# 微积分学习指导

戴宗儒 李志煦 郑郁文 主编

科学技术文献出

# 微积分学习指导


主编　戴宗儒　李志煦　郑郁文

编写　刘春芝　张树国　胡莲云
　　　神国荣　黄本芬　赵惠斌

主审　曹承宾　崔福荫



科学技术文献出版社

## 内 容 简 介

本书内容包括：函数、函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分法及其应用、二重积分、级数。每章后附有自测练习题，书后附有（A）、（B）、（C）三组综合自测试题，并有参考答案。

本书文字叙述简练、通俗易懂，便于自学。可作为财经类大专院校、职业大学、管理干部学院、业大、电大以及函授学员的学习指导书，也可作为教师的教学参考书。


微积分学习指导

戴宗儒　李志煦　郑郁文　主编

科学技术文献出版社出版

航天部五院印刷厂印刷

新华书店科技发行所发行　　各地新华书店经售

*

787×1092毫米　32开本　13.75印张　318千字

1988年12月北京第一版第一次印刷

印数：1—13000册

科技新书目：179—110

ISBN 7-5023-0672-2/O·54

定价：3.65元

# 前　言

为了适应财经类大专学生学习和教学的需要，我们编写了这套经济应用数学基础系列学习指导书。包括《微积分学习指导》、《概率论与数理统计学习指导》、《线性代数学习指导》、《线性规划学习指导》共四册。

每一册分章编写，每一章都包括如下六个部分：

（一）主要内容部分：用精练的语言分条分款概述本章主要内容，目的使读者对本章的内容理出一个系统和层次；

（二）基本要求部分：把本章的学习要求分几点说清，指出读者应掌握什么，了解什么，理解什么，并指出重点和难点；

（三）答疑解惑部分：指出读者学习过程中可能会提出的问题或易混淆的概念，拟出题目并作出回答；

（四）典型例题分析部分：每章都有针对性的举出一定数量的例题进行分析详解，以帮助读者正确理解基本概念，高解题能力；

（五）部分习题解答部分：每章配有习题（本习题选自本出版社出版的大专教材《微积分》），并给出了解答；

（六）自测题部分：各章后面都有反映本章内容的自测示习题，并给出了参考答案。

全书最后均附 A、B、C 三组综合自测试题，并附有参考答案。

《微积分学习指导》是根据高等财经院校专科层次，以及函授、职大、业大、电大的经济应用数学基础《微积分》的教学要求而编写的，是学员的学习指导书，也可作为教师的教学参考书。全书共分九章，内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分法及其应用、二重积分和级数。

这套学习指导书是由北京经济管理学院（原人大一分校）、金陵职业大学、江汉大学、西安基础大学、大连税务专科学校等院校联合编写的，编者都是在教学第一线有多年教学经验的教师，并由崔福荫、曹承宾、何蕴理、王尚文主审。

对这套学习指导书的结构和编写形式，我们做了新的尝试，由于水平有限，在内容的取舍，结构的安排，以及体例形式等各方面难免存在问题与不妥之处，敬请读者批评指正。

编者

1988年2月15日

# 目　　录


第一章　函　数……………………………………（1）
　一、主要内容……………………………………（1）
　二、基本要求……………………………………（7）
　三、答疑解惑……………………………………（7）
　四、典型题分析…………………………………（10）
　五、部分习题解答………………………………（21）
　六、自测题………………………………………（25）
　自测题参考答案…………………………………（29）
第二章　极限与连续……………………………（32）
　一、主要内容……………………………………（32）
　二、基本要求……………………………………（43）
　三、答疑解惑……………………………………（44）
　四、典型题分析…………………………………（46）
　五、部分习题解答………………………………（62）
　六、自测题………………………………………（71）
　自测题参考答案…………………………………（74）
第三章　导数与微分……………………………（76）
　一、主要内容……………………………………（76）
　二、基本要求……………………………………（80）
　三、答疑解惑……………………………………（81）
　四、典型题分析…………………………………（85）

