍。参数的符号既不统一，论述演算，亦各有不同。尤其对近代的一些问题，更无统一的系统论述。《自由质点动力学》一方面统一了过去各家的论述、参数和运算，逻辑地归纳了它的经典内容；另一方面，也详细地阐述了近代内容，如变质量动力学，火箭列车的最佳计算、近光速时的齐奥尔科夫斯基公式——阿克莱公式、以及恒星际飞行理论……。这样，就使它成了一本近代的、综合的质点动力学专著。今特组织出版，以飨读者。

## 作者的话

本书始作于1962年春，约1970年秋成稿，之后，停停续续数次反复。虽几经改删，但错误缺点，仍在所难免。诚望各界同志同事，不吝指正，则不胜感激之至。

张健保 谨

1992. 5. 30

# 目 录

<b>第一章 质点的直线运动</b> .....	( 1 )
<b>第一节 质点在受各种形式外力作用时的         直线运动</b> .....	( 1 )
1. 当外力为常数时质点的直线运动 .....	( 1 )
例题 1—1 .....	( 8 )
2. 当外力为时间的函数时质点的直线运动 .....	( 4 )
3. 当外力为位置的函数时质点的直线运动 .....	( 5 )
例题 1—2 .....	( 7 )
4. 当外力为速度的函数时质点的直线运动 .....	( 10 )
5. 图解求积和数值求积 .....	( 11 )
<b>第二节 质点在阻尼介质中的直线运动</b> .....	( 15 )
1. 阻力和速度之一次方呈正比时质点的直线运动 .....	( 18 )
例题 1—3 .....	( 22 )
2. 阻力和速度之二次方呈正比时质点的直线运动 .....	( 24 )
例题 1—4 .....	( 29 )
3. 阻力和速度之三次方呈正比时质点的直线运动 .....	( 32 )
4. 阻力和速度之四次、五次方呈正比时质点的直线运动 .....	( 34 )
<b>第二章 质点的抛射运动</b> .....	( 37 )
<b>第一节 抛射运动的基本理论</b> .....	( 37 )
<b>第二节 质点在真空中之抛射运动</b> .....	( 43 )

例题 2—1 .....	( 51 )
第三节 质点在介质中的阻尼力和 $v$ 呈正比时的 抛射运动 .....	( 25 )
第四节 质点在介质中的阻尼力和 $v^2$ 呈正比时的 抛射运动 .....	( 57 )
1. 二次阻尼介质中的抛射运动 .....	( 57 )
2. 伯努利方程 .....	( 60 )
例题 2—2 .....	( 64 )
3. 用图解法解二次阻尼时的抛射问题 .....	( 69 )
例题 2—3 .....	( 72 )
第五节 在二次以上阻尼介质中之抛射运动 .....	( 74 )
1. 三次阻尼介质中之抛射运动 .....	( 74 )
2. 四次、五次阻尼介质中之抛射运动 .....	( 76 )
3. $n$ 次阻尼介质中之抛射运动 .....	( 78 )
4. 质点在介质阻力与 $(1 + mv^n)$ 呈正比时的抛射运动 .....	( 79 )
第六节 近似算法——龙盖法计算质点的 抛射运动 .....	( 81 )
例题 2—4 .....	( 85 )
<b>第三章 中心力</b> .....	( 89 )
第一节 中心力场中质点运动的基本理论 .....	( 89 )
1. 在中心力场中, 质点的运动轨迹是一根平面曲线 .....	( 89 )
2. 中心力微分方程的解 .....	( 90 )
第二节 为一次正比时的质点运动 .....	( 94 )
第三节 中心力为二次反比时质点的运动 .....	( 99 )
1. 中心力为二次反比时的解法和曲线的性质 .....	( 99 )
例题 8—1 .....	( 103 )
例题 8—2 .....	( 106 )

2. 二次反比时质点的运动方程	(110)
例题 3-3	(114)
3. 椭圆轨道最小矢径的限制	(115)
例题 3-4	(117)
4. 在二次反比中心力场中, 质点在轨道上位置的确定	(118)
第四节 中心力为二次反比斥力时, 质点的运动情形	(126)
例题 3-5	(128)

