大学数学

「美」E·克拉默著

舒五昌
周仲良 编译

复旦大学出版社

大学数学

〔美〕 E·克拉默 著

舒五昌 周仲良 编译

复旦大学出版社

内容简介

本书根据数学概念的发展，深入浅出地介绍了现代数学的基础知识，其中还穿插引用了不少数学史实和重要数学家的生平轶事，并着重对现代数学的思想和方法进行了分析和论述。

本书内容翔实，叙述生动，讲解通俗，是一本普及现代数学知识的读物，可用作"现代数学概论"的教材或教学参考书。此外，自学者可将本书作为学习数学的入门书，大学生可把它作为课外阅读的参考书。对于大中学校数学教师和一般科技工作者，本书也有参考的价值。

大学数学

〔美〕E·克拉默著　舒五昌　周仲良编译

复旦大学出版社出版

（上海国权路579号）

新华书店上海发行所发行　复旦大学印刷厂印刷

开本850×1168　1/32　印张22　插页0　字数552千

1987年6月第1版　1987年6月第1次印刷

印数1—12,000

统一书号：13253·035　定价：4.65元

编译者说明

这是一本现代数学知识的普及读物。原书作者根据数学概念的发展，运用螺旋式推进的方法，深入浅出地展示了现代数学丰富多采的内容。为了帮助读者理解现代数学的本质，作者在介绍一些主要数学分支基础知识的同时，还穿插引用了不少有趣的数学史实和数学家生平轶事，并着重对现代数学的思想和方法进行分析和论述。此外，本书对近几十年来数学上一些意义重大的进展也有所介绍。

众所周知，数学在人类文化中占有重要的地位，而且很早就是人们研究自然科学的工具。近年来，现代数学又迅速地向社会科学的各个领域渗透。当前，有些大学文科和理工科开始设置数学概论等课程，各方面也都有愈来愈多的人迫切希望了解现代数学的基本内容和思想方法。但是，现有数学书籍多半是为专门攻读有关数学课程的读者编写的，因此一般读者由于种种原因难以读懂。*"The Nature and Progress of Modern Mathematics"*（现代数学的本质与成长）一书，内容翔实，叙述生动，讲解通俗，对读者的数学基础要求不高，是一本适应各方面的人学习大学数学的良好读物。根据需要，读者既可通读全书，涉猎现代数学各个领域，也可选读某些章节，领略数学中某一分支论述的基本课题。本书可以作为大学现代数学概论课的教材或教学参考书。此外，自学者可将它作为学习数学的入门书，大学生可把它作为课外阅读的参考书。对于大中学校数学教师和科技工作者，本书也有一定的参考价值。

由于原书篇幅较大，因此我们采取了编译的方法，尽量保留数学的实际内容，删去与现代数学关系似不很大的材料，许

多章节作了精简或改写，并将书名改为《大学数学》。原书中有些叙述不够确切，我们作了更正和说明，同时还补充了近年来取得的若干重要的数学成果。

本书第九章是请谭永基同志协助译出的。舒五昌翻译了第二、三、七、十七—二十、二十二—二十五、二十七章；其余各章全由周仲良译出，他还对全书编译稿进行了复校和润色。此外，在编译过程中，徐诚浩、卞国瑞、唐同诰、龚少明等同志曾审阅过部分编译稿，提出了许多修改的意见，我们在此向他们表示衷心的感谢。

苏步青先生为本书题写了书名，我们借此机会向他表示敬意和谢忱。

1985年6月

目　录

第一章　从巴比伦数学到电子计算机

公元前2000年左右，巴比伦数学在世界上名列前茅。以前归功于希腊人的许多伟大思想无疑都源出于古代的美索不达米亚文明。巴比伦代数一直到公元十二世纪还在印度产生着影响，而西方世界却在文艺复兴时期以前对数学这门学科还没有作出什么重要的贡献。本章中，我们将首先考察集合这个基本的数学概念；然后介绍一下巴比伦人利用“数位”造出的计数系统。

现代数学的逻辑表明，许多数学概念都可用集合这个概念来定义或说明。人类在最初使用数的时候，就已涉及到集合的思想。

一个集合就是一组具体的或抽象的事物，而这些事物则可称为这个集合的*元素*。组、类、族等等都是“集合”的同义词。例如，可说一群人，一批学生，一组图画，一点想法，等等。甚至还可考虑元素本身就是集合的情况，例如，几套瓷器构成的集合，某校各个班级构成的集合，装有火柴的若干盒子构成的集合，某一小镇上所有双胞胎构成的集合，等等。

