计算数学例题与习题

[苏] Н.В.Копченова
И.А.Марон 著
庄建南 林应举 译
包雪松 校

高等教育出版社

计算数学例题与习题

〔苏〕 Н. В. Копченова
И. А. Марон 著

庄建南
林应举 译

包雪松 校

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是一本例题和习题集．它向读者提供了一种计算数学解题手册．全书共分十章．每一节以提出问题开始，随后，给出运算公式、计算方案、误差估计，并对不同的计算方法，从它们的计算量，所获得的精度以及在计算机上解题的方便性等方面进行比较；再后，有若干典型问题解的细节，用以说明相应的算法．每节末尾有一定数量的习题，供读者独立地进行练习用，其中大多数附有答案．

本书可供计算数学专业与其它有关专业的大学生和研究生，从事科技计算的工作者以及广大工程技术人员参考．

计算数学例题与习题

［苏］ H. B. Копчеева
И. А. Марон 著

庄建南 林应举 译

包雪松 校

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 14 字数 337,000

1989 年 6 月第 1 版 1989 年 6 月第 1 次印刷

印数 00,001—3370

ISBN 7-04-001956-6/TP·38 定价 4.35 元

译 者 序

随着新技术革命的迅猛发展和电子计算机的日益普及，计算数学在各个领域中的作用愈来愈大，要求学习计算方法的人愈来愈多，但目前国内尚缺少有关计算方法的习题集，为此，我们翻译了苏联学者 Н. В. Копченова. И. А. Марон 所编的《计算数学例题与习题》一书．该书不仅可作为大专院校计算数学专业的教学参考书，而且可供从事科技计算的工作者及广大工程技术人员自学计算方法之用．

书中的习题既可以用袖珍计算器计算，也可以在微型计算机或大、中、小型计算机上进行练习．

我们是根据由 V. Shiffer 所译的英译本(莫斯科，1981)翻译的．遗憾的是在国内至今未找到该书的俄文原版．在翻译过程中，已将英译本中我们认为不妥之处作了某些修正，同时，对于所有例题都进行了复算，除对复算结果的最后一位数字稍有出入之处未作修改以外，其余有误之处都作了必要的校正．

本书由庄建南(第1—6章)与林应举(第7—10章)合译，包雪松同志校阅．

限于水平，译文中难免仍有不妥之处，欢迎读者批评指正．

译 者

1985年元月

前　言

不会熟练地应用近似分析和数值分析，就不可能合理地使用现代计算机技术. 这也就是近似计算方法的重要性之所以显著地增长的原因.

计算数学作为一门课程，在工程学院和经济学院的教学大纲中的地位日益提高，对教材的需要也随之增长. 对计算数学解题手册的需求尤感迫切.

本书是向读者提供一本这样的手册的一个尝试.

此书的结构如下：在每一节的开头，有一般关于提出这课题的简明导论，然后给出运算公式、计算方案、误差估计，并对不同的方法，从它们的计算量、所获得的精度以及在计算机上解题的方便性等方面进行比较. 随后，有解若干典型问题的细节，用以说明相应的算法. 在每一节的末尾，安排有一定数量的习题，供读者独立地进行练习之用，其中大多数附有答案.

为了更好地理解问题的本质，大多数提供了解案的问题都是经过挑选的，以使得它们的计算都不特别冗繁. 建议在讲授的开始阶段和分组学习时，可用台式计算机.

本书主要供工科学生使用，但对于经济系的学生，工科研究生，应用科学的在职研究生和科学工作者，也有参考价值. 我们要强调的是，本书的取材没有超出计算数学教学大纲的范围.

作者借此机会向 Kh. L. Smolitsky 和 I. M. Stesin 表示深切的谢意. 感谢他们审阅了本书的手稿. 他们的建议和评论有助于本书的改进. 我们也真挚地感谢 L. Z. Rumshisky，他承担了全书的编辑工作，并参与第一章和第六章的写作. 我们清醒地认识

到，此书出错在所难免，何况它是我国出版的第一本此类教学手册．因此，我们十分欢迎读者提出批评和建议，来信请寄117071，莫斯科V-71，列宁大道15号，科学出版社物理-数学文献主编室．

作　者

目　　录

* 即秦九韶方法．——译者注

第一章　近似计算和计算中的误差估计

1.1　近似数及其绝对误差和相对误差

在计算过程中，我们常常要遇到各种量的近似值，即近似数．初始数据给出时往往就带有某些误差，然后在计算过程中由于舍入误差、近似公式的使用以及其他因素，使这些初始误差一再被增大．合适的误差估计才能使我们确定运算的中间结果以及最终结果里应保留的数字的位数．

