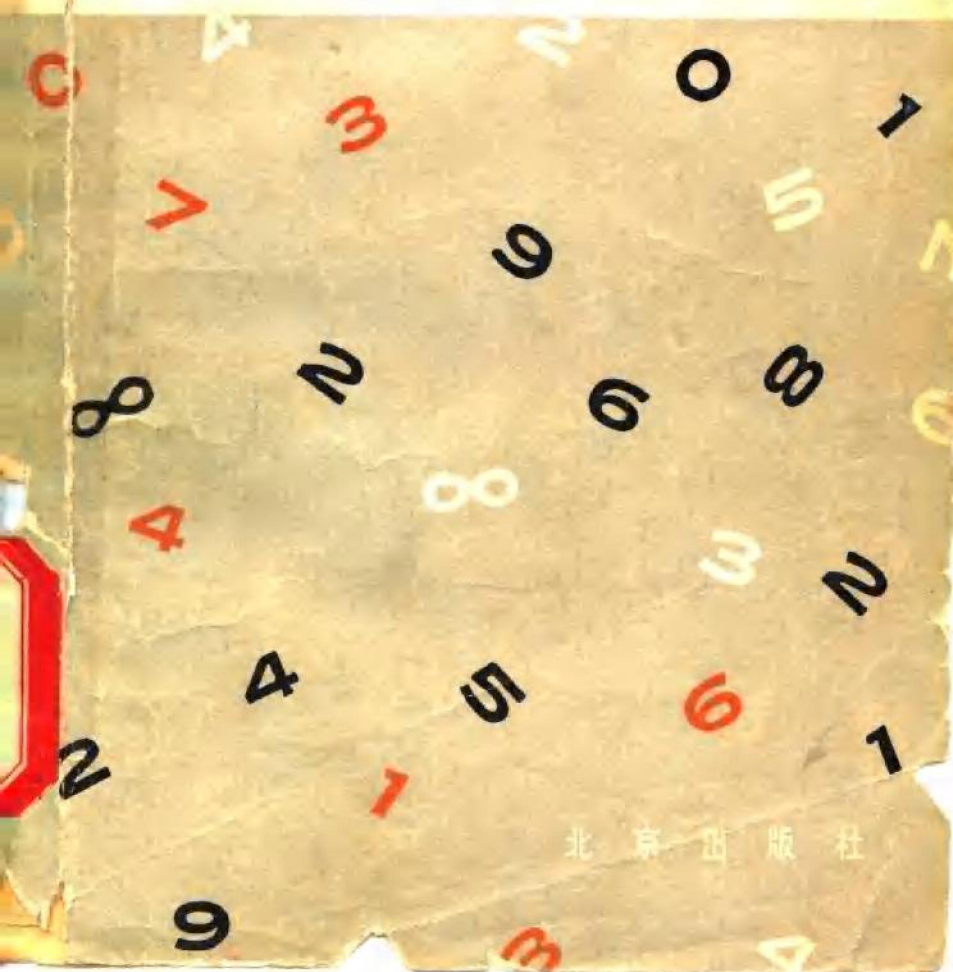


兰佐斯 著

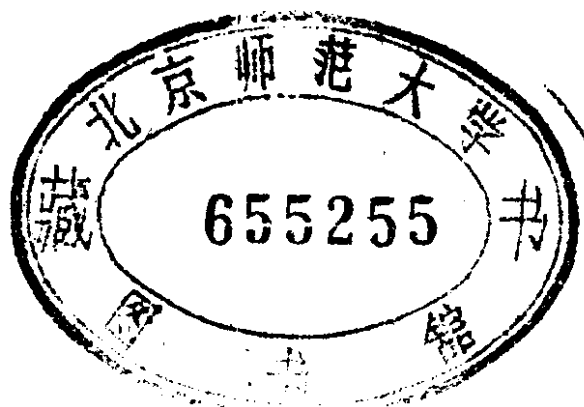
无穷无尽的数



北京出版社

无穷无尽的数

兰 佐 斯 著
吴 伯 泽 译



北 京 出 版 社

Cornelius Lanczos
NUMBERS WITHOUT END

Oliver and Boyd Ltd
Tweeddale Court Edinburgh, 1968

根据英国爱丁堡
奥利弗-博伊德出版公司
1968年版译出

无 穷 无 尽 的 数

兰 佐 斯 著
吴 伯 泽 译

北 京 出 版 社 出 版
(北京崇文门外东兴隆街51号)
新华书店北京发行所发行
北 京 印 刷 一 厂 印 刷

787×1092 毫米 32 开本 6 印张 120,000 字
1979 年 11 月第 1 版 1979 年 11 月第 1 次印刷
印数 1—100,000
书号: 7071·610 定价: 0.44 元

译者前言

从我们开始懂事的时候起，我们就天天在同数打交道。

小时候，你已经吃过好几个桃子了，可你还想再吃，于是奶奶就对你说：“好吧，可只许再吃一个，要不，就要闹肚子了！”你上学以后，爸爸问你语文考得怎么样，你回答说：“还不错，得了九十二分。”现在，有人问你：“上颐和园怎么走？”你会回答他说：“先乘一〇三路无轨电车到动物园，再换三三二路公共汽车，坐到头就到了。”你看，这些事不是件件桩桩都要用到数吗？！

大概正因为我们从小就同数交上了朋友，所以，我们就习惯于把它看作我们生活中的一个组成部分，是自然而然要存在的，于是我们就很少去考虑这样一些问题：数究竟是什么东西？它是怎样产生的？它也有它自己的发生和发展的过程吗？等等，等等。即使偶而想到这些问题，也因为一时得不到答案，就把它放到一边去了。结果，当我们有时候不得不回答这类问题时，我们就会感到瞠目结舌，不知怎样回答了。

