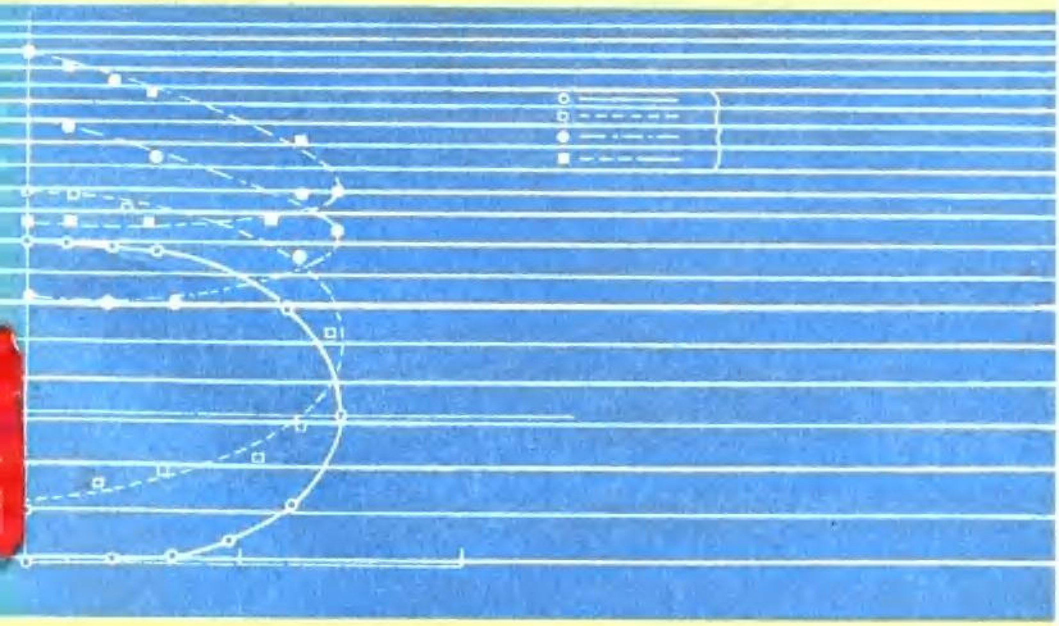
塑性力学引论

（修订版）

王 仁 黄文彬 黄筑平 著

北京大学出版社



塑性力学引论

（修 订 版）

王 仁 黄文彬 黄筑平 著

北京大学出版社

新登字（京）159号

塑性力学引论（修订版）

王 仁 黄文彬 黄筑平 著

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

850×1168毫米 32开本 11印张 280千字

1992年5月第一版 1992年5月第一次印刷

印数：00001—3,000册

ISBN 7-301-01665-4/O·264

定价： 7.40 元

内 容 简 介

本书先通过对简单应力状态下的问题分析，建立塑性力学中的物理概念，然后再逐步将有关的基本概念推广到复杂应力状态中去。难点分散，由浅入深，是一本为初学者易于接受的入门性教材。第一版出版于 1982 年，曾获 1988 年国家教委优秀教材二等奖。

修订版结合国内外二十年来塑性力学的研究进展以及作者长期的教学与研究实践对第一版做了较大的修改。加强了基本概念和问题提法的准确性以及理论上的严密性，可供理工科大学力学及相关专业的师生、科技人员学习参考。

修订版前言

《塑性力学引论》是一本为初学者所写的入门性教材．该书的初版为王仁、黄文彬所著，出版于1982年．它是自五十年代以来，在为北京大学数力系力学专业学生开设塑性力学课程的讲义基础上写成的．初版的主要特点是难点分散、由浅入深、循序渐进。在前两章中，初学者可以通过对简单应力状态下的问题分析树立塑性力学中的物理概念，了解处理问题的方法和特点．然后，再逐步将有关的基本概念推广到复杂应力状态中去，使学生能够较顺利地掌握塑性力学的主要内容．初版曾于1988年获得国家教委优秀教材二等奖．

由于塑性力学不仅是断裂力学、损伤力学等许多研究领域的理论基础，而且在结构分析，金属压力加工和其它一些工程实际问题中有着重要的应用．因此，近二十年来，国内外在塑性力学的研究方面一直是很活跃的．近年来，我国已经出版了相当一批有关的教科书[14-28]，它们都各有其自身的特点和侧重面．不过，作为一本少学时的入门性教材，我们感到应把重点放在正确建立基本概念和基本理论上．为此，在王仁教授指导和建议下，黄筑平根据多年教学实践经验并结合塑性理论的近代进展对初版做了较大的修改．在力图保留初版的体系和特点的前提下，更加强调了基本概念和问题提法的准确性以及理论上的严密性，使通常塑性力学书籍中在有关概念上出现的一些含混之处得到了澄清．这不仅对初学者是重要的，而且对曾经学过塑性力学的人来说，在理解近代文献方面也是有裨益的．

