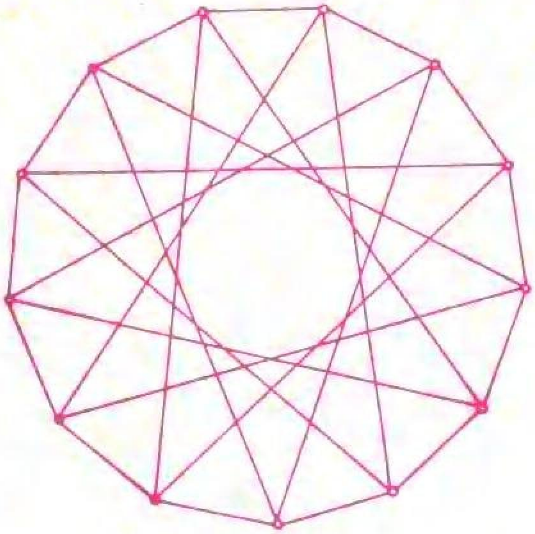
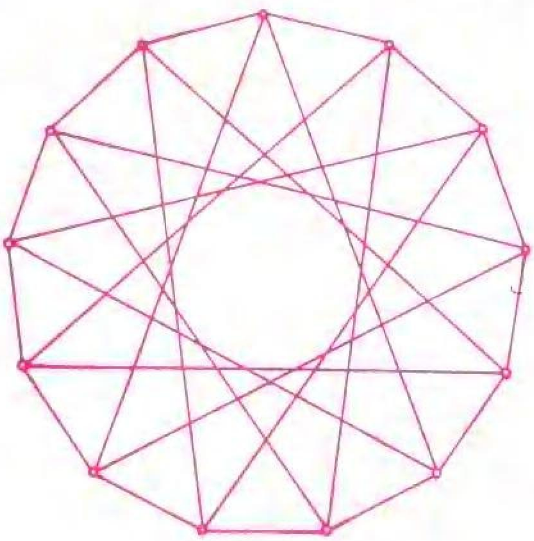
信息与逻辑丛书



组合数学简介

陈景润 编著



天
出版社

责任编辑：黄立民

信息与逻辑丛书

组合数学简介

陈景润　编著

*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道130号

天津新华印刷二厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本850×1168毫米　1/32　印张7.75　字数193 000

1988年7月第1版

1988年7月第1次印刷

印数：1—5 628

ISBN　7-5308-0234-8/TP·7　定价：2.75元

本丛书编委会名单

编者的话

在现实世界与人类社会中，信息的传输、存取与加工的重要性和价值是无法估价的。由于科学技术的进步、工农业生产的发展、军事活动、气象与交通运输、[illegible]流、文化生活等领域都在不断地提供大量的信息，这就要[illegible]速而准确地对信息进行传输、存取与加工。信息是通过各种形式表达的，有自然语言（汉语的、英语的等等）形式，数字形式，符号形式和物质形式。信息的内容是多种多样的，有些可以公开传输，有些又必须加以保密，秘密传输。当今世界，无线电秘密传输信息是困难的，它必须设法使预定传输的有规则的、含有重要内容的信息加以紊乱，使接受了这些信息的敌方无法识别它所表达的内容，而又必须使接受到它的我方把紊乱的信息迅速地恢复它的原始含意。有些信息无长期保存的价值，而有些不仅要长期存贮，而且还要能够随时提取。有些信息必须进行大量的加工，提取有用的部分。无线电通讯中的编码、加保护码、译码与破码也是一例。合理地使用信息，有时比合理地使用物质更为重要。在这个意义下，我们可以说，现在是信息的时代，具体地说是信息量巨增、信息的意义与价值巨增、信息的研究与利用巨增的时代。人们不仅借助于物质器件传输、存取与加工信息，而且还要借助于数字、符号与语言的工具才能迅速、准确地处理信息。不仅需要设计与制做传输、存取与加工信息的硬件，而且还必须设计与制做相应的软件。现阶段，在一定意义下，设计与制做软件是更为重要的，因此，人们称八十年代为软件的时代。