我们现在介绍的这本书就是专门讲述这方面的知识的，它不但提出了这样一些问题，同时也给出了这些问题的答案。

本书作者兰佐斯是位数学家兼物理学家。他早年在当代著名物理学家爱因斯坦手下工作；第二次世界大战期间，他从德国跑到英国，在爱尔兰帕多瓦高级研究院工作，并多次到美国讲学。他在从事教学和研究工作的同时，也很重视科学普及工作，这本书就是他的科普著作之一。

这本书以数学发展的历史为背景，介绍了数论的最基本的知识，其中包括数的产生，它的本性，它的各种表示方法，素数，十进位数，无理数，复数，超越数等等。此外，书的最后还附有历史上一些同数论关系较大的数学家的小传。读了这本书，读者对于数论可以得到一些最概括、最初步的认识。

应该指出，译者对数论了解甚少，只是由于感到此书对于广大青少年读者攀登科学高峰可能有些帮助，便不自量力把它译出。这样，不当或错误之处在所难免，希望读者们批评指正。

中国科学院数学研究所吴方同志阅读过译文全稿，并提出了一些宝贵的意见，译者谨在此表示谢意。

原书还附有参考书目及索引，中译本略去。

1978年7月

序 言

许多成年人都有一个共同的体验：他们在小学和中学学过算术和代数以后，当再接触到数学领域时，往往感到兴趣索然，有的甚至宣称他们对数学抱有一定的反感。但是，考虑到事物的数量方面在我们的文化生活中所起的极其重要的作用，人们就会怀疑这种反感究竟在多大程度上是正确的了。也许，代数学在纯形式方面强调得太过分了，因而使我们看不到数的世界的真正的美和富于想象的特点。其实，数是比较银行帐目中的数字丰富得多的东西。它们有它们自己奥秘的生命力，并且充满了各种奇妙的、令人赞叹不已的东西。

在这本小书中，作者想尽力引导读者象艾丽思* 漫游奇境那样，游历一个丰富多彩、五光十色的世界，在那里，事实和幻想竞相争妍，始终使人有惊奇之感。当大家看到，有多少高等数学的概念隐藏在纯算术现象之中，又有多少概念则在进行通常的近乎机械操作的算术运算时被忽略了，大家准会大吃一惊。随后，在文中出现了代数的记号语言的时候，我们还要再一次强调那些我们已经诸熟了的法则和做

