高等学校教材

工程数学

复变函数

（第四版）

西安交通大学高等数学教研室 编

高等教育出版社

高 等 学 校 教 材

工 程 数 学

复 变 函 数

（第四版）

西安交通大学高等数学教研室编

高等教育出版社

(京) 112 号

责任编辑　丁鹤龄

图书在版编目(CIP)数据

工程数学:复变函数/陆庆乐主编;王绵森编．－4 版．—北京:高等教育出版社,1996

ISBN 7－04－005553－8

Ⅰ．工…　Ⅱ．①陆…②王…　Ⅲ．①工程数学②复变函数　Ⅳ．TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 19546 号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码:100009　传真:64014048　电话:64054588

新华书店总店北京发行所发行

北京朝阳北苑印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 8.875　字数 230 000

1978 年 12 月第 1 版　1996 年 5 月第 4 版　1997 年 5 月第 2 次印刷

印数 90 117—250 126

定价 8.30 元

内容提要

本书按照国家教委指示:"对质量较高,基础较好,使用面较广的教材要进行锤炼"的精神,结合《复变函数课程教学基本要求》的修订而修订的。作者除保持了第三版的主要优点,改正了课文、习题或答案中一些错误或不很确切的文字叙述外,还增写了每章小结,帮助读者抓住要点,提高学习效率。书中附有"*"号者,可供各专业选用。

本书内容是:复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射等,可供高等工科院校 各专业的师生作为教材使用。

第四版前言

根据国家教委高教司在“关于制订1991—1995教材建设规划的几点意见”文件中提出的:“对质量较高,基础较好,使用面较广的教材,要进行锤炼”的精神,工科数学课程教学指导委员会决定,在广泛征求使用意见的基础上,对工程数学——《复变函数》第三版进行一次锤炼修订,使其质量获得进一步提高.

我们收到了不少兄弟学校和地区的教师寄来的详细而全面的使用意见,且语多鼓励.经过认真仔细研究以后,限于篇幅,采纳了部分共同的意见.例如,取消了对“收敛半径的求法”,“函数在无穷远点的性态”和“在无穷远点的留数”各小节所标的“*”号.

为了帮助读者抓住学习要点,提高学习质量与效率,在这次修订中,我们在每章末增写了“小结”.其中除对本章主要内容进行简要的总结外,还对某些内容在概念与方法上作了进一步阐释,以帮助读者深入理解,牢固掌握.此外,对全书的习题作了一些调整,且略有增加;改正了第三版课文、习题或答案中的错误,并对一些不很确切的文字叙述作了修改.

我们谨向关心和帮助本书修订的工科数学课程教学指导委员会、对本书提出宝贵意见的兄弟学校同行、对本书精心审阅的西北工业大学孙家永教授,表示衷心的谢意.

本书第一、二章由王绵森执笔,第三、四、五、六章由陆庆乐执笔.

编者

1994年5月于西安

第三版前言

《复变函数》自从 81 年 4 月再版以来，不少学校采用该书作为教材. 从各方面反馈的信息来看，认为该教材对工科本科各专业是比较适用的. 同时对该教材也提出了一些改进意见.

在这一版中，我们作了如下的一些更动和修改：首先，根据国家教委 1987 年批准印发的《复变函数课程教学基本要求》，调整了标“**”的内容. 我们把原来有“**”的“留数在定积分计算上的应用”一节取消了双星号；把“平面场的复势”一节改为标“*”. 对《复变函数课程教学基本要求》中不列的项目以及相应的习题，在本版中除了复球面和收敛半径的求法以外，一律标“*”，供各有关专业选用. 另外，根据基本要求，增加了 $(1+z)^{\alpha}$ 的麦克劳林展开式. 其次，为了使有关的教学内容衔接得更加紧密，重点更加突出，我们理顺了个别内容的先后次序，将第二章中的“解析函数和调和函数的关系”一节移到了第三章的最后，作为第六节. 这样，就避免了在前面引用到后面才讲的关于“解析函数的导数仍为解析函数”这一结论的弊端. 第三，根据使用过该教材的同志的意见，我们对分式线性映射的保“对称性”这一重要结论给出了证明；对一些写得不够清楚和不够恰当的地方作了修改；还对全书的习题和答案再次进行了审核，改正了个别错误，并略有补充. 最后，修改和重绘了部分插图，并对一些“名词”和“术语”进行了统一.

我们热忱恳望使用和关心本教材的同志，对本书提出更多的宝贵意见，使它的质量能够不断地得到提高. 在这里，我们谨向对本书提过意见的同志表示衷心的感谢.

参加这次修订工作的是陆庆乐与王绵森两同志.