数字与语言都可以用符号、符号串和它们的集合所表达，处理信息也就是处理符号串和相应的集合（即符号语言或形式语

言）。信息来源是广泛的、系统的，并且常常是相互关联的。这样，形式语言、形式系统也是丰富多采的。

数据库、知识库、专家咨询系统、专家系统，自对程序设计、自动证明数学定理、机器人和各种智能工程等领域的研究和应用已成为当前科学技术的重要课题。这一系列课题中不仅需要已有的逻辑知识，而且在不断地发展新的逻辑工具。应用逻辑方法是上述各个课题的共性。众所周知，数学方法是一切自然科学、技术科学和工程技术的重要工具之一，然而在信息系统与智能工程中，逻辑方法不仅比一般的数学方法应用更广泛，而且它是更为基本的方法。一个加法运算必须分解为一系列基本的逻辑步骤，每一次加法运算本身都是通过一条很长的逻辑链条而完成的。所以，数学运算都是通过逻辑运算的链条而完成的。正如由微小的力量可以聚集成巨大的力量一样，由微小的逻辑步骤也可以以各种结构形式聚集成巨大的逻辑步骤，实现巨大的智能活动，高速的电子元件为这种琐碎的、冗长的步骤提供了可能。把数学运算和其它的逻辑过程（判断、推演）组成有机的部分，再把各个部分组成各种系统，由若干小系统组成大系统。大系统的组成以及工作的过程和环节，都存在着逻辑的联系、逻辑转换和逻辑过程。这不仅运用了来自人类的思维过程，特别是数学的思维过程中发展起来的数理逻辑理论与方法（它起源于莱布尼兹，经过布尔、施屡德、德·摩根、弗瑞格、罗素、希尔伯特和哥德尔形成独立学科，近五十年来它又有了新的重大的发展，解决了一批引人注目的数学难题，还使一批数学难题获得重大进展，产生了一批令人发省的数学结果），而且又为数理逻辑提供了新概念、新方法和实际背景，使纯逻辑的某些研究有了新的生命力。在这个意义下，我们可以说，计算机、信息系统和智能工程促进了数理逻辑的研究与发展，可能为数理逻辑的研究与发展开辟新的前景。

本丛书的宗旨是阐述信息系统、计算机、智能工程与数理逻

辑的联系，借以促进它们的发展。一方面从信息系统、计算机和智能工程的角度阐述数理逻辑的若干重大的逻辑成果（某些纯数学的成果如连续统假设、群论、字的判定问题等除外）和基本方法，借以促进前者的发展，也阐述一些逻辑问题，希望寻求计算机解决它们的方法，或者证明不存在计算机解决的方法。另一方面是阐述信息系统、计算机和智能工程等领域的进展，特别是逻辑方法，借以促进它们的发展与推广，并进而为数理逻辑研究提供新的资料和问题。任何一门学科，当它能够不断地提出大量的研究问题，它就充满着生命力，而问题的缺乏则预示着独立发展的衰竭与中止。我们的领域是不断提出问题，充满生命力和蓬勃发展的研究领域。

我们希望通过本丛书的十数卷本能够阐明我们的研究领域的各项专题及它们的联系，使本丛书能成为这一领域的广大科学技术工作者、教师和学生较系统的由浅入深的读物，从而对读者有所裨益。

本丛书的撰写和出版过程中，我们得到学术界许多部门和许多朋友的多方支持，得到许多学者、专家与权威的大力支持和指教，得到天津科学技术出版社的热情有力支持。借此机会表示由衷的感谢。

《信息与逻辑》丛书编委

1983年10月

目　　录

前　言

组合数学是当代数学中非常重要的一个分支。它发源于有趣的数学游戏，由于娱乐和其美学上的魅力而被研究的许多组合问题，现在无论是在纯粹科学或应用科学上都有很重要的价值。近代计算机的飞速发展，使组合数学有了更强的生命力，它已经能够解决以前不敢想象的大型问题。组合数学的离散性在现代科学技术中显示出极为重要的作用，它的存在被赋予了新的严肃的科学内容和意义。

本书尽量从最简单的问题着手，浅显地介绍了组合数学的基本内容。为了使包括中学生和工程技术人员在内的广大读者都能够看懂，我们避开了较深的高等数学概念和方法，因此本书并不要求读者具有高等数学的基础。由于组合数学从来内容都很驳杂，并且当代组合数学所涉及的领域更是大大增加，这本较为通俗的读物显然不能够包含组合数学的全部内容。

