结构塑性极限分析

徐秉业　刘信声　编著

中国建筑工业出版社

结构塑性极限分析

徐秉业　刘信声　编著

中国建筑工业出版社

本书简明地介绍了结构塑性极限分析的基本原理，并以梁、刚架、板、壳等结构作为分析对象，给出了在极限状态下确定这些结构完全解的方法，不仅给出了不同结构在各种受载情况下极限荷载的表达形式，而且还给出了应力分布和破坏机构的具体形式，书中对基本原理、分析方法及有关理论，都作了概括性的叙述；在梁、刚架及板的分析中列举了较多的例题，以供读者借鉴；对均匀球壳、锥壳及组合壳极限分析则引用了作者曾参与的科研工作的成果。

本书可供土建结构和机械结构专业的设计和科研人员、大学生和研究生参考。

结构塑性极限分析

徐秉业　刘信声　编著

中国建筑工业出版社出版（北京西郊百万庄）

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

中国建筑工业出版社印刷厂印刷（北京阜外南礼士路）

开本：850×1168毫米 1/32 印张：11⅞ 字数：318 千字

1985年9月第一版　1985年9月第一次印刷

印数：1—9,000册　定价：2.70元

统一书号：15040·4800

前　言

结构的塑性极限分析理论在五十年代到六十年代中曾得到了很好的发展。这个理论在工程结构和机械构件的设计中有着广泛的应用前景。

由塑性性能较好的材料制造的结构或构件，随着外荷载的不断增加，其变形将由弹性状态进入塑性状态。线弹性分析的结果仅能给出材料处于弹性状态时的应力、应变和位移的分布规律。在以弹性分析作为基础的设计中，经常遇到应力分布过大、变形过大或应力集中等现象。因此，经常因为局部的应力而影响整体的尺寸和选取的材料。利用这种方法确定结构或构件的尺寸和材料，不可能充分利用材料的塑性性能，也不可能完全反映出结构的真实安全程度。虽然，经验丰富的设计者可以对计算结果加以修正，或选取较小的安全系数，但这样作法实际已超出弹性分析范围，因此，仅仅依靠弹性分析作为设计的依据已经不够了。如果考虑材料的塑性性能，则当材料进入塑性状态后，非均匀的应力可以得到有利的重分布，应力集中现象也可以缓和。只有当结构或构件进入塑性极限状态时，其荷载才达到最大值，并产生无约束的塑性变形；即结构或构件完全丧失承载能力。

结构的弹塑性分析从弹性状态开始,然后进入弹塑性状态,最后达到塑性极限状态。这种分析方法只对于某些简单问题才容易得到其解析表达式；对于比较复杂的问题，由于数学上的困难，目前还很难找到它的完全解。如果将材料的变形模型加以简化，利用塑性极限分析的基本原理，则可由简单的数学运算对结构的塑性极限状态进行分析，找出结构或构件的极限荷载，或找出极限荷载的界限。由直接对塑性极限状态进行分析得到的结果，与由弹性状态到弹塑性状态再到塑性极限状态进行分析的结果是完

目　录

第一章 基本概念

§ 1-1 塑性极限分析的任务和假设

固体材料的性质是复杂的，很难用一个统一的力学模型来描述。最简单的力学模型是描述材料弹性性质的虎克(R.Hooke)定律，这种模型称为线弹性体模型。但是，变形体的许多重要性质都不能包括在线弹性体模型中。例如，塑性性质是材料的一个重要性质。因此，塑性体模型在描述材料塑性性质方面起着十分重要的作用。理想刚塑性体变形模型既能描述许多金属材料的塑性性质，又能使计算工作十分简单，因而在结构塑性分析中受到普遍的重视，并得到广泛的应用。

当外荷载达到某一极限值时，结构将变成几何可变机构，变形将无限制地增长，从而失去承载能力，这种状态称为结构的塑性极限状态。由于结构变为机构而丧失承载能力，即结构被破坏。因此，经常将结构的塑性极限分析称为结构的破损分析。

为了确定弹塑性结构的极限承载能力，可以采用两类方法。一类方法是研究随着荷载的不断增加，结构由弹性状态过渡到弹塑性状态，最后达到塑性极限状态，从而失去承载能力。这类方法是以弹塑性变形理论为基础的研究方法。利用这一方法解决工程实际问题时，往往遇到许多数学上的困难，只有对比较简单的问题才能得到解答。第二类方法是假设材料为刚塑性的，并按塑性变形规律研究结构达到塑性极限状态时的行为。研究结构在塑性极限状态时的理论称为结构塑性极限分析理论。在塑性极限分析中，由于不考虑弹性变形，分析问题大为简化，而得到的塑性极限荷载与考虑弹塑性过程时得到的结果是完全一样的。然而根据塑性极限分析理论却不能得到塑性极限状态前结构中的应力和