1989 年 7 月

第二版前言

这一版，我们是按照1980年6月在北京举行的高等学校工科数学教材编审委员会扩大会议审订的工程数学复变函数教学大纲（草案）修订的．超过大纲的内容都标了“*”号，供需要的专业选用．其中有“**”的是大纲中原已标了“*”的内容．

根据使用本书的教师所提出的意见，我们在这一版中增添了“复球面”、“函数在无穷远点的性态”及“函数在无穷远点的留数”等内容．“初等函数”、“泰勒级数”、“洛朗级数”各节，出于教学方法上的考虑，已予重写．例题与习题比第一版略有增加．为了便于挑选，按内容的先后，调整了习题的次序．对书中一些不妥之处和错误，作了改正．

许多用本书的教师和读者诚恳地给我们提出本书不足之处以及印刷上的错误，我们在此表示感谢．希望今后再有发现时，能及时告诉我们，以便有机会时改正．

参加这次修订工作的有陆庆乐、唐象礼两同志．

1981年4月

第一版前言

本书是根据1977年在北京召开的工科教材会议的精神，按照同年12月在西安召开的全国高等学校工科数学教材编写会议上所通过的编写大纲编写的，它是工科学校《工程数学》教材之一，可供电类各专业使用，也可供其他专业选用．对工程技术人员可以作为参考书．

在编写过程中，我们主要参照了1966年1月高等教育出版社出版的由我室编写的《复变函数》一书．在保持原书主要优点的基础上，适当增加了一些内容，努力贯彻理论联系实际的原则，文字上力求通俗易懂，便于自学．同时，配备了比较丰富的习题，并于书后附有答案．有*号的部分，可以根据各专业的需要来选用．

本书由浙江大学主审，主审人为该校周茂清教授，参加审稿的单位有北京航空学院、河北工学院、吉林工业大学、山东工学院、湖南大学、天津大学、西安冶金建筑学院、上海机械学院、上海交通大学、南京航空学院、南京工学院、重庆大学．对于他们所提出的宝贵意见，我们表示衷心的感谢．

由于我们学识水平浅薄，教学经验不足，错误和不妥之处在所难免，诚恳地欢迎广大的教师和读者提出批评意见．

参加本书编写工作的有陆庆乐、唐象礼、王绵森三位同志．

西安交通大学高等数学教研室

1978年9月

目　录

引　言

在我们已经学过的《高等数学》课程中，研究的主要对象是实变函数. 理论的探讨和生产实践的发展，又提出了对复变数的研究，而研究复变数之间的相互依赖关系，就是复变函数这门课程的主要任务.

复变函数中的许多概念、理论和方法是实变函数在复数领域内的推广和发展，因而它们之间有许多相似之处. 但是，复变函数又有与实变函数不同之点. 我们在学习中，要勤于思考，善于比较，既要注意共同点，更要弄清不同点. 这样，才能抓住本质，融会贯通.

复变函数的理论和方法在数学、自然科学和工程技术中有着广泛的应用，是解决诸如流体力学、电磁学、热学、弹性理论中的平面问题的有力工具. 而自然科学和生产技术的发展又极大地推动了复变函数的发展，丰富了它的内容. 我们在学习过程中，要正确理解和掌握复变函数中的数学概念和方法，逐步培养利用这些概念和方法解决实际问题的能力.

第一章　复数与复变函数

自变量为复数的函数就是复变函数，它是本课程的研究对象．由于在中学阶段已经学过复数的概念和基本运算，本章将在原有的基础上作简要的复习和补充；然后再介绍复平面上的区域以及复变函数的极限与连续性等概念，为进一步研究解析函数理论和方法奠定必要的基础．

§1　复数及其代数运算

1．复数的概念　在学习初等代数时，已经知道在实数范围内，方程

$$x^2=-1$$

是无解的，因为没有一个实数的平方等于-1．由于解方程的需要，人们引进一个新数i，称为虚数单位，并规定

$$i^2=-1,$$

从而i是方程$x^2=-1$的一个根．

对于任意二实数x,y，我们称$z=x+iy$或$z=x+yi$为复数，其中x,y分别称为z的实部和虚部，记作

$$x=\mathrm{Re}(z),y=\mathrm{Im}(z).$$

当$x=0,y\neq0$时，$z=iy$称为纯虚数；当$y=0$时，$z=x+0i$，我们把它看作是实数x．例如复数$3+0\cdot i$可看作实数3．

两个复数相等，必须且只须它们的实部和虚部分别相等．一个复数z等于0，必须且只须它的实部和虚部同时等于0．

与实数不同，一般说来，任意两个复数不能比较大小．

2．复数的代数运算　两个复数$z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$的加法，减法及乘法定义如下：

$$(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2), \quad (1.1.1)$$

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2). \quad (1.1.2)$$

并分别称以上两式右端的复数为 z_1 与 z_2 的和、差与积.

显然，当 z_1 与 z_2 为实数(即当 $y_1=y_2=0$)时，以上两式与实数的运算法则一致.

