

MATHEMATICAL  
DISCOVERY

# 数学的发现

第二卷

〔美〕乔治·波利亚著

刘景麟 曹之江 邹清莲 译



内蒙古人民出版社

# 数 学 的 发 现

——对解题的理解、研究和讲授

021/59/07

## 第 二 卷

(美) 乔治·波利亚著

刘景麟 曹之江 邹清莲 译

内蒙古人民出版社

一九八一·呼和浩特

Mathematical Discovery  
G. Polya  
Vol. I  
John Wiley & Sons, Inc. 1965

数 学 的 发 现

第 二 卷

〔美〕乔治·波利亚 著

刘景麟 曹之江 邹清莲 译

\*

内蒙古人民出版社出版

(呼和浩特市新城西街82号)

内蒙古新华书店发行 内蒙古新华印刷厂印刷

开本:787×1092 1/32 印张:10.5 字数:217千

1981年12月第一版 1982年3月第1次印刷

印数:1—6,100 册

统一书号:7089·216 每册:1.10元

## 序

现在这本第二卷试图按计划将第一卷序言中指出的那些目标付诸实施。

谨以本书最后一章献给查理士·劳易纳，在他七十寿辰之际，我谨在此再次向他表示深深的敬意和友好的感情。

乔治·波利亚

1964年10月于瑞士苏黎世

# 目 录

## 第二部分 通向一般方法 (续)

### 第七章 解题过程的几何图示

|                    |      |
|--------------------|------|
| § 7.1 隐喻·····      | (3)  |
| § 7.2 问题是什么? ····· | (4)  |
| § 7.3 这是一个主意·····  | (6)  |
| § 7.4 发展我们的想法····· | (7)  |
| § 7.5 彻底完成它·····   | (10) |
| § 7.6 慢镜头·····     | (12) |
| § 7.7 预习·····      | (14) |
| § 7.8 计划和程序·····   | (15) |
| § 7.9 题中之题·····    | (15) |
| § 7.10 想法的产生 ····· | (16) |
| § 7.11 思维的作用 ····· | (16) |
| § 7.12 思维的守则 ····· | (17) |
| 第七章的习题与评注·····     | (18) |

7.1—7.5 [7.1, 另一种处理方法。7.3, 一个证明的探求。7.4, 初等图式。7.5, 更多的问题。]

### 第八章 计划和程序

|                      |      |
|----------------------|------|
| § 8.1 一个制定计划的模型····· | (31) |
| § 8.2 更一般的模型·····    | (34) |

|                     |      |
|---------------------|------|
| § 8.3 程序.....       | (35) |
| § 8.4 在几个计划中选择..... | (37) |
| § 8.5 计划与程序.....    | (39) |
| § 8.6 模型与计划.....    | (40) |
| 第八章的习题与评注.....      | (42) |

8.1—8.8 [8.1, 往后还是向前? 倒退还是前进? 分析还是综合? 8.2, 聪明人从结果开始。8.4, 在三个计划中作一个选择。8.5, 在两个计划中作选择。8.6, 这确也是一个计划。8.8, 别把自己束缚住。]

## 第九章 题中之题

|                                            |      |
|--------------------------------------------|------|
| § 9.1 辅助问题: 达到目的的手段.....                   | (54) |
| § 9.2 等价问题: 双侧变形.....                      | (56) |
| § 9.3 等价问题的链.....                          | (58) |
| § 9.4 较强或较弱的辅助问题: 单侧变形.....                | (59) |
| § 9.5 间接的辅助问题.....                         | (61) |
| § 9.6 材料上的帮助, 方法论方面的帮助, 激起的联想, 导引, 演习..... | (62) |
| 第九章的习题与评注.....                             | (65) |

9.1—9.15 [9.1, 是辅助问题的可靠来源吗? 9.2, *Respice finem*。9.3, 去掉或加上一个分款。9.4, 放宽或窄化条件。9.5, 考查一个强些或弱些的定理 9.11, 寻找反例。9.12, 特殊化与推广。9.13, 类比。9.14, 如果我们失败了呢? 9.15, 更多的问题。]

## 第十章 想法的产生

|                       |        |
|-----------------------|--------|
| § 10.1 一线光明 .....     | ( 83 ) |
| § 10.2 例 .....        | ( 84 ) |
| § 10.3 辅助的想法的特征 ..... | ( 88 ) |
| § 10.4 想法有赖于机会 .....  | ( 90 ) |
| 第十章的习题与评注 .....       | ( 92 ) |