五、部分习题解答……………………………（92）
六、自测题……………………………………（99）
自测题参考答案………………………………（104）
**第四章　导数的应用**………………………………（111）
一、主要内容…………………………………（111）
二、基本要求…………………………………（117）
三、答疑解惑…………………………………（118）
四、典型题分析………………………………（122）
五、部分习题解答……………………………（131）
六、自测题……………………………………（141）
自测题参考答案………………………………（145）
**第五章　不定积分**…………………………………（154）
一、主要内容…………………………………（154）
二、基本要求…………………………………（161）
三、答疑解惑…………………………………（161）
四、典型题分析………………………………（168）
五、部分习题解答……………………………（176）
六、自测题……………………………………（197）
自测题参考答案………………………………（202）
**第六章　定积分及其应用**…………………………（207）
一、主要内容…………………………………（207）
二、基本要求…………………………………（214）
三、答疑解惑…………………………………（215）
四、典型题分析………………………………（219）
五、部分习题解答……………………………（235）
六、自测题……………………………………（249）

自测题参考答案…………………………………（253）

**第七章　多元函数微分法及其应用**……………………（264）

一、主要内容…………………………………（264）

二、基本要求…………………………………（278）

三、答疑解惑…………………………………（279）

四、典型题分析………………………………（284）

五、部分习题解答……………………………（291）

六、自测题……………………………………（307）

自测题参考答案…………………………………（310）

**第八章　二重积分**………………………………（319）

一、主要内容…………………………………（319）

二、基本要求…………………………………（329）

三、答疑解惑…………………………………（330）

四、典型题分析………………………………（335）

五、部分习题解答……………………………（340）

六、自测题……………………………………（356）

自测题参考答案…………………………………（359）

**第九章　级　数**…………………………………（368）

一、主要内容…………………………………（368）

二、基本要求…………………………………（377）

三、答疑解惑…………………………………（378）

四、典型题分析………………………………（382）

五、部分习题解答……………………………（390）

六、自测题……………………………………（395）

自测题参考答案…………………………………（399）

**综合自测试题**……………………………………………（408）
**综合自测试题参考答案**………………………………（416）

# 第一章 函　数

## 一、主要内容

1．实数集，绝对值，区间及邻域

（1）实数集

微积分中所涉及的数，一般均为实数。通常用R表示实数集。实数轴是具有方向、原点、单位长度的有向直线，实数轴上的点与实数一一对应，是实数的几何表示。

实数集有两个重要性质：

1° 稠密性。即表示实数的点遍布实数轴；

2° 连续性。即任何两个不同的实数之间没有空隙。

（2）绝对值

1° 定义：任一实数$a$的绝对值，用符号$|a|$表示，定义为

$$|a|=\begin{cases}a & a\geqslant 0\\ -a & a<0\end{cases}$$

由定义知，任一实数的绝对值一定是非负数，即$|a|\geqslant 0$。绝对值的几何意义是，表示数轴上点$a$与原点0之间的距离，若$a>0$，则表示点$a$在原点0的右边；若$a<0$，则表示点$a$在原点0的左边。

关于绝对值有以下关系：$|a|=\sqrt{a^2}$，$|-a|=|a|$，$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$。

2° 绝对值的运算性质

1）$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

2）$\left|\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{|b|}{|a|}$　　（$a\neq 0$）

3）$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$

3° 常见绝对值不等式的意义

1）$|x|\leqslant a$（$a>0$）与不等式 $-a\leqslant x\leqslant a$ 等价；

2）$|x|\geqslant a$（$a>0$）与 $x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a$ 两不等式等价；

3）$|x-a|<\varepsilon$ 与不等式 $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$ 等价。

（3）区间与邻域

在微积分中，往往在某一实数范围内研究问题，通常用区间表示实数范围。

1° 区间

设 $a$ 与 $b$ 是两个实数，且 $a<b$,

1）满足不等式 $a<x<b$ 的全体实数 $x$ 的集合称为开区间，记作 $(a, b)$；

2）满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数 $x$ 的集合称为闭区间，记作 $[a, b]$；

3）满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的全体实数的集合，称为半开区间，分别记作 $[a, b)$，$(a, b]$；以上四种区间统称为有限区间，$a$、$b$ 称为区间端点，$b-a$ 称为区间长度；

4）满足不等式 $a<x<+\infty$；$a\leqslant x<+\infty$；$-\infty<x<a$；$-\infty<x\leqslant a$；$-\infty<x<+\infty$ 的全体 $x$ 的集合统称为无穷区间，分别记为 $(a, +\infty)$；$[a, +\infty)$；$(-\infty, a)$；$(-\infty, a]$；$(-\infty, +\infty)$。