有限集的元素可以一一列出，但要将全部计数用数列出就不可能。全部计数用数构成的集合称为*自然数集*，记为{1,2,3,4, …}，其中省略号表示这一符号序列没有终点。我们尽管无法列出这一集合的全部元素，但仍可用“计数用数”这一名字将这个集合定义出来，这是集合中所有元素共有的一个性质，但其它数则不具备这一性质。用一句话来定义，这是给具有

“无限多”元素的集合作出定义的唯一途径。此外，这种定义方式也适用于有限集。例如，说“美国最早的两位总统”，这就完全确定了由这两个人构成的集合，至于他们两人的名字倒可以不说。

数学上，在许多场合，集合与用于定义集合的性质可以混用。不过，两者之间有着本质的不同，因为一个具体集合是一个唯一确定的整体，而它的元素却可有许多条不同的共性。以上一段所定义的那个集合为例，我们也可说“十八世纪选出的美国总统”，这句话所刻划的集合就完全相同。又如，塞缪尔·琼斯写了一本新近非常畅销的书，研究华盛顿和阿达姆这两位总统。我们也可将所论集合定义为由“琼斯在书中研究的人”构成的集合。

现在，回过头来谈谈促使我们讨论集合概念的背景，也即谈谈原始人需要在他们所处的周围环境中为一些具体集合计数的问题。人类学家发现，在许多部落里，若有一个未开化的人要说“砍倒两棵树”，“有两个孩子”，“有两条小船和两根木棍”，等等，他还会根据不同场合用不同的词来表示“二”这个概念。这些人头脑里还未建立起“二”这个纯粹的或抽象的概念。“二”是许多集合共有的特性，如人的眼睛、手、脚、耳朵、双胞胎等等。

后来，对于可用符号 {••} 或 {| |} 来代表的任何集合，原始人开始用同一个词汇来描述，以表示出“二”这个概念，此时，他们对数有了更为抽象的了解。也许，他们会将花括号中的东西设想成两块石子或两根木棒，事实上，他们在后来也许干脆就用“‖”或“=”作为“二”的记号了。

上述之比较和计数的过程，可用一个适当的定义说得更为正规些：当且仅当两个集合的元素可以一一匹配，也即其中任一集合的每个元素在另一集合中都有唯一的元素与之相配时，

这两个集合称为是一一对应的。在一一对应的情况下，又说两个集合的基数相同。例如，戏院里的座位集合与为某场演出所印的票子的集合是一一对应的，比方说，这两个集合的基数都可用1250来表示。

在现代的数学理论中，对于一个给定的集合，它的基数有时也被说成是一个特征数，这一特征数为与该集合构成一一对应的所有集合所共有。根据这样的说法，一个具体的基数就可用来定义一整类集合，这些集合彼此之间可以建立一一对应的关系。用罗素的话来说，一个给定集合的基数就是与之一一对应的所有集合构成的集合。罗素将这一思想归之于德国逻辑学家弗雷格（1848—1925）。我们看到，这个集合的各个元素都是集合，而给定集合则是其中之一(因为它与自身一一对应)。罗素的说法就是前面所述结论之一例，也即一个集合与定义这个集合的性质是可以混用的。

若将早期人类的计数法看作现代弗雷格-罗素对基数所作的深奥解释的基础，那就犯了混淆时代的错误。不过，普通的议论和原始人的算术一样，也许上不了大雅之堂，但孩子们正是通过前者学会说话的，因此我们也不妨利用原始计数法对数的意义作出进一步的分析。

在利用匹配（即一一对应）的办法确定一个给定集合的大小或基数的时候，我们远古时期的祖先使用了永远是现成的标准模型——关于“二”，有眼睛；关于“四”，有动物的腿；关于“五”，有一只手；等等。为一致起见，可以设想，有一个部落，他们用小石块构造出一些标准的集合：{•},{••},{•••},等等。这样，若要数出一群羊中有多少头羊，这些原始人就会设法将这一羊群与某一石块集合作比较。也许会失败，因为羊的头数可能比这个所选的标准集合中石块数要多一些或少一些。从而需要与另一标准集合相比较，重复这一做法，直到取得一一