鉴于目前已出现不少介绍有限元方面的专著，本修订版删去了初版关于有限元方法的第八章．其余几章的主要增改内容有：

在前两章中，通过对简单问题的分析，除初版所引进和介绍的约束塑性变形的概念、强化和几何非线性对弹塑性解的影响、加载路径对解的影响等外，还增加了结构物的弹性极限曲线（面）以及它与残余应力状态的关系，结构物的塑性极限曲线（面）的基本性质，安定状态分析等问题的讨论。第三、四章改为在引进内变量的基础上来讨论屈服曲面、加载曲面和本构方程。突出了应力空间描述和应变空间描述的对偶关系以及在应变空间中给出加、卸载准则的合理性。强调了稳定材料假设，Drucker 公设和伊留辛公设等关于材料性质假设的区别和联系，并在此基础上讨论了它们与建立本构方程之间的关系。另外，还增加了关于全量理论适用范围的极值路径的讨论。在第五、六章关于增量理论和全量理论的弹塑性力学边值问题的提法中，增加了对解的唯一性和间断条件的讨论。在柱体扭转和平面应变问题中，对间断线的性质做了更详细的介绍。在关于平面应变问题完全解的讨论中，给出了塑性区内塑性功率非负的基本不等式以及对刚性区进行校核的具体实例。第七章对全量理论的势能原理和余能原理进行了更为深入的讨论。在安定分析中，增加了关于静力安定定理和机动安定定理的证明。在以上所增加的内容中，有些章节是带“*”号的。根据教学的具体情况，这些带“*”号的部分也可略去不讲。

在文献[12]的基础上，本书对各章的习题作了较大的调整和充实，书后还附有关于习题的详细提示和解答，便于自学者查用。

在本书初版的使用期间，许多兄弟院校教师以及各届同学曾提出过有益的意见，仅在此表示深切的谢意！

作者

1989年10月

目　录

第一章　简单应力状态下的弹塑性力学问题

§1.1　引　　言

塑性力学往往是相对于弹性力学而言的。在弹性力学中，物质微元的应力和应变之间具有单一的对应关系。然而，材料在一定的外界环境和加载条件下，其变形往往会具有非弹性性质，即应力和应变之间不具有单一的对应关系。非弹性变形主要有塑性变形和粘性变形两种。塑性变形是指物体在除去外力后所残留下来的永久变形，在给定的外力下，物体的变形并不随时间而改变。粘性变形则随时间而改变。例如蠕变、应力松弛等现象就是粘性效应的反映。另外，在习惯上也用塑性和脆性这一对概念来区别物体在经受变形直至破坏时变形的大小。如果变形很小就破坏，便称是脆性的。这时材料的塑性变形能力较差，通常可近似地用弹性理论来进行分析直至破坏。如果经受了很大的变形才破坏，便称材料具有较好的韧性或延性，这时材料的塑性变形能力较强。在这种情况下，物体从开始出现永久变形到最终破坏之间仍具有承受载荷的能力。因此，为了发挥材料的潜力，就应该采用塑性力学的分析方法。当然，脆性和塑性之间并没有严格的界限。即使是脆性材料，其裂纹尖端附近的塑性变形也会对裂纹的扩展起重要的作用。

学习塑性力学的目的之一是研究在哪些条件下可以允许结构中某些部位的应力超过弹性极限的范围，以充分发挥材料的强度潜力。例如，当物体事先经受了某些塑性变形而获得有利的残余应力分布后，其承载能力就可能有较大的提高。其次是研究物体在不可避免地产生某些塑性变形后，对承载能力和（或）抵抗变

形能力的影响．最后是研究如何利用材料的塑性性质以达到加工成形的目的．例如，在加工过程中如何使物体内的变形更均匀，以防止材料的破坏，以及如何使施加的力最小或消耗的能量最少等等．