这里附带指出“$-\infty$”与“$+\infty$”是两个记号而不是数。通常用$(-\infty, +\infty)$表示实数集或整个数轴。

2° 邻域

开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)(\delta>0)$称为点$x_0$的$\delta$邻域，$\delta$称为邻域半径。点$x_0$的$\delta$邻域亦可用$|x-x_0|<\delta$或$\boldsymbol{U}(x_0,\delta)$表示。若点$x_0$的邻域不包含点$x_0$，则称此邻域为空心邻域，用$0<|x-x_0|<\delta$表示。

2. 函数概念

（1）函数的定义：设$D$、$M$是两个实数集合，若按某一确定的对应法则$f$，对于任一$x\in D$，有唯一确定的$y\in M$与之对应，则称$f$为定义在$D$上的函数，记作

$$f: D\to M \quad \text{或} \quad y=f(x),\ x\in D。$$

其中$D$称为函数的定义域。对于任一$x\in D$，通过对应法则$f$所对应的$y$，通常记为$f(x)$，称为函数在$x$处的函数值。全体函数值所构成的集合，称为函数的值域。习惯上把$x$称为自变量，$y$称为函数。

对于函数的概念要注意理解两个方面：第一，是自变量的变化范围，即函数的定义域；第二，是函数的对应法则，即函数的值域。

（2）函数的三种表示法：1）解析法；2）列表法；3）图象法。

（3）函数的记号：

通常用$f$、$g$、$\cdots\varphi$、$\phi$等字母表示变量$x$与$y$之间的对应关系，例如$y=f(x)$等。应该注意的是，在同一研究范畴，不同的函数要用不同的字母表示。

另外，在一个实际问题中，往往遇到当自变量取不同范

围的值时，函数的对应法则不同，因而只由一个表达式就不能反映在函数定义域内的函数对应关系，必须按自变量的不同取值范围，用不同的表达式表示函数对应关系，这样一类函数称为分段函数。例如函数

$$y=f(x)=\begin{cases}|x-1|, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-1, & 1<x<3\end{cases}$$

就是一个分段函数，其图象见图1-1。

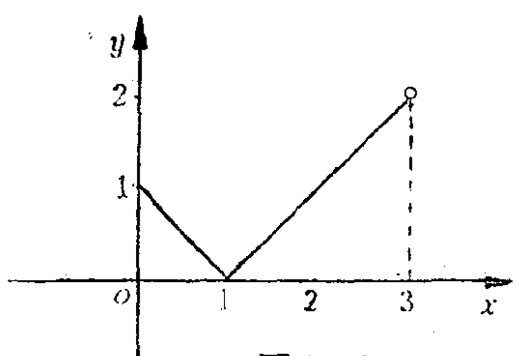

图1-1

一般地，如果函数的对应法则可以用含自变量的解析表达式表出，则称该函数为显函数。如果函数 $y$ 与自变量 $x$ 的关系由方程 $F(x,y)=0$ 确定，则称该函数为隐函数。

3．讨论函数的常用术语

（1）函数的奇偶性

如果函数 $y=f(x)$ 对于定义域内的一切 $x$ 满足 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数；满足 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数。偶函数的图象关于 $y$ 轴对称，奇函数的图象关于原点对称。

（2）函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在 $(a,b)$ 内有定义，$x_1$，$x_2$ 是 $(a,b)$ 内任意两点，且 $x_1<x_2$，如果总有

1° $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内单调增加，且称 $(a,b)$ 为 $f(x)$ 的单调增区间；

$2°$ $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内单调减少，且称 $(a,b)$ 为 $f(x)$ 的单调减区间；

$3°$ $f(x_1)\leqslant f(x_2)$〔或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$〕，则称 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 内单调不减（或单调不增），且称 $(a, b)$ 为 $f(x)$ 的单调不减（或单调不增）区间。

以上情况，统称 $f(x)$ 为 $(a,b)$ 内的单调函数，统称 $(a,b)$ 为单调区间。

（3）函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在 $(a,b)$ 内有定义，对于任意 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$（$M$ 为一个正数）成立，则称 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内有界，否则称 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内无界。其中 $(a,b)$ 可以是 $y=f(x)$ 的定义域，也可以是定义域的一部分。

（4）函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$ 的定义域内的一切 $x$ 值，若存在一个正数 $T$，可使得 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数。满足上述关系的最小正数称为周期函数 $f(x)$ 的周期。