10.1—10.2 [10.1, 思想的自发性。一段引语和一个注解。10.2, 两个试验。]

## 第十一章 思维的作用

|                       |        |
|-----------------------|--------|
| § 11.1 我们怎样思考 .....   | ( 95 ) |
| § 11.2 有了一个问题 .....   | ( 95 ) |
| § 11.3 相关性 .....      | ( 95 ) |
| § 11.4 接近度 .....      | ( 96 ) |
| § 11.5 预见 .....       | ( 96 ) |
| § 11.6 探索范围 .....     | ( 98 ) |
| § 11.7 决断 .....       | ( 99 ) |
| § 11.8 动员与组织 .....    | (100)  |
| § 11.9 辨认与回忆 .....    | (101)  |
| § 11.10 充实和重新配置 ..... | (102)  |
| § 11.11 分离与组合 .....   | (103)  |
| § 11.12 一张图表 .....    | (104)  |
| § 11.13 部分启示着整体 ..... | (107)  |
| 第十一章的习题与评注 .....      | (111)  |

11.1—11.11 [11.1, 你的经验, 你的判断。11.2, 动员。11.3, 预见。11.4, 更多的部分能更强烈地

启示整体。11.5, 辨认。11.6, 重新配置。11.7从  
里面做起和从外面做起。11.8, 老鼠迷宫的启发。  
11.9, 进程。11.10, 你也是这样的。11.11, 鼠  
与人。〕

## 第十二章 思维的守则

|                            |       |
|----------------------------|-------|
| § 12.1 应该怎样思考 .....        | (117) |
| § 12.2 集中目标 .....          | (118) |
| § 12.3 估计前景 .....          | (119) |
| § 12.4 所要求的: 途径 .....      | (120) |
| § 12.5 所要求的: 更有希望的局面 ..... | (122) |
| § 12.6 所要求的: 有关的知识 .....   | (123) |
| § 12.7 所要求的: 重新估计形势 .....  | (125) |
| § 12.8 提问题的艺术 .....        | (126) |
| 第十二章的习题与评注 .....           | (128) |

12.1—12.11 [12.1, 重新表述问题。12.2, 把它表  
达成数学语言。12.3, 货源充足和组织良好的知识  
仓库。12.4, 根据哪些已知量你才能确定这种类型  
的未知量? 12.5, 根据哪些假设条件你才能推出这  
个结论? 12.6, 类比: 三角形和四面体。12.10, 注  
意和行动。12.11, 生产性的思考, 创造性的思  
考。]

## 第十三章 发现的规则?

|                         |       |
|-------------------------|-------|
| § 13.1 形形色色的规则 .....    | (135) |
| § 13.2 合理性 .....        | (136) |
| § 13.3 经济, 但不预加限制 ..... | (138) |
| § 13.4 坚持, 但有变化 .....   | (139) |



|                                                        |       |
|--------------------------------------------------------|-------|
| § 13.5 择优规则 .....                                      | (140) |
| § 13.6 问题所固有的材料 .....                                  | (141) |
| § 13.7 用得着的知识 .....                                    | (143) |
| § 13.8 辅助问题 .....                                      | (144) |
| § 13.9 总结 .....                                        | (145) |
| 第十三章的习题与评注.....                                        | (147) |
| 13.1—13.3 [13.1, 天才, 专家和初学者。13.2, 关于果子和计划。13.3, 工作风格。] |       |

## 第十四章 关于学，教，和学教

|                      |       |
|----------------------|-------|
| § 14.1 教不是一种科学 ..... | (151) |
| § 14.2 教学的目标 .....   | (151) |
| § 14.3 教是一种艺术 .....  | (153) |
| § 14.4 学习三原则 .....   | (155) |
| § 14.5 教学的三原则 .....  | (158) |
| § 14.6 例 .....       | (161) |
| § 14.7 学习教学 .....    | (168) |
| § 14.8 教师的思和行 .....  | (172) |
| 第十四章的习题与评注.....      | (180) |

14.1—14.27 (第一部分 14.1—14.4; 第二部分 14.5—14.27)、[14.5, 为什么要教解题? 14.6, 解题和理论的表述。14.7, 解题与一般文化修养。14.8, 图的语言。14.9, 有理数和无理数。14.10, 严格推理。14.11, 一张地图可以是完美的吗? 14.12, 我们应该教什么? 14.13, 发生学的原理。14.14, 空口侈谈。14.15, 混淆水平。14.16, 伊莎朵拉。14.17, 知识的水平。14.18 重复和对照。