塑性力学是连续介质力学的一个分支，故研究时仍采用连续介质力学中的假设和基本方法．其基本方程有：①描述物体变形和运动的几何关系(位移-应变关系)，②守恒定律(如质量守恒，动量守恒，动量矩守恒和能量守恒等等)，③刻画材料物理状态和力学性质的方程（通常称之为本构方程）．前两类方程与材料性质无关，故是普遍适用的．连续介质力学各个分支(如弹性力学，粘弹性力学，塑性力学，流体力学等）的区别主要在于第三类方程的不同．这类方程的建立也是塑性力学研究的重点之一．当然，随之而来的也就会使塑性力学在处理问题的方法上有其自身的特点．

塑性本构方程的建立开始是以材料的宏观实验为依据的．随着研究的深化，就需要从不可逆过程热力学的观点和用更系统的研究方法来进行深入的探讨．有些人从塑性变形的微观机理出发，用宏观和微观相结合的方法来研究塑性变形的规律，这也是一个重要的研究方向．这些研究成果和理论正有待进一步的发展和完善，在这本简短的引论性教程中将不作讨论．在第一章和第二章里，我们将从简单应力状态入手，着重建立有关的物理概念，突出塑性力学的特点和研究方法，为以后几章的学习打下必要的基础．

§1.2 材料在简单拉压时的实验结果

研究塑性变形规律的最简单实验是金属多晶材料的单向拉伸或压缩实验．这类实验通常在室温下进行．试件如图1所示，在载荷P的作用下，试件的长度和横截面面积将由初始值l_0和A_0分别变为l和A．试件中部的应力和变形要求是均匀的，故可定

义名义应力 $\sigma = P/A_0$ 和名义应变 $\varepsilon = (l - l_0)/l_0$。材料的拉伸实验曲线有图 2 所示的两种形态。