我要特别感谢贵州民族学院数学系黎鉴愚老师，他参加了本书各个章节的编写工作，同时提供了大量宝贵的材料。我非常感谢贵州民族学院副院长谭鑫教授、贵州民族学院教务处长林敬藩先生，贵州省教育学院李长明教授等同志，他们详细地阅读了本书初稿，并提出了很多宝贵的意见。我还非常感谢河南大学数学系主任刘亚星教授和新乡师范学院数学系主任吕绍明教授等同志，在我们讲授本书初稿时，他们提出了不少宝贵的建议。

由于作者的能力所限，本书可能存在有错误和不妥当的地方，恳请广大读者批评指正。

作　者

1984年9月

第一章　魔术方阵与火柴游戏

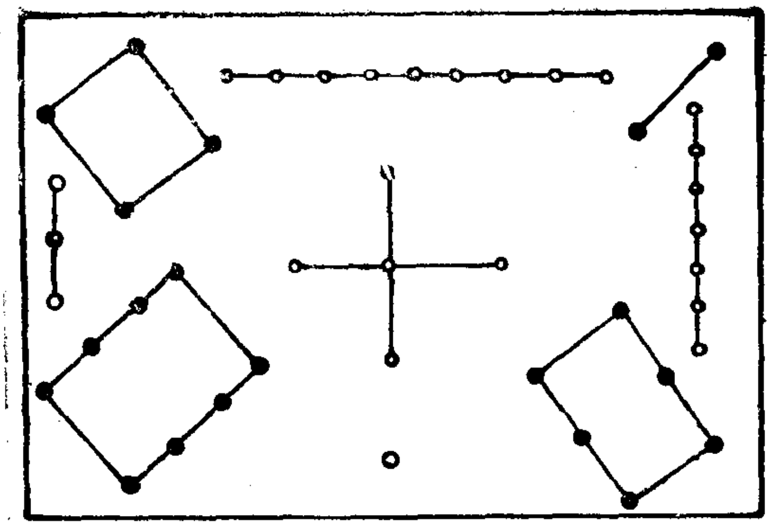
组合论又叫组合数学，它是一个历史很久的数学分支．组合论所研究的中心问题是按照一定的规则来安排一些物件有关的数学问题，当符合所要求的安排并不是很显然不存在或存在时，那么我们首要的问题就是去证明它的不存在或是去证明它的存在．当符合所要求的安排显然是存在或是我们已经证明它是存在时，那么，求出这样的安排的（全部或其中不等价的）个数，以及怎样才能够把这样的安排求出来的问题，如果它还给出了最优化的标准，则还需寻求出最优的安排，如此等等。上述几方面问题依次被称为存在性问题、计数问题、构造问题、最优化问题．

几千年以前人们就已经开始研究组合论，据传早在《河图》中，我国人民就已经对一些有趣的组合问题给出了正确的解答．

§1 魔术方阵

在我国的神话传说中，有一位人物是众所周知的，他就是禹。据传早在四千多年以前，大禹为了治理容易泛滥成灾的黄河，曾经率领百姓日夜奔忙地工作，据说几次过家门都没有时间停下来看看妻儿，这种大公无私的精神，今天看来还是令人感动。据传在大禹治好那波涛汹涌的水患后，就有龙马从河中跃出献出河图，另外在洛河里也有一只大乌龟背驮洛书给大禹．据说洛书、河图都包含了治理国家的大道理．这个历史传说在《论语》书中，孔夫子就因为当时世风日下，人心不古，没有圣人之治，以致“河不出图”而感慨万分．

洛书上的每个圆圈都是代表一个1，所以如果我们把洛书上



洛　书

的图形用阿拉伯数字写出来就是图（1.1）．图（1.1）是由1到9这九个数所组成的具有三行三列的一个方形阵列，其中每行、每列以及每条对角线上三个数之和都等于15．即

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图1.1

$$4+9+2=15,\quad 3+5+7=15,$$
$$8+1+6=15,\quad 4+3+8=15,$$
$$9+5+1=15,\quad 2+7+6=15,$$
$$4+5+6=15,\quad 2+5+8=15.$$