#### 第四章 变质量质点的运动 (134)

第一节 火箭运动	(134)
1. 齐奥尔科夫斯基第一问题	(136)
2. 齐奥尔科夫斯基第二问题	(138)
第二节 火箭列车各部分质量的确定	(139)
1. 火箭列车的齐奥尔科夫斯基公式	(139)
2. 火箭列车各部分质量的确定	(141)
3. 火箭列车各部分重量的具体设计	(147)
第三节 火箭列车的最佳设计	(151)
1. 齐氏数的最佳值	(151)
2. 齐氏数最佳值的逼近	(155)
第四节 近光速时的齐氏公式——阿克莱公式	(157)



# 第一章 质点的直线运动

## 第一节 质点在受各种形式外力作用时的直线运动

### 1. 当外力为常数时质点的直线运动

设某质点的质量为  $m$ ，受到一个方向、大小都不变的外力  $m\mathbf{K}$  的作用；并设外力之作用线与质点的运动轨迹相重合。

求质点之运动方程

根据公式

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

可得质点之矢量微分方程为

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{K} \dots\dots\dots (1-1)$$

将 (1-1) 式向笛卡儿坐标投影，得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= K_x \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= K_y \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= K_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-2)$$

将 (1-2) 式依次积分二次, 可得

$$\left. \begin{aligned} v_x &= k_x t + c_{x1} \\ v_y &= k_y t + c_{y1} \\ v_z &= k_z t + c_{z1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-3)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} k_x t^2 + c_{x1} t + c_{x2} \\ y &= \frac{1}{2} k_y t^2 + c_{y1} t + c_{y2} \\ z &= \frac{1}{2} k_z t^2 + c_{z1} t + c_{z2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-4)$$

上两方程组中的  $c_{x1}$ 、 $c_{y1}$ 、 $c_{z1}$ 、 $c_{x2}$ 、 $c_{y2}$ 、 $c_{z2}$  都是积分时出现的积分常数, 其值决定于开始计算质点运动时的“起始条件”。

如设开始计算质点运动时, 即  $t = t_0$  时, (一般  $t_0 = 0$ ) 质点的运动参数为

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$$

将此参数在各坐标轴上的分量  $v_{0x}$ 、 $v_{0y}$ 、 $v_{0z}$  和  $r_{0x}$ 、 $r_{0y}$ 、 $r_{0z}$  代入方程式 (1-3) (1-4), 则很容易得到

$$c_{x1} = v_{0x} \qquad c_{x2} = r_{0x}$$

$$c_{y1} = v_{0y} \qquad c_{y2} = r_{0y}$$

$$c_{z1} = v_{0z} \qquad c_{z2} = r_{0z}$$

于是就可以得到完全确定了质点运动的速度方程和运动方程:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= k_x t + v_{0x} \\ v_y &= k_y t + v_{0y} \\ v_z &= k_z t + v_{0z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-5)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= r_{0x} + v_{0x}t + \frac{1}{2}k_x t^2 \\ y &= r_{0y} + v_{0y}t + \frac{1}{2}k_y t^2 \\ z &= r_{0z} + v_{0z}t + \frac{1}{2}k_z t^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-6)$$

在实用上，坐标轴 $x$ 多取在常力的作用线上，这样，最后取得的方程组就可简化呈(1-5)中的第一式和(1-6)式中的第一式。

### 例题1-1

已知一物体重75公斤，自离地面20公里的高空处自由落下。如设重力加速度 $g_0$ 不随高度变化，也不考虑空气阻力；

求此物体的落地的速度和时间。

**解：**由于物体下落时不考虑空气阻力和 $g_0$ 设为常量，故物体上的作用力只有一个大小、方向皆不变的重力。另外，因物体是自由落体，故只取 $y$ 轴为投影轴，又设向下的方向为正；并且， $y_0 = 0$ ， $v_{y0} = 0$ ，这样，根据(1-5)、(1-6)式可得

$$\left. \begin{aligned} v_y &= g_0 t \\ y &= \frac{1}{2}g_0 t^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A)$$