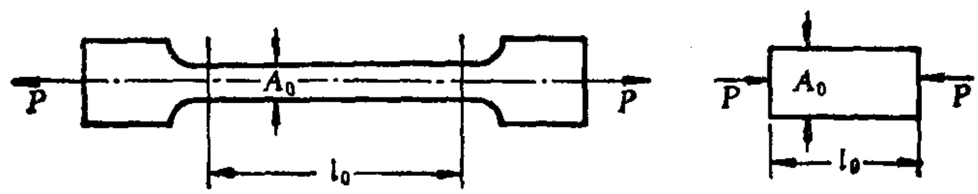


图 1

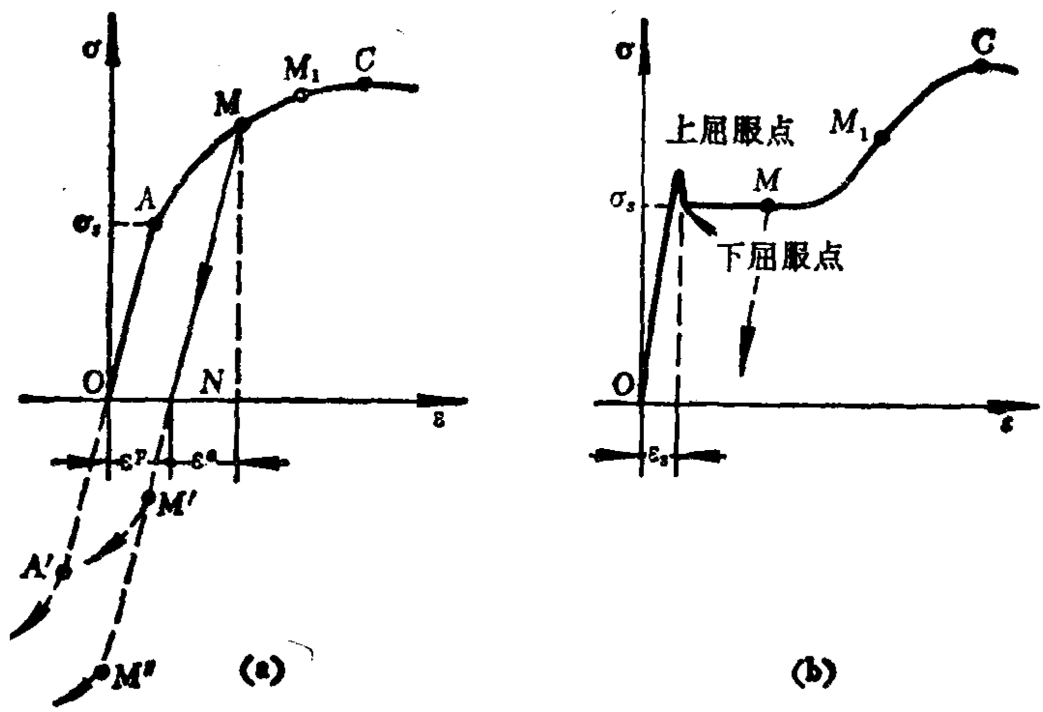


图 2

随着载荷的缓慢增加，应力和应变之间通常是成比例的。在到达比例极限以后，曲线开始向下弯曲，直到弹性极限。在弹性极限以前，如果卸去载荷而使应力下降到零，则应变也沿原有曲线下降到零。在应力超过弹性极限后，虽然应力降到了零，应变仍不为零，残留的这部分应变称为塑性应变 ε^p。产生和不产生塑性应变的分界应力就是弹性极限 σ_s。图 2(b)是关于低碳钢和某

些铝合金的拉伸曲线。这时在弹性极限以后有一个屈服阶段，即当应力（称为屈服应力）保持不变时应变仍然可以有很大的增长。如果 ε_s 对应于刚达到弹性极限时的应变，则屈服阶段末的应变可大到 ε_s 的十多倍。由于一般材料的比例极限、弹性极限和屈服应力相差不大，通常在工程上可不加区分，我们以后将用 σ_s 表示之，并统称为屈服应力。

如果在产生了不太大的塑性变形之后再逐渐减小载荷，则如图 2(a)中的 MN 线那样，应力和应变的变化规律基本上是一直线，其斜率大致上与最初加载时的斜率相同。这表明在产生塑性变形以后，材料内部的晶格结构并没有发生本质的变化。如果从卸载后的点 N 重新再加载，则开始时应力和应变之间仍按原始比例作线性变化，而在 M 点附近才急剧地弯曲并开始产生新的塑性变形。以后的曲线将沿 OAM 的延长线延伸，这就好像是把初始屈服应力 σ_s 提高到 M 点所对应的（屈服）应力 σ_M（它与塑性应变 ε^p 的大小有关），材料经过塑性变形得到了强化，因此，这种现象称为应变强化或应变硬化。

如果材料从 M 点卸载并进行反向加载，则对单晶体来说，其压缩时的屈服应力也有相似的提高（图 2(a)中的 M'' 点）。然而，对多晶体材料来说，其压缩屈服应力（M' 点）一般要低于一开始就反向加载时的屈服应力（A' 点），即图 2(a)中 M' 点应力的代数值要大于 A' 点应力的代数值。这种由于拉伸时强化影响到压缩时弱化的现象称为包氏效应（Bauschinger effect）。

由上述实验现象可归纳出以下两点：

1. 在材料的弹塑性变形过程中，应力与应变之间已不再具有单一的对应关系。由于加载路径的不同，同一个应力 σ 可对应于不同的应变 ε，或同一个应变 ε 可对应于不同的应力 σ。σ 与 ε 之间的关系依赖于加载路径（path-dependent）。人们通常是通过引进一组称之为内变量的宏观参量来刻画加载历史的。这组内变量刻画了材料在经受塑性变形过程后内部微观结构的变化。例

如，作为最简单的近似，可以取内变量 ξ 为塑性应变 ε^p，而将简单受拉（压）时的应力应变关系写为

$$\varepsilon = \sigma/E + \varepsilon^p \tag{1}$$

其中 E 为杨氏模量。上式表明，当 ε^p(内变量)一定时，σ 与 ε 之间有单一的对应关系。

2. σ 与 ε 之间的线性关系(1)式是有适用范围的。对于固定的内变量 ε^p，σ 或 ε 并不能随意地取值。例如，对处于图 2(a) 中的 M 点，当加载时即应力(或应变)继续增长时，应力应变曲线将沿 AMM_1 方向延伸，仅当卸载时即应力（或应变）减小时，应力应变曲线才以(1)式的规律沿 MN 方向下降。为了区分以上这种加载和卸载所具有的不同规律，就必须给出相应的加卸载准则。

现考察图 2(a)中的 N 点，其内变量可取为塑性应变 ε^p，从 N 点拉伸到 M 点或压缩到 M' 点后，材料将开始产生新的塑性变形（这里 M 点对应于正向屈服点，M' 点对应于反向屈服点）。故(1)式仅在直线段 $M'NM$ 的范围内（即弹性范围内）才适用。设 M 点的应力和应变分别为 σ_M 和 ε_M，M' 点的应力和应变分别为 σ'_M 和 ε'_M，它们依赖于 ε^p，故可写成

$$\sigma_M = \sigma_M(\varepsilon^p), \varepsilon_M = \varepsilon_M(\varepsilon^p)$$