又在图（1.1）中我们有

$$2+6+8+4=20,\quad 7+1+3+9=20,$$
$$6+8+4+2=20,\quad 1+3+9+7=20,$$
$$8+4+2+6=20,\quad 3+9+7+1=20,$$
$$4+2+6+8=20,\quad 9+7+1+3=20.$$

现在我们来说明图（1.1）是怎样得到的，我们取九张同样大小的正方形纸块，并在九张纸上，写上从1到9的数目字．然后再将它们按照图（1.2）来进行排列。排列好后，将图（1.2）中的1和9位置进行对调，3和7位置进行对调。这样我们就得到图（1.3）．现在我们把记有1、3、9、7的纸块向中间5的纸

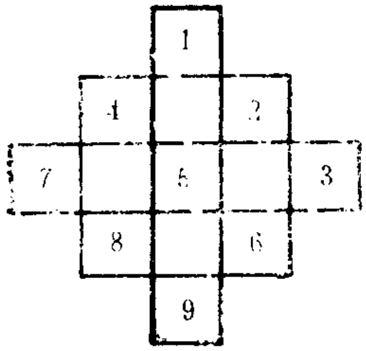


图1.2

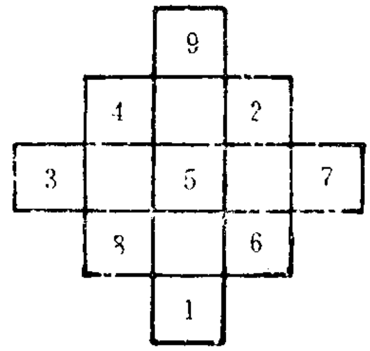


图1.3

块移近．于是我们就得到了图（1.1）．这个方法记载在1275年宋朝的大数学家杨辉写的《续古摘奇算经》书上。他写到："九子斜排，上下对易，左右相更，四维挺进，戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足．"杨辉称这种图为"纵横图"，而且是第一个中国数学家对这方面的深入研究．后来外国人也开始研究杨辉研究过的洛书，并且把它推广，即将1、2，…，n^2个自然数放进由n^2个小正方形组成的正方形方阵里，要求纵、横及对角线的和都相等，满足这些要求的方阵称为"n阶纵横图"，国外称为"n阶魔术方阵"或"n阶幻方"．这样洛书就是三阶纵横图或三阶幻方．由于

$$16+2+3+13=34,\quad 5+11+10+8=34,$$
$$9+7+6+12=34,\quad 4+14+15+1=34,$$
$$16+5+9+4=34,\quad 2+11+7+14=34,$$
$$3+10+6+15=34,\quad 13+8+12+1=34,$$
$$16+11+6+1=34,\quad 13+10+7+4=34.$$

所以图（1.4）就是一个四阶的纵横图．现在我们要推广杨辉的方法来算出一个五阶的纵横图，也就是说我们在二十五个小方格的上面写上从1开始到25。然后我们根据杨辉的九子斜排，改为二十五子斜排就得到图（1.5），在图（1.5）中居上的有1、6、2．居下的有24、20、25．然后再根据杨辉的上下对易，把1调到19的上面，把2调到20的上面，把6调到24的上面，就得到图（1.6）．然后再把图（1.6）居下的调到上面去，即把24调到12