4．反函数与复合函数

（1）反函数

按函数 $y=f(x)$ 的对应法则，把 $y$ 看作自变量，$x$ 看作函数而确定的函数

$$x=\varphi(y)$$

叫做 $f(x)$ 的反函数（原形反函数）。相应称 $f(x)$ 为直接函数。

因为习惯上总用 $x$ 表示自变量，用 $y$ 表示函数，所以通

常把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 改写成

$$y=\varphi(x) \text{ 或 } y=f^{-1}(x)$$

来表示。一般把 $y=\varphi(x)$或$y=f^{-1}(x)$ 叫直接函数 $y=f(x)$ 的矫形反函数。

函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图象关于直线 $y=x$ 对称。

（2）复合函数

若 $y$ 是 $u$ 的函数 $y=f(u)$，而 $u$ 又是 $x$ 的函数 $u=\varphi(x)$，而是 $\varphi(x)$ 的值域在 $f(u)$ 的定义域内，对于 $x$ 在 $\varphi(x)$ 的定义域内取定的一个值，通过 $u$ 将有 $y$ 的值与之对应，于是 $y$ 是 $x$ 的函数，即

$$y=f[\varphi(x)]$$

称这个函数为由函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，称 $u$ 为中间变量。

5．初等函数

（1）基本初等函数

基本初等函数包括幂函数，指数函数，对数函数，三角函数及反三角函数。

1° 幂函数：$y=x^a$，其中 $a$ 为固定的实数。

2° 指数函数：$y=a^x$　　（$a>0$，$a\neq1$）。

3° 对数函数：$y=\log_a x$　（$a>0$，$a\neq1$）。

4° 三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\operatorname{tg}x$，$y=\operatorname{ctg}x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$。

5° 反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\operatorname{arctg}x$，$y=\operatorname{arcctg}x$。

（2）初等函数

用常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数的复合而构成的函数，称为初等函数。

若对于自变量 $x$ 所取的一切可能值，对应函数值总是同一数值，即 $y=C$（$C$ 是常数），则称 $y=C$ 为常数函数，显然它是初等函数。

注意：分段函数不是初等函数。

## 二、基本要求

1．掌握实数及其绝对值的概念，熟知绝对值不等式的性质和等价形式。

2．掌握区间概念，明确区间与不等式的对应关系，能熟练运用区间表示实数范围。理解邻域的概念。

3．函数概念是本章中心内容，必须深刻理解函数定义域，函数对应法则这二个环节。要正确认识函数符号的意义，能熟练确定函数定义域。

4．理解反函数，隐函数，复合函数，分段函数概念。能准确把握住复合函数的复合过程。能熟练确定分段函数的定义域，并会作其图象。

5．了解讨论函数时常用的几种术语。

6．熟记基本初等函数定义域，图象和基本性态。

## 三、答疑解惑

1．有人说函数的值与自变量的值是一一对应的，这种说法对吗？用实例说明你的答案。

**答** 这种说法不对。设自变量值域为集 $D$，函数值域为集 $M$，集 $D$、$M$ 的元素一一对应，即 $D$ 的每一元，$M$ 中必有唯一元与之对应；$M$ 的每一元，$D$ 中必有唯一元与之对应。实质上，函数概念只要求对于一个自变量值，有唯一确定的函数值与之对应。如函数 $y=f(x)=x^2$，当 $x=1$ 时，$f(1)=1$；当 $x=-1$ 时，$f(-1)=1$，与函数值 1 相对应的自变量值就不是唯一的。

2．函数与函数表达式是不是一回事？

**答** 不是一回事。函数是自变量与作为函数的因变量之间的对应法则，在 $y=f(x)$ 中，这种对应法则用“$f$”这个字母来表示。函数表达式是表示这种对应法则的工具。前者是问题的本质，后者是本质的表象，所以同一个函数，可以有不同的表达式。例如 $y=|\sin x|$，$y=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}$，

$$y=\begin{cases}\sin x, & 2k\pi\leqslant x<(2k+1)\pi \\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right), & (2k+1)\pi\leqslant x<2(k+1)\pi\end{cases}\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

表示同一函数。由此亦说明，分段函数虽然可含有几个表达式，但它不是表示几个函数，只表示一个函数。

3．函数 $y=f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 内单调减少，在 $(0,\ +\infty)$ 内单调增加，它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，能否说它是单调函数？

**答** 不能认为 $y=f(x)=x^2$ 是单调函数。一般说来当函数在其定义域内只有一种单调性时，才能说它是单调函数。否则，只能说函数在哪个区间单调。因此，正确的说法是，$y=f(x)=x^2$ 是 $(-\infty,\ 0)$ 内的单调减函数，是 $(0,\ +\infty)$