和

$$\sigma'_M = \sigma'_M(\varepsilon^p), \varepsilon'_M = \varepsilon'_M(\varepsilon^p).$$

显然，它们还满足关系式

$$\sigma_M = E(\varepsilon_M - \varepsilon^p), \sigma'_M = E(\varepsilon'_M - \varepsilon^p).$$

现定义函数：

$$f(\sigma, \varepsilon^p) = \begin{cases} (\sigma - \sigma_M) & \text{（当正向加载时）,} \\ (\sigma'_M - \sigma) & \text{（当反向加载时）;} \end{cases} \tag{2}$$

或

$$g(\varepsilon, \varepsilon^p) = \begin{cases} E(\varepsilon - \varepsilon_M) & \text{（当正向加载时）,} \\ E(\varepsilon'_M - \varepsilon) & \text{（当反向加载时）.} \end{cases} \tag{3}$$

不难看出，对于固定的 ε^p，(1)式仅当 $\sigma_M \geqslant \sigma \geqslant \sigma'_M$ 或 $\varepsilon_M \geqslant \varepsilon \geqslant \varepsilon'_M$

时才适用，即仅当$f(\sigma,\varepsilon^p)\leqslant 0$或$g(\varepsilon,\varepsilon^p)\leqslant 0$时才适用。当$f(\sigma,\varepsilon^p)=0$或$g(\varepsilon,\varepsilon^p)=0$时，由于应力或应变的继续改变，所得到的应力应变关系要根据加卸载准则来判断。

$\dfrac{\partial f}{\partial\sigma}\mathrm{d}\sigma>0$或$\dfrac{\partial g}{\partial\varepsilon}\mathrm{d}\varepsilon>0$对应于加载。这时始终要求$f=0$或$g=0$，故有

$$\mathrm{d}\sigma=(\mathrm{d}\sigma)_M\ \ (\text{或}(\mathrm{d}\sigma)_{M'})$$

或

$$\mathrm{d}\varepsilon=(\mathrm{d}\varepsilon)_M\ \ (\text{或}(\mathrm{d}\varepsilon)_{M'}),$$

其中$(\mathrm{d}\sigma)_M$和$(\mathrm{d}\varepsilon)_M$分别为正向屈服时$M$点应力值和应变值的增量，$(\mathrm{d}\sigma)_{M'}$和$(\mathrm{d}\varepsilon)_{M'}$分别为反向屈服时$M'$点应力值和应变值的增量。

$\dfrac{\partial f}{\partial\sigma}\mathrm{d}\sigma<0$或$\dfrac{\partial g}{\partial\varepsilon}\mathrm{d}\varepsilon<0$对应于卸载。这时有

$$\mathrm{d}\sigma=E\mathrm{d}\varepsilon,$$

即卸载时应力增量与应变增量之间满足线弹性关系。

最后再简单提一下影响材料性质的其它几个因素。

1．**温度**　当温度上升时，材料的屈服应力将会降低而塑性变形的能力则有所提高。在高温条件下，就需要考虑像蠕变、应力松弛等具有明显粘性效应的现象。在本课程中将不准备讨论这些问题。

2．**静水压力**　Bridgeman对许多金属材料的实验结果表明，当静水压力不太大时，材料体积的变化服从弹性规律而不产生永久的塑性体积改变。故当材料有较大的塑性变形时（弹性变形相对地很小），可近似地认为体积是不可压的。此外，静水压力对屈服应力的影响也是不大的。

3．**应变速率**　如果实验时将加载速度提高几个数量级，则屈服应力也会相应地提高，但材料的塑性变形能力会有所下降，

对于受高速撞击载荷或爆炸载荷作用的结构，就需要考虑应变率效应对材料性质的影响。但在一般加载速度条件下，我们将不考虑这一因素。

§1.3 应力-应变关系的简化模型

将具体材料的简单拉伸（或压缩）实验曲线直接用于实际计算往往是很不方便的。为此，常常根据不同的问题，对不同材料在不同的条件下进行不同的简化。从而可得到基本上能反映该材料的力学性质而又便于进行数学计算的简化模型。最常用的模型有以下几种。