对应才结束。

在原始社会中，上述计数法也许是很好的，反正那时人们感到兴趣的集合比较小，进行比较的标准集合就不需要太多，从而也无需作很多次尝试。另一方面，绘图员和机修工总需要将各种工具整齐地放置在工具箱内，现代人也需要为这些标准集合制订出一些规则来。因此，如若人们要随时应用某一基数，那就应为这些基数定出名称和符号。

给一个已知集合计数，原始人或现代人也可不用尝试法与几个标准集合作比较，而用一种记筹法，也即在地上逐一放置一些小石块或小木棒，这与在纸上涂点或画杠是一样的。用此方法即可有条不紊地直接构造出一个个标准集合来。开始时是一点或一划，然后逐次加点或加划，直到求得与需计数的那个集合一一对应的标准集合。如用点记筹，造出的标准集合就与前面提出的那种集合相一致；若用划记筹，则会同时记下一些相继的数字，这些数字犹如一根根火柴，最早是中国人使用的，后来又为日本人采用，他们一直到十八世纪还在使用这种记数的方法。口头上计数时，则说“一、二、三、四”，等等。在此，“二”表示“一加一”；“三”表示“二加一”；“四”就是“三加一”等等。因此，如从我们称之为“一”的那个基数开始，每次都加上“一”，就能有条不紊地造出如图 1.1 所列的那种标准集合来（图上还记下了开头几个集合的中文名称、火柴梗形的数字和相应的阿拉伯数字）。

<table>
<tr><td>{.}</td><td>{. .}</td><td>{. . .}</td><td>{. . . .}</td><td>{. . . . .}</td></tr>
<tr><td>One</td><td>Two</td><td>Three</td><td>Four</td><td>Five</td></tr>
<tr><td>|</td><td>||</td><td>|||</td><td>||||</td><td>|||||</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
</table>

图 1.1

如果完全采用现代的做法，那还应在图 1.1 的这些标准集

合前面添上一个{ }，它称为零集或空集。通常用 $\varnothing$ 这个特殊的符号代表一个不包含元素的集合，即$\varnothing=\{\ \}$。我们给 $\varnothing$ 的基数命名为零，并用数字 0 表示。计数时虽然通常不说“零，一，二，三，…”，但记筹过程实际上是从空集开始的，因为在地上放置第一块石块或第一根木棒，可认为就是在空集上添加一样东西，得到标准集合序列中下一个标准集合。

逻辑上，人们非常强调一个实体与用来称呼这个实体的名称或符号之间的区别。例如，“张三”这个名字与名叫张三的人并不等同，而且此人也可有许多不同的叫法，例如，可给他起名为“张老三”，或称呼他为“张先生”，甚至可用他的工作证号码代表他，如此等等。同样，根据弗雷格和罗素的意思，{•••}的基数是与{…}一一对应的所有集合构成的集合，这个集合当然是与记号“三”或数字“3”不同的。但在实际中，一味强调事物与事物名称之间的区别，就不免显得书生气十足了。因此，一旦明白了事情的原委，就应该容许数学家无所顾忌地套用如下这样的语言来说话：“基数 3”就是“用数字 3 表示的基数”。事实上，就在下面这段里，我们将要使用这种较为简单的说法。

基数 1,2,3,4，…，称为计数数或自然数。但用更为深入的观点看，零也应列入计数数中，并位于上述序列之首。这样，计数数就与(有限的)基数集等同起来了。不过，因为零在传统上与计数过程无关，因此，集合{0,1,2,3,4,…}就被称为非负整数集。

如果图 1.1 中的标准集合是通过不断添加一块“石块”而有条不紊地得出的，那么每个集合就能与它后面的那个集合的一部分（即真子集）匹配（即能建立起一一对应的关系），而后者又能与再下面的一个集合的真子集匹配，如此等等。这样，一个标准集就能与序列中在它右面的任一集合的真子集匹配。换言之，任一标准集合的基数都小于序列中在它后面的任一集

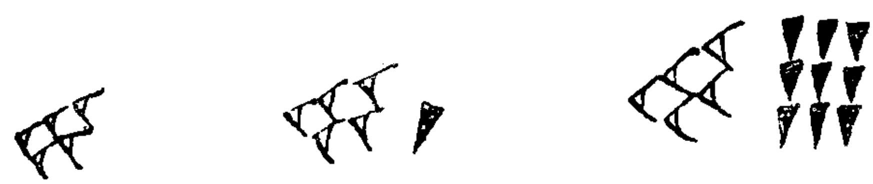
合的基数。例如，由于｛•••｝可与｛•••••••｝的一部分匹配，故有3＜7（3小于7）。