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

图1.4

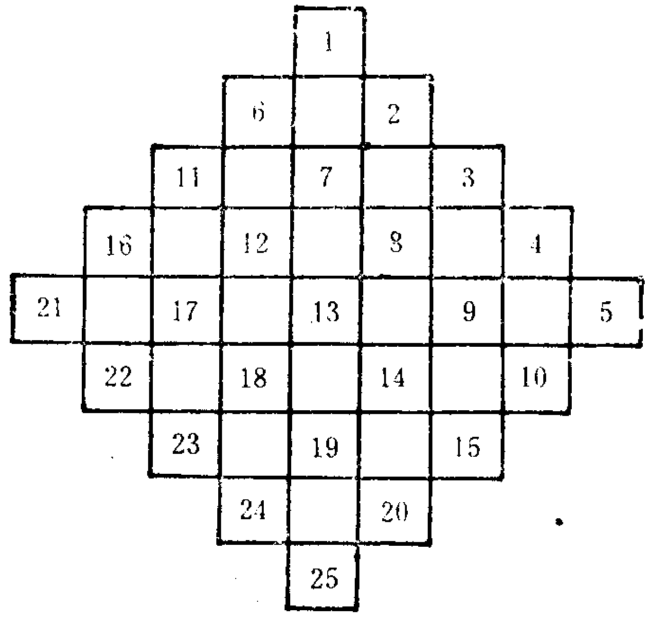


图1.5

的上面，把20调到 8 的上面，把25调到13的上面，这样就得到图（1.7）．最后我们来进行左右相换，居左的有16、21、22，居右的

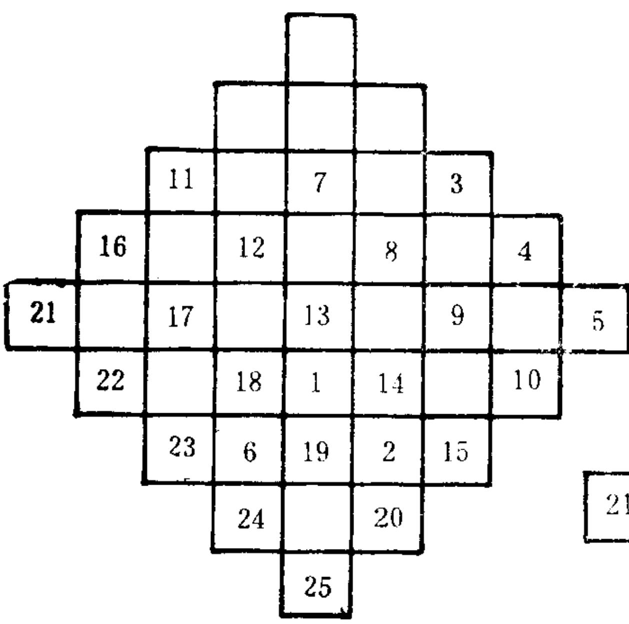


图1.6

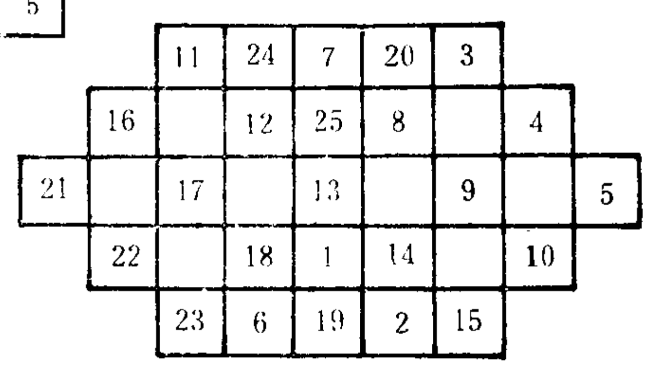


图1.7

有 4 、 5 、10．现在我们把居左的16调到 8 的右边去，把22调到14的右边去，把21调到13的右边去．这样我们就得到图（1.8）．

然后再把图（1.8）中居右的 4 调到12的左边去，把10调到18的左边去，把 5 调到13的左边去，这样就得到图（1.9），这就是我们所需要的五阶纵横图。

11	24	7	20	3		
	12	25	8	16	4	
17		13	21	9		5
	18	1	14	22	10	
23	6	19	2	15		

图1.8

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

图1.9

由于

$11+24+7+20+3=65,$ $11+4+17+10+23=65,$

$4+12+25+8+16=65,$ $24+12+5+18+6=65,$

$17+5+13+21+9=65,$ $7+25+13+1+19=65,$

$10+18+1+14+22=65,$ $20+8+21+14+2=65,$

$23+6+19+2+15=65,$ $3+16+9+22+15=65,$

$11+12+13+14+15=65,$ $3+8+13+18+23=65,$

所以图（1.9）就是一个五阶的纵横图.

由于

$27+29+2+4+13+36=111,$

$9+11+20+22+31+18=111,$

$32+25+7+3+21+23=111,$

$14+16+34+30+12+5=111,$

$28+6+15+17+26+19=111,$

$1+24+33+35+8+10=111,$

$27+9+32+14+28+1=111,$

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10

图1.10

$$29+11+25+16+6+24=111,$$
$$2+20+7+34+15+33=111,$$
$$4+22+3+30+17+35=111,$$
$$13+31+21+12+26+8=111,$$
$$36+18+23+5+19+10=111,$$
$$27+11+7+30+26+10=111,$$
$$36+31+3+34+6+1=111.$$

所以图（1.10）就是一个六阶的纵横图.