1. **理想弹塑性模型** 对于低碳钢或强化率较低的材料，在应变不太大时可忽略强化效应而简化为如图3所示的情形。假定拉伸和压缩时屈服应力的绝对值相同，则当应力从零开始作单调变化（不卸载）时，应力应变关系可写为：

$$\begin{cases} 当 |\sigma|<\sigma_s 时, & \varepsilon=\sigma/E \\ 当 |\sigma|=\sigma_s 时, & \varepsilon=\dfrac{\sigma}{E}+\lambda\,\mathrm{sign}\,\sigma \end{cases} \tag{4}$$

其中 λ 是一个非负的参数，而

$$\mathrm{sign}\,\sigma=\begin{cases} 1, & 当\ \sigma>0, \\ 0, & 当\ \sigma=0, \\ -1, & 当\ \sigma<0. \end{cases}$$

类似地，上式也可用应变表示为：

$$\begin{cases} 当 |\varepsilon|\leqslant\varepsilon_s 时, & \sigma=E\varepsilon, \\ 当 |\varepsilon|>\varepsilon_s 时, & \sigma=\sigma_s\mathrm{sign}\,\varepsilon, \end{cases}$$

其中 $\varepsilon_s=\sigma_s/E$。

2. **线性强化弹塑性模型** 当材料的强化率较高且在一定范围内变化不大时，可用两条直线来表示原有的正向拉伸或反向压

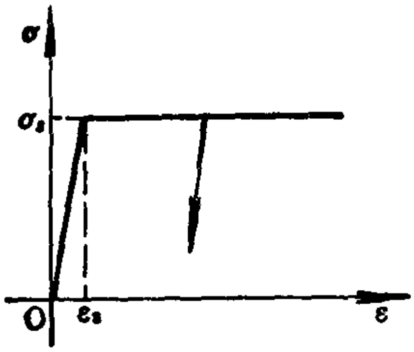


图 3

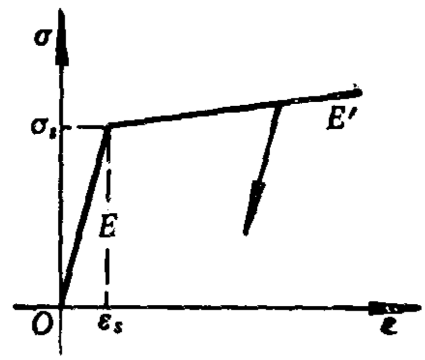


图 4

缩实验曲线（见图4）。如假定拉伸和压缩时屈服应力的绝对值和强化模量 E' 都相同，则当不卸载时，应力应变关系可写成：

$$\begin{cases} \text{当} |\sigma| \leqslant \sigma_s \text{时，} & \varepsilon = \sigma/E, \\ \text{当} |\sigma| > \sigma_s \text{时，} & \varepsilon = \sigma/E + (|\sigma| - \sigma_s)\left(\dfrac{1}{E'} - \dfrac{1}{E}\right) \operatorname{sign} \sigma. \end{cases} \tag{5}$$

类似地，上式也可由应变表示为

$$\begin{cases} \text{当} |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_s \text{时，} \sigma = E\varepsilon, \\ \text{当} |\varepsilon| > \varepsilon_s \text{时，} \sigma = [\sigma_s + E'(|\varepsilon| - \varepsilon_s)] \operatorname{sign} \varepsilon. \end{cases}$$

3．**一般加载规律**　对于一般的单向拉伸曲线，在不卸载时可将应力-应变关系写为

$$\sigma = \phi(\varepsilon) = E\varepsilon[1 - \omega(\varepsilon)], \tag{6}$$

其中

$$\omega(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{当} |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_s, \\ [E\varepsilon - \phi(\varepsilon)]/(E\varepsilon), & \text{当} |\varepsilon| > \varepsilon_s \end{cases}$$

表示图 5 (a) 中的线段比 $\overline{AC}/\overline{AB}$。上式在用迭代法求解问题时较方便。不难验证，对于线性强化材料，当 $|\varepsilon| > \varepsilon_s$ 时有

$$\omega(\varepsilon) = (1 - E'/E)[1 - \varepsilon_s/|\varepsilon|] \tag{7}$$

4．**幂次强化模型**　其加载规律可写为

$$\sigma = B|\varepsilon|^m \operatorname{sign} \varepsilon, \tag{8}$$

其中材料常数 B 和 m 满足条件 $B>0, 0<m<1$。这种模型在 $\varepsilon = 0$