14.19, 内部的帮助, 外部的帮助。14.21, 怎样的困难? 14.22, 困难和教育的价值。14.23, 题目的一些样板。14.26, 一篇学期论文。14.27, 关于在数学会议上的发言、策墨罗的法则。14.28, 收场白。]

## 第十五章 猜测和科学方法

|                            |       |
|----------------------------|-------|
| § 15.1 课堂水平上的研究题 .....     | (220) |
| § 15.2 例 .....             | (220) |
| § 15.3 讨论 .....            | (221) |
| § 15.4 另一个例子 .....         | (223) |
| § 15.5 归纳论述的图示 .....       | (224) |
| § 15.6 一个历史上的例 .....       | (227) |
| § 15.7 科学的方法: 猜测和检验 .....  | (237) |
| § 15.8 “研究题目”若干应有的特征 ..... | (238) |
| § 15.9 结论 .....            | (239) |

### 第十五章的习题与评注.....(241)

15.1—15.55 (第一部分, 15.1—15.20; 第二部分  
15.21—15.40; 第三部分, 15.41—15.55)

[15.23, 不充足理由律。15.24, 布里丹的驴。

15.39, 物理中的不充足理由律, 或大自然应当是可以预见的。15.40, 在一个球表面上选 $n$ 个点。15.41 更多的问题。15.44, 周期的十进小数。15.48, 梯形数。15.55, 事实和猜测。]

### 习题解答.....(259)

### 参考文献.....(283)

### 附录.....(288)

补充习题.....(288)

1.19.1, 1.19.2, 1.19.3—2.27.1, 丢蕃图活了多大年纪? 2.35.1, 2.40.1, 2.40.2, 2.50.1, 2.52.1, 2.55.1, 2.55.2, 碳原子。2.55.3, 光度计—3.10.1, 抢救。3.40.1, 3.40.2, 费波那契数, 3.40.3, 3.60.1, 3.65.1, 3.88.1, 3.88.2—4.15.1—5.19.1, 研究习题5.19的解—6.13.1, 6.17.1, —7.2.1—9.11.1, 任一解都行—12.2.1, 12.5.1, 有关的知识。12.9.1, 你知道一个有关的命题吗? 12.9.2, 返回到定义。12.9.3, 探查邻近地区—14.1.1—15.2.1, 15.52.1, 一个稍高于中学水平的研究课题。15.53.1。

## 第二部分 通向一般方法(续)

正如阳光普照万物，我们的智慧和  
学识在处理各种不同对象时也是一  
视同仁的。

《笛卡儿全集》，第十卷，p.360，法则 I。



## 第七章 解题过程的几何图示

没有任何东西比几何图形更容易印入脑际了，因此用这种方式来表达事物是非常有益的。

《笛卡儿文集》，第十卷，p.413；

思维的法则，法则Ⅺ。

### § 7.1 隐喻

事情发生在大约五十年前，那时我还是个大学生；我正在帮一个男孩子准备考试，当时我必须给他解释一道初等的立体几何题，可是因一时未得要领而卡住了。居然对付不了这样一道简单的题目，我只能责怪自己。第二天晚上我坐下来，重新从头到尾仔细地去解它，那次我是做得这样彻底，以致这辈子再也不会忘记它了。由于试图直观地去看清楚整个解题的自然过程和解题中涉及的一系列基本想法，我终于得到了一个解题过程的几何图示法。这是我对解题的第一个发现，也是我终生对解题都产生兴趣的开端。

我所说的几何的譬喻，它最终是以一组日常的隐喻的辞来表现的。人们不止一次地注意到语言是充满着隐喻的（有的毫无生气，有的是半死不活，有的则生动活泼）。我不知道人们是否还注意到了很多隐喻是互相关联的：它们或是联系着的，或是结合在一起的，它们形成了团，形成了多少有些松散的及重叠的族。不管怎么说吧，有相当广泛的一族隐

喻词，具有两个共同特点：它们都关联着基本的人类解决问题的活动，而且都提供了同样的几何形象。

发现解法，就是在原先是隔开的事物或想法（已有的事物和要求的事物，已知量和未知量，假设和结论）之间去找出联系。被联系的事物原来离得越远，联系的发现者的功绩也就越大。有时我们发现这种联系就象一座桥：一个伟大的发现使我们强烈地觉得象是在两个离得很远的想法的鸿沟之间架上了桥。我们常常看到这种联系是由一条链来贯穿的：一个证明象是一串论据，象是一条由一系列结论组成的链，也许是一条长链。这条链的强度是由它最弱的一环来代表的。因为那怕是只少了一环，就不会有连续推理的链，也就不会有有效的证明。对于思维上的联系我们更经常使用的词是线索，比如说，我们都在听教授讲课，但他失去了证明的线索，或是被一些推理线索缠乱了，他不得不看一下讲稿，以拾起失掉的线索，等他把线索整理出来得到最终结论时，我们也都已经困倦不堪了。将一条细微的线索当成一条几何上的线，将被联系着的事物当成几何上的点，这样无可避免地，一幅隐喻着一系列数学结论的图式便必然地浮现出来了。