一个近似数 a 的误差，即它与其精确值 a_0 之间的差 $a-a_0$，通常是未知的．

估计近似数 a 的误差就是建立如下的不等式：

$$|a-a_0|\leqslant\Delta_a. \tag{1.1.1}$$

数 Δ_a 称为近似数 a 的**绝对误差**（有时也称为绝对误差界）．

一个近似数的绝对误差界是不小于其绝对误差的任何数．因此，从逻辑上说，凡大于一近似数的绝对误差界的数都可作为该近似数的绝对误差界．实际上，最好取满足不等式(1.1.1)的最小的数（在给定的情况下）作为 Δ_a．

在写绝对误差时一般给出两位到三位有效数字（计算有效数字的位数时，位于左边的那些零都不计入；例如数字 0.010030 有五位有效数字）．在一个近似数 a 中，不应保留那些按其绝对误差 Δ_a 而被舍入的数字．

例 **1**．测量一个房间，精确到 1 cm 时，得其长和宽分别为：$a=5.43$ m，$b=3.82$ m．当确定该房间的面积为 $S=ab=20.7426$

m^2 时，试估计其误差.

解. 根据假定，$\Delta_a=0.01$ m，$\Delta_b=0.01$ m. 面积的最大和最小可能值为：

$$(a+0.01)(b+0.01)=20.8352\ m^2,$$
$$(a-0.01)(b-0.01)=20.6502\ m^2;$$

将它们与上述确定的值 S 相比较，我们得到如下的估计：

$$|S-S_0|\leqslant 0.0926,$$

由此，我们将数 S 的绝对误差表示为 $\Delta_S=0.0926\ m^2$.

这里对 Δ_S 的值加以舍入是合理的，例如舍入成 $\Delta_S=0.093\ m^2$ 或 $0.10\ m^2$(绝对误差经常被舍入成一个较大的数!). 在此例中，面积的近似值可写成 $S=20.743\ m^2$，或写成 $S=20.74\ m^2$，甚至写为 $S=20.7\ m^2$.

例 2. 一台计算机按其设计仅能接受三位有效数字的数. 问数 π 和 $\frac{1}{3}$ 被输入进去后能有什么样的精度?

解. 取 $\pi\approx 3.14=a$ 代替 $\pi=3.141592\cdots$，数 a 的误差能用数 $\Delta_a=0.0016$ 来估计；取 $\frac{1}{3}\approx 0.333=b$，数 b 的误差能用数 $\Delta_b=0.00034$ 或 $\Delta_b=0.0004$ 来估计.

一个近似数 a 的相对误差 δ_a 是该数的绝对误差 Δ_a 与该数的模(绝对值)之比，即

$$\delta_a=\frac{\Delta_a}{|a|}\quad (a\neq 0). \tag{1.1.2}$$

相对误差常常表示成百分数，并且以两位或三位数字给出.

有时可将相对误差理解成比值 $\frac{\Delta_a}{|a_0|}$，这里 a_0 是数 a 的精确值(是未知的!)；如果数 a 的相对误差不超过百分之五，那末比值 $\frac{\Delta_a}{|a|}$ 与 $\frac{\Delta_a}{|a_0|}$ 之间的差异只影响误差的第二位数字，这是无足轻重的.

例 3. 确定例 1 中数 S 的相对误差.

解. $S=20.7426$, $\Delta_S=0.0926$, 因此有

$$\delta_S=\frac{0.0926}{20.7426}=\frac{926}{207426}=0.0045=0.45\%.$$

在许多应用科学和工程技术中，近似数的精度常常用它们的相对误差表示.

一个近似数的相对误差是与准确数字的位数相联系的. *准确数字*是从一个数的第一位有效数字一直数到它的绝对误差的第一位有效数字的前一位. 例如，具有绝对误差 $\Delta_S=0.0926$ 的数 $S=20.7426$ 有三位准确数字(2, 0, 7)，其余的数字都是存疑数字.

我们可以粗略地说，只有一位准确数字时，相当于其相对误差为 10% 的量级；有两位准确数字时，相当于其相对误差为 1% 的量级；有三位准确数字时，相当于其相对误差为 0.1% 的量级，等等.

在数学用表中所有的数都是被舍入到准确数字，即所有表示出来的有效数字都是准确的，并且绝对误差不超过所保留的末位数的半个单位. 例如，倘若一个表给出 $e=2.718$，则其绝对误差不超过 $0.5*10^{-3}$.

在计算的最后结果中，在全部准确数字之后只保留一位存疑数字.

在中间结果中，我们通常保留两位或三位存疑数字，为的是不会由于舍入而积累过多的误差.