我们又称满足

$$z_2z=z_1 \quad (z_2\neq 0)$$

的复数 $z=x+iy$ 为 z_1 除以 z_2 的商，记作 $z=\frac{z_1}{z_2}$. 从这个定义，立即可推得

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \quad (1.1.3)$$

不难证明，与实数的情形一样，复数的运算也满足交换律、结合律和分配律：

$$z_1+z_2=z_2+z_1,\ z_1z_2=z_2z_1;$$

$$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3, \quad z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3;$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

我们把实部相同而虚部绝对值相等符号相反的两个复数称为共轭复数，与 z 共轭的复数记作 $\bar{z}$. 如果 $z=x+iy$，那末 $\bar{z}=x-iy$. 共轭复数有如下性质：

i) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2, \quad \overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

ii) $\bar{\bar{z}}=z$;

iii) $z\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$;

iv) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z), \quad z-\bar{z}=2i\mathrm{Im}(z)$.

这些性质作为练习，由读者自己去证明.

在计算 $\frac{z_1}{z_2}$ 时，可以利用共轭复数的性质 iii)把分子与分母同乘以 $\bar{z}_2$，可得到所求的商，即(1.1.3)式.

例 1 设 $z_1=5-5i, z_2=-3+4i$，求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 与 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

［**解**］
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5-5i}{-3+4i}=\frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}$$
$$=\frac{(-15-20)+(15-20)i}{25}=-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}i.$$

所以
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i.$$

例 2 设 $z=-\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$，求 $\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$ 与 $z\,\bar{z}$.

［**解**］
$$z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=\frac{i}{i(-i)}-\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$=i-\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i\right)$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i,$$

所以
$$\mathrm{Re}(z)=\frac{3}{2}, \mathrm{Im}(z)=-\frac{1}{2},$$
$$z\,\bar{z}=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.$$

例 3 设 $z_1=x_1+iy_1$、$z_2=x_2+iy_2$ 为两个任意复数，证明 $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

［**证**］
$$\begin{aligned}z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2&=(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)+(x_1-iy_1)(x_2+iy_2)\\&=(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)\\&\quad+(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_1y_2-x_2y_1)\\&=2(x_1x_2+y_1y_2)=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).\end{aligned}$$

或
$$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

§2 复数的几何表示

1. 复平面 由于一个复数 $z=x+iy$ 由一对有序实数 (x,y) 唯一确定，所以对于平面上给定的直角坐标系，复数的全体与该平面上点的全体成一一对应关系，从而复数 $z=x+iy$ 可以用该平面

上坐标为(x,y)的点来表示，这是复数的一个常用表示方法。此时，x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴，两轴所在的平面称为复平面或 z 平面。这样，复数与复平面上的点成一一对应，并且把“点 z”作为“数 z”的同义词，从而使我们能借助于几何语言和方法研究复变函数的问题，也为复变函数应用于实际奠定了基础.

在复平面上，复数 z 还与从原点指向点 $z=x+iy$ 的平面向量一一对应，因此复数 z 也能用向量$\overrightarrow{OP}$来表示(图 1.1). 向量的长度称为 z 的模或绝对值，记作

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}. \quad (1.2.1)$$

显然，下列各式成立：

$$|x|\leqslant|z|,\ |y|\leqslant|z|,$$
$$|z|\leqslant|x|+|y|,$$
$$z\bar{z}=|z|^2=|z^2|.$$

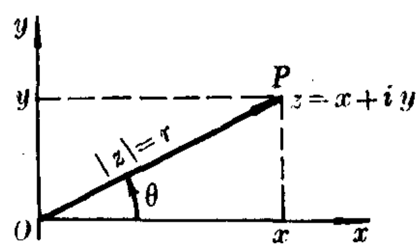

图 1.1

在 $z\neq0$ 的情况，以正实轴为始边，以表示 z 的向量$\overrightarrow{OP}$为终边的角的弧度数 θ 称为 z 的辐角，记作

$$\mathrm{Arg}z=\theta.$$

这时，有

$$\mathrm{tg}(\mathrm{Arg}z)=\frac{y}{x}. \quad (1.2.2)$$

我们知道，任何一个复数 $z\neq0$ 有无穷多个辐角. 如果 θ_1 是其中的一个，那末

$$\mathrm{Arg}z=\theta_1+2k\pi(k\text{ 为任意整数}) \quad (1.2.3)$$

就给出了 z 的全部辐角. 在 $z(\neq0)$的辐角中，我们把满足 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值，记作 $\theta_0=\arg z$.

当 $z=0$ 时，$|z|=0$，而辐角不确定.

辐角的主值 $\arg z\,(z\neq0)$ 可以由反正切 $\mathrm{Arc\ tg}\,\dfrac{y}{x}$ 的主值 $\mathrm{arc\ tg}\,\dfrac{y}{x}$ 按下列关系来确定：