可以说，“真子集”这一关系能将各个标准集按次序排列起来。同样，“＜”这一关系也在各个自然数间确定了一种次序。因此，就次序而言，排好次序的各个标准集与由小到大排好的自然数是同构的，也就是说，这两个系统的形式相同，并且在抽象的意义上等价。同构在现代数学中是一个极为重要的概念，在一个系统中所作的推理也适用于与其同构的所有系统。在某些情况下，处理一个具体的系统比处理一个抽象的等价系统来得容易些。

我们已经描述过两种互为同构的系统，这两种系统给出了两种等价的计数方法。一种方法是记筹，也就是建立标准的集合；另一种方法是背诵序列中各数——一、二、三、四，等等。要是计数之集合较小，那么这两种方法都是令人满意的。不然的话，请想象一下，为了给一百万件东西记筹，该需要多少石块、木棒或笔划！为了给一百万件东西计数，竟要背诵一百万个不同的数字！据我们所知，巴比伦人在历史上最早意识到，这是不必要的麻烦，不管一个数多大，用几个符号来代表也就可以了。而且，我们可以相当有把握地认为，巴比伦人的祖先对此想法已略知一二。未曾开化的民族用手指计数，满一只手后，就将绳子打上一结，然后重复原来所用的数字继续下去，再次数到“五”时，在绳上打上第二个结，并再次从头数起。这样，数字和符号可以大为节省。由于计数时使用了手指和脚趾，所以选用的数制也常以五、十或二十作基。

苏美尔人的祖先肯定是沿着我们所述的路线前进的，他们选取的基为十，这一点可从苏美尔-巴比伦数字中看出。开头九个数字的符号与火柴型记法相似，只是竖划呈楔状而已：

接下去，这些原始人造出了一个记号 （不是在绳上打结），然后再重新开始。遇到第二个“十”时，就刻下另一个这样的记号，因而 表示二十。五十、五十一、五十九分别用以下符号表示：



五十　　　　五十一　　　　五十九

仅当需要表示较大的数字时，才有证据表明，“六十”也曾被用作数位系统的基。关于这种系统的本质，我们将在下面予以说明。

由于原始人只需为较小的集合计数，因此他们不很清楚怎样才能将十进制推广，以作出一般的结论。另一方面，如若我们的任务是为由卡片或硬币构成的较大集合计数，那就自然而然地会将它们十张一迭地放好，满到十迭时就装入一袋，即一百张；然后重新开始对余下的卡片或硬币计数，满到十迭再放入第二袋，如此等等。

用阿拉伯数字计数的系统就是十进制数位的系统。这就表明，有且只有十个符号：0,1,2,3,4,5,6,7,8,9。将这些符号放在不同的位置，就能表示一切有限基数。同一个符号用在不同的数位上，代表的意义就不一样。我们已经说过，计数就是将物件分组，先是十个一组，接着是十个十（即一百），再下

去是十个一百（即一千），等等。根据“位值”记数法，分组是通过数符的位置表出的。例如，8,439 表示 8 个一千，4 个一百，3 个十，9 个一。

要是人手有六个手指的话，那么六也许就是我们数系的基了。此时，写下的符号就会有不同的意义，不过，抽象的数学概念和方法仍然相同。写数时需用六个符号，也只需用六个符号——0,1,2,3,4,5。六则应记为10（1个六，0个一）；十二可写为20（2个六，0个一）；十八写为 30；三十五写为 55（5个六，5 个一），只用六个符号时，此数即为能够写出的最大两位数，下一个数三十六就要记为100。用此法写下去，555（5个三十六，5个六，5个一）是最大的三位数。下一个数为1000，它相当于十进制中的$6\times6\times6=216$。

如果人手有六个手指，那么也可用十二作基。有一个非洲部落，尽管他们并没有十二个手指，但在他们的数中也用十二作基，这就表明，他们在算术中已有某种了不起的认识，已经知道用此数作基有其优越性。用十二作基，需要十二个符号：

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,*#,

十二应写为 10（1个十二，0 个一）；十三写为 11，二十四写为 20；一百四十三写为 *#（11 个十二，加上 11 个一），只用十二个数符时，此数就是最大的两位数，因此下一个数就要记作100。