* 艾丽思(Alice)是著名英国童话作家卡罗尔(Carroll, 1832—1898年)写的一本供青少年阅读的著名幻想小说《艾丽思漫游奇境记》的主人公，她因为作梦而游历了一些使她大长知识的领域。——译者

法，而不去对它们的更深刻的意义作太细致的探讨。作者相信(但这也许是错误的)，让读者们有机会去发挥自己的想象力和逻辑推理能力，可能会更恰当一些。这就是作者试图努力做到的事。但这并不是出于数学是一门容易学的学科(它肯定不是这样的学科)，也不是出于数学饶有趣味(它确实饶有趣味，但不是从“趣味”这个词的通常含义上来说的)，作者是从研究数学可以认识它内在的美而得到高度报酬这个意义上来考虑的。在人类文明的每一个发展时期，对数学的研究总是吸引了世界各国最优秀的人才，这种情况绝不是偶然的。

对本书叙述的几乎所有内容，即便读者欠缺这方面的起码素养也能够领会，书中所讨论的题材又能不断激发我们的想象力，而且处处引人入胜，但是，作者的本意决不是仅仅以此供读者消遣消遣。也许，由于受大众宣传工具的影响，从而使一般成年人认为，随着求学年代的结束，可以无需攻读那些严肃的、运用智力的著作，在以后的岁月中，阅读只是为了“消闲”而已。对于那些喜欢思考问题和应用自己的推理能力的人来说，本书包含了大量有价值的知识。也许，就连那些饱学的数学专业的大学生，也能在这里发现高等数学王国中的隐蔽的宝藏，那是在普通的学校教程中很难接触到的。

由于主题题材的性质，本书当然主要是要从数的一些比较具体的表现形式来讨论它，因此，代数的记号语言是一定要用的，但用得很少，不超出它的最基本的范围。这样的限制有一些显而易见的缺点，但也有一个好处，这就是使那

些望公式而生畏的读者，不致在阅读本书时感到气馁。

作者以感激的心情回想起，在 1939—1944 年间，受美国印第安纳州拉斐特的珀杜大学的委托，为一些选拔的大学一年级学生讲授“数学概论”这门课程。这些学生对数学专业本身并不感兴趣，他们感兴趣的是数学作为一个文化课目在人类知识的发展过程中所起的作用。根据这一点，当时在讲课时，数学概念和数学方法（从数的奇妙的历史讲起）是结合历史背景和哲学背景提出来的，并且特别注重概念，而不去强调形式上的表现。学生们的反应是令人高兴的。本书有很大一部分就是根据讲授那门课程的经验写成的。

作者非常感谢《当代科学丛书》的编者 I. A. G. 李贝克先生，他曾对本书提出一些建设性的意见和许多有益的建议。

兰 佐 斯

关于数学记号的一点说明

十分遗憾,对于各种算术运算的记号,迄今还没有一个统一的国际协定。仅有的两个通用记号就是加号+和减号-。

象

$$a \times b, \frac{a}{b} \text{ 或 } a/b$$

等记号也是一般人都能够懂得的。但是,表示相乘的“ $\times$ ”号有一个缺点,就是它同代数演算中常用的英文字母 x 相似而容易引起混淆。

杰出的科学家、哲学家、微积分的发明人之一莱布尼兹(1646—1716)非常理解建立一个合适的数学记号体系的重要性;他建议用脚点(.)代表相乘,而用两个圆点(:)代表相除。这种体系几乎已为整个欧洲大陆和所有拉美国家所普遍采用。由于脚点这个记号已经有了另一种用途——“小数点”,所以这种记号又容易引起混淆。后来这种困难由于改用逗号(,)来表示小数点而被克服了,但是,这种改用的办法迄今未为美国、英国和英联邦各国所接受。

下面,我们把一些同样的表述在世界各国所采用的不同方式写出:

欧洲大陆和拉丁美洲

$$2.5 = 10; \quad 2,5 = 2\frac{1}{2}; \quad 10:2 = 5$$

英国和英联邦各国

$$2.5 = 10; \quad 2.5 = 2\frac{1}{2}; \quad 10 \div 2 = 5$$

美 国

$$2 \cdot 5 = 10; \quad 2.5 = 2\frac{1}{2}; \quad 10 \div 2 = 5$$

本书采用英国的标准用法*。

* 本书原书用的是英国标准用法。我国的习惯用法与美国相同，所以中译本采用美国标准用法。——译者

目 录

序言.....	1
关于数学记号的一点说明.....	1
第一章 绪论.....	1
数的本质.....	1
数数.....	4
测量.....	7
物质世界与数的世界.....	9
分组定位.....	14
第二章 十进制.....	18
印度的十进制.....	18
古代的其他位值体系.....	20
苏美尔人和巴比伦人.....	21
希伯来人和希腊人的记数体系.....	25
以任意数作底数的记数体系.....	26
二进制.....	30
埃及的乘法.....	33
巴切特的称重问题.....	39
化除为乘.....	41
第三章 可除性.....	46

素 数	46
合成数	47
唯一析因定理	48
十进小数	51
乘 法 表	58
有限代数	60
费马定理	64
群的概念	69
余数验算法	78
循环小数	86
第四章 数域的演变	98
历史概述	98
负数.....	102
负数的本质.....	102
代数的基本运算法则.....	105
负数的运算.....	110
分数.....	111
分数的本质.....	111
分数的运算.....	113
六十进制小数.....	115
连分数.....	118
无理数.....	123
无理数的本质.....	123
极限的概念.....	126
复数.....	130

虚数单位.....	130
复 数.....	133
复数的运算.....	136
高次方根.....	139
代数方程.....	142
代数数域.....	147
超越数.....	148
超复数.....	153
第五章 无穷集	156
无穷大的本质.....	156
一一对应关系.....	158
可数集.....	159
连续统是不可数的.....	162
连续统不再增大.....	164
几个著名的数学家小传.....	168

第一章 绪 论

在这一章里，我们将一般地谈谈数的本质，以及它们同物质世界中的物体的关系。

数的本质

尽管我们大家都能够熟练地应用各种各样的数，但是，我们却难得花点时间去思考它们的真正意义。要是有个孩子问我们说：“数是什么东西？”那么，我们能够清楚明确地回答他的问题吗？很可能，我们会借助于当时的某种客观情况来掩饰我们的窘境。我们也许会让他扳着指头，按惯例教他念“1, 2, 3, 4, 5”，或者指着房间里的人，给他讲一点怎样数数的事。由于我们同数打交道的实际场合是那么多，所以我们的头脑常常会错误地认为，数就是我们这个物质世界的一个组成部分。这种想法过去确实流传了好多个世纪，并且使人们不能够正确地认识到数的本质。这种错误的概念使人们认为，似乎有一些数要比另一些数更为实在一些，特别是所谓整数，尤其是 1, 2, 3, 4, ……这些所谓正整数，才是“真正存在的数”；而所谓负数，则被当作是我们的想象所虚构出来的东西，应予否定。零这个数被看作与“什么也没有”相等，于是“比什么也没有还要少”就自然没有合理的

意义了。其实，正、负数之间的区别正好同左、右的区别一样，显然是大家都非常熟悉的一种基本经验，这就告诉我们，正、负数必须同等对待。可是在早先，就连那些了不起的数学家也抱有一种偏见，认为只能够信赖 $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ 等等正整数，而其他各种类型的数，都必须能够通过某种办法化成正整数才行。不错， $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ 这些特殊的数是从最基本的数数过程产生出来的。但是，数数并不是产生数的唯一办法。因此，当我们今天看到象汉密尔顿(1805—1865)这样出色的数学家竟使用了某些非常牵强附会的人为手法，在正数的基础上引入负数的时候，我们会感到非常惊讶，因为负数实际上是可以简单得多的办法来解释的。