例 4. 将例 1 中的已知数 $S=20.7426$ 舍入到准确数字.

解. 因为数 S 有三位准确数字，它可写成：

$$S=20.7.$$

然而，在此情况下，舍入时必须将被舍弃的量 0.0426 加到绝对误差 $\Delta_S=0.0926$ 上去. 由此所得到的新的绝对误差为 $\Delta_S=0.136$，这使得我们应将数 S 的第三位数字看作是存疑数字，因而有必要

将数 S 舍入成两位数字：

$$S=21 \quad (\Delta_S=0.44<0.5).$$

这个例子说明将计算结果舍入成准确数字并不总是可取的.

注：根据标准的做法，我们这里采用四舍五入法则：如果被舍弃的第一位数字大于等于 5，则所保留的最后一位数字加 1.

习　　题

1. 将下列各数舍入成三位有效数字，并确定所得的近似数的绝对误差 Δ 和相对误差 δ：

(a) 2.1514;　　(b) 0.16152;

(c) 0.01204;　　(d) 1.225;

(e) −0.0015281;　　(f) −392.85;

(g) 0.1545;　　(h) 0.003922;

(i) 625.55;　　(j) 94.525.

2. 已知下列近似数的相对误差，试确定其绝对误差：

(a) $a=13267$,　　$\delta=0.1\%$;

(b) $a=2.32$,　　$\delta=0.7\%$;

(c) $a=35.72$,　　$\delta=1\%$;

(d) $a=0.896$,　　$\delta=10\%$;

(e) $a=232.44$,　　$\delta=1\%$.

3. 测量某些角度时得到下列各数：

$\alpha_1=21°37'3''$;　$\alpha_2=45°$;　$\alpha_3=1°10''$;　$\alpha_4=75°20'44''$.

假定测量的绝对误差等于 $1''$，试确定数 α_1, α_2, α_3, α_4 的相对误差.

4. 已知数 x 及其绝对误差，试确定其准确数字的位数：

(a) $x=0.3941$,　　$\Delta_x=0.25*10^{-2}$;

(b) $x=0.1132$,　　$\Delta_x=0.1*10^{-3}$;

(c) $x=38.2543$,　　$\Delta_x=0.27*10^{-2}$;

(d) $x=293.481$,　　$\Delta_x=0.1$;

(e) $x=2.325$,　　$\Delta_x=0.1*10^{-1}$;

(f) $x=14.00231$,　　$\Delta_x=0.1*10^{-3}$;

(g) $x=0.0842$,　　$\Delta_x=0.15*10^{-2}$;

(h) $x=0.00381$, $\Delta_x=0.1*10^{-4}$;

(i) $x=-32.285$, $\Delta_x=0.2*10^{-2}$;

(j) $x=-0.2113$, $\Delta_x=0.5*10^{-2}$.

5. 已知数 a 及其相对误差，试确定其准确数字的位数：

(a) $a=1.8921$, $\delta_a=0.1*10^{-2}$;

(b) $a=0.2218$, $\delta_a=0.2*10^{-1}$;

(c) $a=22.351$, $\delta_a=0.1$;

(d) $a=0.02425$, $\delta_a=0.5*10^{-2}$;

(e) $a=0.000135$, $\delta_a=0.15$;

(f) $a=9.3598$, $\delta_a=0.1\%$;

(g) $a=0.11452$, $\delta_a=10\%$;

(h) $a=48361$, $\delta_a=1\%$;

(i) $a=592.8$, $\delta_a=2\%$;

(j) $a=14.9360$, $\delta_a=1\%$.

1.2 近似数的加法和减法

1. *若干个近似数的代数和的绝对误差等于这些数的绝对误差之和*：若

$$S=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

则

$$\Delta_S=\Delta_{a_1}+\Delta_{a_2}+\cdots+\Delta_{a_n}. \tag{1.2.1}$$

在项数很多时，以公式(1.2.1)来估计和数的绝对误差，往往变得过大，因为，相反符号的那些误差通常有一部分会相互抵销.

如果在这些项中，有一项的绝对误差实质性地超过其余各项的绝对误差很多，则可认为和数的绝对误差就等于这个最大的绝对误差. 在此情况下，和数中所保留的小数位数，最好要与有最大绝对误差的那一项的小数位数相同.

让我们举例说明近似数是如何相加以及误差是如何估计的.

例 1. 求近似数 0.348, 0.1834, 345.4, 235.2, 11.75, 9.27, 0.0849, 0.0214, 0.000354 的和，假定它们的全部数字都是准确的，也就是假定每一项的绝对误差不超过所保留的末位数的半个单位.