现在让我们停止聆听高谈，转过来具体考查一些几何图形吧。

## § 7.2 问题是什么？

我们需要一个例子，我选择了一个非常简单的立体几何题<sup>①</sup>：

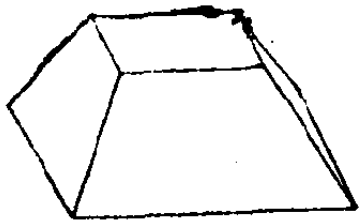
---

① 此题与先前考虑过的那个问题非常类似，甚至更简单些。见文献 [16]，[18]。

给定棱台的高 $h$ ，上底的一条边长 $a$ 和下底的一条边长 $b$ 求正方棱台的体积 $F$ 。

(以正方形为底的棱锥，如果它的高经过底的中心，则称为正方棱锥。棱台是棱锥的底以及平行于底的一个平面所截出的部分，这个平行于底的平面包含了棱台的一个面，我们称它为棱台的上底，棱台的下底就是原来整个棱锥的底，它的高就是两底间的垂直距离。)

解这个问题的第一步是先集中到目标上。你要求的是什么？我们向自己提出问题，并尽可能明确地画出所求的体积 $F$ 的图形（见图7.1的左侧）。所求目标在思维中的位置则用一个单点，记为 $F$ ，象征性地表示出来，我们的全部注意力应该集中在它上面（见图7.1的右侧）。

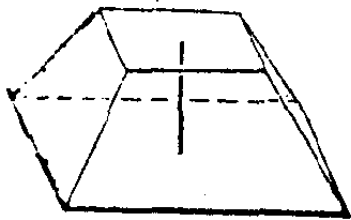


你要求的是什么？

$F$   
•

图7.1 集中到一点：目标

如果什么也不给，我们就求不出未知量 $F$ 。我们问自己：已知量是什么？或你有些什么？这样，我们就把注意力集中到图中那些长度已定的线段 $a$ ， $b$ 和 $h$ 上，见图7.2的左侧。（在所考虑的立体中，以 $a$ 为边的正方形在上边，以 $b$ 为



你有些什么？

$F$   
•

$a$   $h$   $b$

图7.2 未定的问题：沟上架桥



边的正方形在下边。)我们在图7.2右侧增加三个新点,分别记作 $a$ ,  $h$ 和 $b$ ,来代表三个已知量在变化了的思维中的位置,它们与 $F$ 之间有一道鸿沟,这就是图7.2右边的那一片空白。这片空白象征着尚未解决的问题;我们的问题现在就集中为将未知量 $F$ 与已知量 $a$ 、 $h$ 和 $b$ 联系起来,我们必须要在它们之间的那道鸿沟上架起桥来。

### §7.3 这是一个主意

我们的工作是从把问题的目标,未知量和已知量赋与几何形象开始的。工作的最初阶段已由图7.1和7.2适当地描绘出来了。那么我们怎样从这里继续前进呢?下一步该怎么走呢?

如果你不能解出新提出的问题,那就去寻找一个适当的有关联的问题。

在当前的情形,用不着去找得很远。其实,未知量是什么?一个棱台的体积。而这是一个什么样的棱台呢?它是如何定义的?它是一个棱锥的一部分。是哪一部分呢?介于——不,就说到这里吧,让我们用另一种方式来叙述它:这个棱台是我们用一个平行于底的平面,截去整个棱锥中的一个较小的棱锥以后所剩下的部分。在当前的情形,大(整个)棱锥的底是一个面积为 $b^2$ 的正方形,见图7.3。如果我们知道这两个棱锥的体积 $B$ 和 $A$ ,我们就能求出棱台的体积:

$$F = B - A$$

让我们来求体积 $B$ 和 $A$ 吧!对了,这是一个主意!

于是我们原来的问题——求 $F$ ,就转变成了两个适当关联着的辅助问题——求 $A$ 和 $B$ 。为了用图式来表达这一转变,