为什么要经过这样长期的演变，人们才能够恰如其分地认识到数的本质呢？也许，正是由于数在我们日常生活的各个方面用处太多，反而妨碍了我们对它进行抽象的过程。可是，如果我们想了解数是什么东西，这种抽象的过程却是必不可少的。不管怎么说吧，人类同数打交道起码已有 5000 年的历史了(某些巴比伦泥板上有现在小学算术习题的解法，它们是公元前 2000 年以前的东西)。可是，就是到了今天，也仍然有许多人没有认识到，我们不应该把数同客观现实混为一谈，而应该有区别地把数看作是由一些遵循着它们自己的内在规律的记号所组成的虚幻世界。这样，对这些规律及其推论进行探讨，就成为数学所要研究的课题了，因为数学研究可以无需考虑由此得出的结构是否适用于物质世界就可以进行。数同现实世界的联系密切与否，完全取决于当时特定的物质条件。在只牵涉到数数的过程中，负数当然是没

有地位的。但是，如果问题是要数出出席某个会议的人数，而预定的与会人数又不超过一百人，那么，这时所有超过一百的普通正数也同样是不会出现的。不过，在其他场合下，不仅是负数，甚至连虚数和复数，也自然有它们的地位。后面在进一步研究这几种数时，我们就会看到这一点。

现在我们再回到那个简单的问题上来：要是有个孩子问我们“数是什么东西”，我们能对他说些什么呢？也许，一个最恰当的答案是让他自己取得一次看起来普普通通、但却非常能够说明数的本质的经验。我们就设想带他上一个超级市场*去买东西吧。这次采购以一个值得注意的事件而告终：这时，出口处的女服务员把各种商品的款额打在现金收入记录机上，然后把帐单交给顾客。她并不注意看那些商品是什么东西，而只注意附在不同商品上的价格标签。取下这些标签后，经过某些乘法和加法运算，就得出最后的总数了。这里有两个特点，它们对于我们理解数的本质有极其重要的意义。第一点是：这些数根本不属于那些商品；它们既不是商品的一部分，也不代表不同商品的任何特殊性质。它们仅仅是标在商品上，也就是说，它们是被人们同商品联系起来的，但丝毫不影响商品的物质本性。 $2/6$ 这个标签可以挂在一袋马铃薯上，也可以挂在一袋苹果、一袋桔子或任何其他商品上。它永远一成不变地是 $2/6$ ，它只不过是一个记号，但却确实是个有用的记号，因为——注意，我们这就要谈到数的

* 超级市场即无人售货商店，顾客可以自己挑选各种商品，出门时由计算机算出总金额，一次付款。——译者

第二个特点了——我们能够用它来做某些事情。我们可以进行加减乘除，并且用一个比较高级的名词“运算”来概括这些做法。不错，我们可以用数来进行运算，但是，我们的运算所牵涉到的仅仅是那些数，而不牵涉到标有那些数的商品。那个把款项打在现金收入记录机上的姑娘，并不是把马铃薯、苹果、桔子等东西拿来相加和相乘，而只是拿那些同商品相联系的数来进行运算。这些运算确定了一个非常明确的结构，而这种结构本身就值得我们对它研究一番了。尽管数只不过是一些虚幻的记号，但是，从我们能够用它们进行运算这一点上说，它们是彼此联系在一起的。这样，它们就构成了它们自己的世界，虽然严格地说，这只不过是个想象中的世界，但却有它自己的生命，有它自己的戏剧性。不过，既然数在这么多自然发生的事件中具有惊人的用途，这就表明，这个独特的、虚幻的记号世界在现实世界中许多突出的用处。但是，我们永远不能忘记，这些数仅仅是同我们日常经验的世界联系在一起而已，它们本身并不是这个世界的一个组成部分。

在本书后面的几章里，我们还有充分的机会去弄清这些被称为数的抽象事物的一些值得注意的性质。为此，我们最好能够记住下面这个用一句话就精炼地概括了以上讨论要点的定义：数是可以用来进行运算，并且能同客观事物相联系的一些记号。

数 数

一个羊倌看着他的羊群，同时用手指头数着羊数，想