解. 两个数 345.4 和 235.2 有最大的绝对误差 $\Delta=0.05$. 从而我们可以将和数的绝对误差看作为 $2\Delta=0.10$. 由于项数不多，我们只保留一位多余的数字，即将各数舍入到 0.01:

$$\begin{array}{r}345.4\\235.2\\11.75\\9.27\\0.35\\0.18\\0.08\\0.02\\0.00\\\hline S=602.25.\end{array}$$

在最后的结果中舍去多余的数字，得到

$$S=602.2.$$

我们将上述的绝对误差 0.10 加上舍入误差 0.05，得到

$$\Delta_S=0.15 \quad 或 \quad \Delta_S=0.2.$$

值得注意的是，在本例中如果按公式(1.2.1)将所有各项的误差都加进去，那将使得计算更加麻烦且仍不可能得到本质上更精确的结果.

2. 当相加的项都具有同样的符号时，它们和数的相对误差不超过其中任何一项的最大相对误差：

$$\min \delta_{a_k} \leqslant \delta_S \leqslant \max \delta_{a_k} \quad (a_k>0,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \quad (1.2.2)$$

例 2. 估计例 1 中和数的相对误差并将其与各项的相对误差作比较.

解. 和数 S 的相对误差是:

$$\delta_S=\frac{0.10}{602.25}=0.017\%,$$

那些相加数的相对误差分别是

$$\frac{0.5}{348}=0.15\%;\quad \frac{0.5}{1834}=0.027\%;\quad \frac{0.5}{3454}=0.015\%;$$

$$\frac{0.5}{2352}=0.022\%;\quad \frac{0.5}{1175}=0.043\%;\quad \frac{0.5}{927}=0.054\%;$$

$$\frac{0.5}{849}=0.059\%;\quad \frac{0.5}{214}=0.24\%;\quad \frac{0.5}{354}=0.15\%.$$

我们看到和数的构成主要来自于 345.4 和 235.2 这两项，它们分别具有相对误差 0.015% 和 0.022%，而和数的相对误差正是介于这两个相对误差之间.

3. 两个正数之差的相对误差大于这两个数各自的相对误差，特别当它们几乎相等时(即它们的差与它们本身相比为小量时)尤其如此. 这就是所谓相近的数相减时的精度耗失，在选择计算方案时，这一点应该予以考虑.

例 3. 已知数 $a=1.137$ 和 $b=1.073$，它们具有绝对误差 $\varDelta_a=\varDelta_b=0.011$. 试估计它们的差 $c=a-b$ 的误差.

解. $c=0.064,\quad \varDelta_c=\varDelta_a+\varDelta_b=0.022,\quad \delta_c=\dfrac{22}{64}=35\%.$

由此可见，尽管这两数本身的相对误差仅为

$$\delta_a\approx\delta_b\approx1\%,$$

而最后结果却没有一位是准确的.

例 4. 利用四位三角函数表计算 $1-\cos1^\circ$ 并估计其结果的误差.

解. 从表中直接查出 $\cos 1°$,得知

$$a=\cos 1°=0.9998,\quad \Delta_a=0.00005,$$

从而 $$b=1-\cos 1°=0.0002,\quad \Delta_b=0.00005.$$

由此得出相对误差

$$\delta_b=\frac{0.5}{2}=25\%.$$

让我们将计算 b 的公式变换成:

$$b=1-\cos 1°=2\sin^2 0°30'.$$

由同一个函数表,我们得到

$$c=\sin 0°30'=0.0087,\quad \Delta_c=0.00005,\quad \delta_c=\frac{0.5}{87}=0.58\%,$$

$$b=2c^2=0.000151,\ \delta_b=\delta_{c^2}=2\delta_c=1.16\%\text{(见 1.3 节)},$$

因而有 $$\Delta_b=b\delta_b=0.000151*0.0116=0.0000018.$$

由此可见,这一变换可使我们计算出所要求的数 b 具有两位准确数字,而且其相对误差缩小到不到原来的二十分之一.

习　题

1. 求近似数的和并指出其误差:

(a) $0.145+321+78.2$(全是准确数字); (b) $0.301+193.1+11.58$(全是准确数字); (c) $398.5-72.28+0.34567$(全是准确数字); (d) $x_1+x_2-x_3$, 其中 $x_1=197.6$, $\Delta_{x_1}=0.2$, $x_2=23.44$, $\Delta_{x_2}=0.22$, $x_3=201.55$, $\Delta_{x_3}=0.17$.

1.3 近似数的乘法和除法

1. 当近似数相乘和相除时它们的相对误差(不是绝对误差!)相加,表达式

$$r=\frac{a_1a_2\cdots a_m}{b_1b_2\cdots b_n}\tag{1.3.1}$$

的相对误差用量