移项后，即得

$$\left. \begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2y}{g_0}} \\ v_y &= \sqrt{2g_0 y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (B)$$

将  $g_0 = 9.8$ 米/秒<sup>2</sup>

$y = 20000$ 米

代入(B)式，就可得到

$$t = \sqrt{\frac{40000}{9.8}} = 64(\text{秒})$$

$$v_y = +\sqrt{2 \times 9.8 \times 20000} = 625(\text{米/秒})$$

$v_y$  所以取正号的意思是由于它方向朝下。

这就是落体在简单条件下的下落情况。

## 2. 当外力为时间的函数时质点的直线运动

设某一质量为  $m$  的质点，受到某一外力的作用；此外力方向虽不变，即其作用线一直与质点之运动轨迹相重合，而其大小则为时间的函数；即

$$\mathbf{F} = m\mathbf{r}f(t)$$

求质点之运动方程。

根据公式

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

得微分方程

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{r}f(t) \dots\dots\dots (1-7)$$

今将方程 (1-7) 向笛卡儿坐标轴投影，得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= f_x(t) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= f_y(t) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= f_z(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-8)$$

将 (1-8) 方程组依次积分两次，得到：

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \int_{t_0}^t f_x(t) dt + v_{0x} \\ v_y &= \int_{t_0}^t f_y(t) dt + v_{0y} \\ v_z &= \int_{t_0}^t f_z(t) dt + v_{0z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-9)$$

和

$$\left. \begin{aligned} x &= \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t f_x(t) dt + v_{0x}(t-t_0) + x_0 \\ y &= \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t f_y(t) dt + v_{0y}(t-t_0) + y_0 \\ z &= \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t f_z(t) dt + v_{0z}(t-t_0) + z_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-10)$$

方程组 (1-9) 和 (1-10) 就是质点从  $t_0$  开始至某一时间  $t$  的速度方程和位移方程 (运动方程)。式中  $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$ ,  $v_{0z}$  和  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  都是已知的初始条件, 即在开始时 ( $t=t_0$  时) 质点的速度和位移。

### 3. 当外力为位置的函数时, 质点的直线运动

设质量为  $m$  的某一质点  $M$ , 受到某一外力  $F$  作用, 此外力的方向不变, 并且其作用线一直与质点的运动轨迹相重合, 而外力的大小为质点本身位置的函数, 即

$$F = mr f(r)$$

求质点之运动方程  
根据公式

$$m \frac{d^2 F}{dt^2} = F$$

得  $m \frac{d^2 r}{dt^2} = mr f(r)$

由于质点之运动为直线，为简便起见，不妨将坐标轴  $x$  取在质点的轨迹上，于是上式只要向  $x$  轴投影，逐得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(x) \dots\dots\dots (1-11)$$

为了解 (1-11) 微分方程方便，今在它的两端各乘

$$2 \frac{dx}{dt}, \text{ 即}$$

$$2 \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = f(x) \cdot 2 \frac{dx}{dt}$$

因为  $2 \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right] = \frac{d}{dt} (v^2)$

所以  $\frac{d}{dt} (v^2) = 2 \frac{dx}{dt} \cdot f(x)$

将上式自  $x_0$  至  $x$ ，自  $v_0$  至  $v$  积分，移项整理后，得质点之速度方程为

$$v = \sqrt{2 \int_{x_0}^x f(x) dx + v_0^2} \dots\dots\dots (1-12)$$

因为  $v = \frac{dx}{dt}$ ，故代入上式并变数分离后，上式就变为

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2 \int_{x_0}^x f(x) dx + v_0^2}}$$

将上式自  $x_0 \rightarrow x$ ,  $t_0 \rightarrow t$  再积分一次, 逐得

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{2 \int_{x_0}^x f(x) dx + v_0^2}} \dots\dots (1-13)$$

### 例题1-2

已知一物体重75公斤, 自离地面20公里的高空自由落下, 如不考虑空气的阻力;