在十进制数系中，小数点右边各位分别代表十分之一、百分之一、千分之一等等。例如，0.462表示4个十分之一加上6个百分之一加上2个千分之一所得的和。利用普通的代数指数符号，可将十进制数系总结如下：小数点左边各位的值分别为 1（即10^0），10^1，10^2，10^3，10^4，等等；小数点右边各位的值分别为1/10（即10^{-1}），1/100（即10^{-2}），1/1000（即10^{-3}），等等。例如，7084.91002表示

$$7(10^3)+8(10^1)+4(10^0)+9(10^{-1})+1(10^{-2})+2(10^{-5})。$$

一般地，若数系的基为b，则小数点左边各位的值分别为b^0,b^1,b^2,b^3,b^4,等等；小数点右边各位的值分别为b^{-1},b^{-2},b^{-3},b^{-4},等等。

在苏美尔-巴比伦数系中，大于五十九的自然数以及小数都以六十为基。在六十进制数系中，54 这个记号表示 5 个六十加上 4 个一，相当于十进制中的三百零四。又如，在六十进制中，8.49表示8个一加上 4 个六十分之一 加上 9 个三千六百分之一所得的和。事实上，我们现在度量角度的方法就源出于巴比伦人的六十进制，但为了避免混淆起见，我们不写8.49，而用符号 8°4′9″，读起来就是 8 度 4 分 9 秒。这与上面说法一致，因为一度就是一个单位的角度，一分和一秒则分别是一度的六十分之一和三千六百分之一。

用作六十的楔形符号与一的符号相同，也是▼，要知道它代表六十而不是一，唯一办法是根据上下文作出判断。例如，若书中某表是按次序列出自然数的，那就可以断定，接在五十九后的竖直楔形符号代表六十。又如，楔形符号组▼▼≺≺▼▼▼可以理解为 $2(60^1)+23(60^0)=143$；但也可理解为 $2(60^2)+23(60^1)=8580$，可见巴比伦人还需要代表零的符号。这种符号后来终于创造出来了，它出现在有关数学的书板中。有证据表明，这个符号早在公元前 700 年就已造出，但直到最后阶段的巴比伦著作中，数的结尾仍然不用零的符号。若给这一缺陷穿上现代的服装，不妨设想去掉零后的十进制数系。如有

1　　　　2　　　　3

这是一百二十三，还是一万二百零三或一千二百三十？对于第一种情况，巴比伦人可将这个数的各个数字紧靠在一起，麻烦即可避免；第二个数可用符号 1-2-3 表示，其中两短划代表零；

但在第三个数中，这种混淆不清的现象则从未消除过。

一般认为，巴比伦人选择六十这个数为基，这是为了将算术运算与他们所用的硬币单位相适应而造成的结果。在远古时代，进行交换的基本媒介是大麦，后来就用诸如白银那样的贵重金属了。由于硬币尚未发明，因而价值是根据重量确定的。在重量换算表中，六十希克耳（shekel）相当于一米那（mina），六十米那相当于一塔伦特(talent)。重量和货币的这一计算方法就是六十进制数系的根源。以前，人们曾错误地认为，巴比伦人用六十作基，与他们将一年定为 360 天这种估计有关。太阳运动的轨道看上去是一个圆，这就涉及到将此圆作 360 等分。但我们在今天已经知道，巴比伦天文学一直到公元一世纪才发展到这样的阶段，而在最早的楔形文字书板中却已发现人们已经采用六十进制的数系。

巴比伦人是如何进行算术运算的呢？看来，加法和减法并没有麻烦；至于乘法和更高级的算术运算，巴比伦人广泛地使用了运算表。用 2,3,…,9 做乘法，今天的小学生需要记住乘法的口诀，而巴比伦的抄写员则需查对楔形文字的书板（其中有一块目前陈列在普鲁塞尔博览会上，在这块书板上列出了3,7,10,$12\frac{1}{2}$,16,24分别与2,3,…,9,10,20…,50等相乘所得的积。

巴比伦人认为，如能作整数和普通分数的乘法，就无必要引进除法，这一思想符合现代的观点。例如，可不考虑$7\div2$，只需作$7\times(1/2)$的乘法即可。其想法是，被一数相除，等价于乘上除数的倒数（也即关于乘法的逆元）。此外，除了零元外，初等算术中每一个数 x 都有关于乘法的逆元 $1/x$，也就是满足 $x\cdot1/x=1$ 的那个数。例如，3,4,1/5,2/9 关于乘法的逆元（或倒数）分别为 1/3,1/4，5，9/2。

人们已经挖掘到许多巴比伦的倒数表，并且作出了诠释。若用今天的数系译写其中一表，开头几个数字就可列出如下：