下面我们将证明不存在有二阶魔术方阵。我们使用反证法来证明这个命题：假设存在有二阶魔术方阵，设其如下图

a_1	a_2
a_3	a_4

则由二阶魔术方阵的定义，a_1，a_2，a_3，a_4应该满足下面的条件：$1 \leqslant a_i \leqslant 4$（其中$i=1$，2，3，4）且当$i \neq j$时，$a_i \neq a_j$（其中$i$，$j=1$，2，3，4）又应有

$$a_1+a_2=a_3+a_4, \qquad (1.1)$$

$$a_1+a_3=a_2+a_4. \qquad (1.2)$$

将（1.1）式的两边分别减去（1.2）式的两边，则我们得到

$$a_2-a_3=a_3-a_2,$$

即是

$$a_2=a_3,$$

这与$a_2 \neq a_3$发生矛盾，因而不存在有二阶魔术方阵。

由于n阶魔术方阵中的所有整数的和是

$$1+2+3+\cdots+n^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2},$$

又由于n阶魔术方阵总共有n行，所以n阶魔术方阵的每行(或每列或每条对角线）的数值都等于

$$\frac{n^2(n^2+1)}{2}\div n=\frac{n(n^2+1)}{2}.$$

【例1.1】 证明三阶魔术方阵中，5一定要在方阵的中间.

证明：由三阶魔术方阵的定义，这九个数是1，2，3，…，9，其每行（或每列或每条对角线）的三个数的和为

$$\frac{3(9+1)}{2}=15.$$

我们首先看一下1和9能不能放在方阵的中间．若把1居中，剩下来的八个数都在1的周围，则2一定与1处于同一行（或同一列或同一条对角线）里，由于$1+2=3$，因而与它们处于同一行(或同一列或同一条对角线)的另一个数应为$15-3=12$，而三阶魔术方阵中没有12这个数，所以1不能居中。又若把9居中，则剩下来的八个数应置于它的周围，因而8一定要与9处于同一行（或同一列或同一条对角线）里，但是$8+9=17$，这已经超过15了，所以9也不能居中.

现在我们设a居中（其中$2\leqslant a\leqslant 8$），则剩下来的八个数都应在它的周围，因为$a\neq 9$，所以我们可以取出9来，9一定与a排在同一行（或同一列或同一条对角线）．我们又设与9和a在同一行（或同一列或同一条对角线）的另一个数为b，由于$b\neq 9$，所以$1\leqslant b\leqslant 8$．同时还应有

$$15=9+a+b\geqslant 9+a+1=10+a,$$

即是

$$a\leqslant 5. \tag{1.3}$$

另一方面，当a居中时，因为$a\neq 1$，所以我们又可以取出1来，它一定与a处于同一行（或同一列或同一条对角线），我们设与1和a处于同一行（或同一列或同一条对角线）的另一个数为c（其中$2\leqslant c\leqslant 9$），则应有

$$15=1+a+c\leqslant 1+a+9=10+a,$$

即是

$$a\geqslant 5. \tag{1.4}$$

由（1.3）和（1.4）式，我们立即得到$a=5$. 故本例题得证.

【例1.2】 是否存在一个四阶魔术方阵，具有形式

2	3	…	…
4	…	…	…
…	…	…	…
…	…	…	…

解：我们设四阶魔术方阵为

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

按四阶魔术方阵的定义，应该有$1\leqslant a_{ij}\leqslant 16$（其中$i$，$j=1,2,3,4$），并且每一行（或每一列或每一条对角线）上的四个数的和为

$$\frac{4(4^2+1)}{2}=34$$

现在我们假设存在有本例题所给出的形式的四阶魔术方阵，即若有$a_{11}=2$，$a_{12}=3$，$a_{21}=4$，则我们有

$$2+3+a_{13}+a_{14}=34,$$

和

$$2+4+a_{31}+a_{41}=34,$$

即是

$$a_{13}=a_{14}=29, \tag{1.5}$$

$$a_{31}=a_{41}=28. \tag{1.6}$$

在1到16这十六个数中，两数（其中这两数是不同的）之和