求物体下落至地面时的速度、时间。

解: 根据牛顿万有引力, 物体在地球高空的重量为

$$F = -\frac{GMm}{x^2} = mg \dots\dots (A)$$

式中:  $F$  为万有引力

$G$  为引力常数

$M$  为地球的质量

$m$  为物体的质量

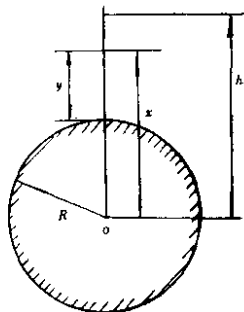
$x$  为物体至地球中心之距离

$g$  为离地心为  $x$  距离时的重

力加速度

当物体在海平面时其重量为

$$mg_0 = \frac{-GMm}{R^2} \dots\dots (B)$$



例1-2图

式中:  $R$  为地球半径 (约  $R = 6400$  公里)

$g_0$  为海平面上, 亦即离地心为  $R$  时之重力加速度。

如 (例1-2图)

今将 (B) 式移项;

$$-GM = g_0 R^2$$

将此代入 (A) 式, 则得

$$g = g_0 \frac{R^2}{x^2} \dots\dots\dots (C)$$

(C) 式说明了这样一个情况: 即重力加速度  $g$  不是常数, 是随高度而变化的。当一物体自高空自由下落时, 其所受到的重力, 不是恒力、而是随高度而变化的一个变力。

现在, 将 (C) 式代入 (1-12) 式, 得到

$$v_y = \pm \sqrt{2 \int_h^x (g_0 \frac{R^2}{x^2}) dx}$$

$$\text{积分后, } v_y = \pm \sqrt{2g_0 R^2 (\frac{1}{x} - \frac{1}{h})} \dots\dots\dots (D)$$

如果  $h \rightarrow \infty$ ,  $x = R$  则

$$v_y = \pm \sqrt{2g_0 R} \dots\dots\dots (E)$$

这就是物体自无穷远落至地面时之落地速度。

如果离地面高  $y$  的物体, 落向地面, 这时 (D) 式就变成

$$v_y = \pm \sqrt{2g_0 R^2 (\frac{1}{R} - \frac{1}{R+y})}$$

整理后, 成为

$$v_y = \pm \sqrt{2g_0 y (\frac{R}{R+y})} \dots\dots\dots (F)$$

比较 (F) 和例1-1中的 (B) 式, 就可发现, (F) 式比 (B) 式多了一个“修正项”  $\sqrt{\frac{R}{R+y}}$

如果  $y$  和  $R$  比不很大, 那末修整项将近似于1 而可看成 1, 这时 (F) 式就变成了例1-1的 (B) 式。但如果  $y$  有足够大,



大到修整项不可忽略，这时，(B)式将不能反映正确的 $v_y$ ，而一定要用(F)式了。这就是高地高度 $y$ 足够大时必须用(F)式的道理。

现在，回过来看例题1—2。

今将题中之数据

$$g_0 = 9.8 \text{ (米/秒}^2\text{)}$$

$$R = 6.4 \times 10^6 \text{ (米)}$$

$$y = 20 \times 10^3 \text{ (米)}$$

代入(F)式，得

$$v_y = 625 \times 0.998$$

$$= 624 \text{ (米/秒)}$$

由于20公里和地球半径比，相对很小，所以算出之答案和例题1—1的很相近，几乎一样。

从这里可推知，物体下落的时间 $t$ 和例1—1的也相近，用例1—1的已足够准确，所以在此不予计算了。但是他的计算方法大致如下：

将(C)式代入(1—13)式，得到

$$t - t_0 = \int_h^x \frac{dx}{\sqrt{2 \int_h^x (g_0 \cdot \frac{R^2}{x^2}) dx + v_0^2}}$$

因 $t_0 = 0$ ， $v_0 = 0$  故上式积分后为

$$t = - \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2gR^2}} \int_h^x \sqrt{\frac{x}{h-x}} dx,$$

这个积分必须作下列变换方可进行。

令  $x = h \cos \theta$

$$dx = -2h \sin \theta \cos \theta$$

代入整理后为