应变的分布规律。

塑性极限分析理论能够解决以下三方面的问题，即：

1）求出结构的塑性极限荷载（简称极限荷载）。

2）得出极限荷载作用下结构中应力的分布规律。

3）求出结构在极限状态下满足塑性变形规律和结构机动条件的破损机构。

解决以上三方面的问题是结构塑性极限分析的任务。为了求解这些问题，除了知道结构材料的有关常数外，还需要知道静力的和机动的条件，这些条件是：

1）**极限条件**，即结构出现屈服时其内力组合应满足的条件。利用屈服条件及有关假设可以得到该条件。

2）**破损机构条件**，即在极限状态下结构的运动规律；或者说在极限荷载作用下，结构失去承载能力时的运动形式。

3）**平衡条件**，变形前的座标系。

4）**几何条件**，即应变和位移之间的关系，对于小变形情况时，还经常假设材料在塑性状态下其体积是不可压缩的。

上述第一、二两个条件应该建立在理论分析和实验研究的基础上，这两个条件是结构极限分析理论的物理依据。第三、四两个条件是结构处于弹性状态或塑性状态都必须满足的条件。如果求得的解答能够同时满足以上的条件（在边界上并满足所给定的边界条件），这样的解即为极限分析的**完全解**。对于梁、刚架、桁架、轴对称圆板以及旋转轴对称薄壳等均已找到它们的完全解。对于较复杂的结构，找出完全解仍是困难的。在这种情况下；用极限分析方法找出结构极限状态时极限承载能力的上、下限是很有意义的。

在结构极限分析理论中，一般采用如下几个假设，即：

1）材料是理想刚塑性的，即采用刚塑性变形模型，不考虑材料的弹性性质和强化效应。

2）结构的变形足够小，因此变形前后都能使用同一平衡方程，而且材料变形的几何关系是线性的。

3）在达到极限荷载前，结构不失去稳定性。

4）所有外荷载都按同一比例增加，即满足简单加载（或称比例加载）的条件。

以上假设对于各类结构均适用。此外，在不同结构的极限分析中，还采用了一些假设。这些假设将分别在各类结构的极限分析中予以介绍。

§1-2 塑性材料的应力-应变曲线及其简化模型

当外荷载作用于结构上时，结构将按其固有的特性产生变形。材料的机械性质及其对结构的影响是固体力学不同分支所研究的内容，这些不同力学分支研究的基础是材料宏观的实验数据。

实验表明，对于大多数固体材料，其最基本的性就是材料的弹性与塑性。材料的弹性性质，是指取消引起结构变形的外力后，结构将恢复到原来的形状和尺寸；亦即结构材料处于弹性阶段时，取消外力后结构中没有永久变形。在实际结构中，材料的线弹性性质得到了最广泛的应用，在这种情况下，应力和应变成比例。材料的塑性性质是指当作用在结构上的外力取消后，结构的变形不完全恢复，而保存有一部分永久变形；这种不可恢复的变形称为塑性变形。结构处于塑性变形阶段时，应力和应变之间没有一一对应的关系，而且应力与应变之间的关系已经是非线性的，这种非线性特征不仅与所研究的具体材料有关，而且与塑性变形的程度有关。

结构材料的弹性与塑性性质最有代表性的实验就是简单的拉伸实验。以应力$\sigma=\dfrac{P}{F}$和应变$\varepsilon=\dfrac{\Delta l}{l_0}$表示的拉伸曲线如图1-1所示。式中$P$为试件所承受的拉力；$F$为试件初始的截面面积；$l_0$为试件的初始长度；$\Delta l$为试件的伸长量。图1-1的$OA$段为弹性阶段，$AC$段为屈服阶段，$CE$段为强化阶段，由$A$点到$O$点、$B$点到$O'$点、$D$点到$O''$点都是卸载过程，而$OO'$及$OO''$则表示

由B点和D点卸载后的残余变形。如果将O'及O''作为初始点继续加载，则拉伸曲线将沿$O'B$及$O''D$分别到达B点和D点后，再分别沿$BCDE$线及DE线继续变形。对于大多数金属材料来说，进行单向压缩实验时，其应力-应变曲线与拉伸时的曲线将是类似的。

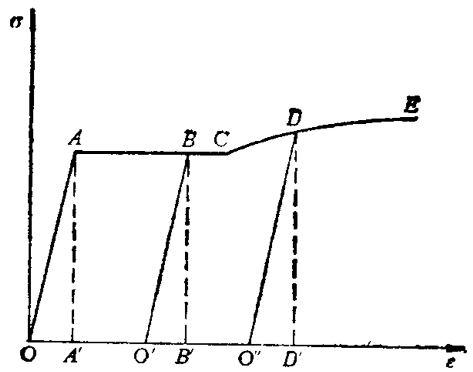

图 1-1 应力-应变曲线

上述的实验曲线描述了材料的主要宏观性质。在塑性力学中（在其它固体力学分支中也是如此）往往把材料性质中最本质的内容加以理想化。在塑性极限分析中，可以将单向拉伸曲线简化成**理想弹塑性变形模型**（图1-2）。在这个模型中，材料的应力达到屈服极限σ_s（A点）前是线性弹性变形阶段，在A点后，应力-应

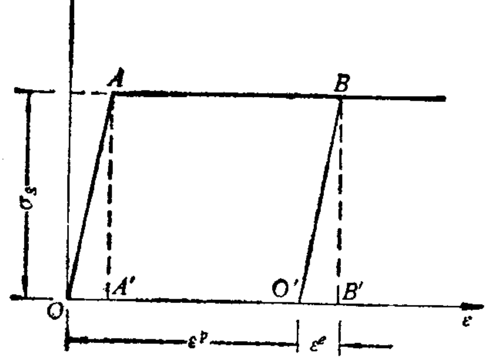

图 1-2 理想弹塑性变形模型

变曲线成一条水平线；这一阶段与图1-1的AC段相对应。在这个阶段中，应力一直保持为σ_s，而应变值可以不断增加，点B处的应变可以表示为

$$\varepsilon=\varepsilon^e+\varepsilon^p$$

式中ε^e为弹性应变；ε^p为塑性应变。

铜、铝等材料的应力-应变曲线没有明显的屈服阶段；在这种情况下，采用图1-2变形体模型是一种近似。

塑性变形比弹性变形大得多时，可以不考虑弹性变形。这种变形体模型称为**刚塑性变形模型**（图1-3）。刚塑性变形模型能够

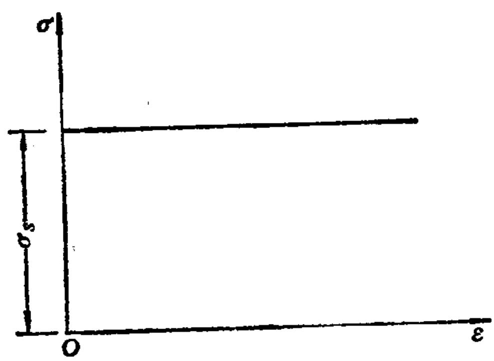

图 1-3　刚塑性变形模型

描述理想塑性体最本质的性质。在刚塑性变形模型中，应力未达到屈服极限σ_s时，不出现塑性变形；当应力一旦达到屈服极限σ_s，应变将无限制地增加。虽然刚塑性变形模型并不能描述真实材料的全部行为，但它能反映塑性变形过程中最本质的内容，且在数学计算上非常简单。因此可以作为建立塑性变形计算方法的基础，用以研究处于塑性状态的结构问题。这是具有实用价值的。

§1-3　塑性极限分析的基本原理和方法

结构的极限分析中，一般采用广义应力作为变量，而不直接采用应力作为变量。结构中的内力，例如弯矩、剪力、轴向力、壳体的薄膜力等都可以作为广义应力。凡是在极限条件中起作用

的内力都称为**广义应力**，一般用 Q_i 表示。用广义应力表示的极限条件为

$$\Phi(Q_1,Q_2,Q_3,\cdots\cdots)=0 \tag{1-1}$$

在 n 维应力空间中，上式表示一个曲面，称为极限曲面。与屈服条件的概念类似，当广义应力的组合处于极限曲面之内时，表示结构处于刚性状态；当结构某截面上广义应力的组合处于极限曲面上时，则表示结构上这一截面已进入屈服状态；当结构上有足够多截面的广义应力组合均处于极限曲面上时，则结构将成为机构，同时变形将无限制地增加，这时可认为结构达到了极限状态。极限曲面的形状不仅与使用的屈服条件有关，而且与结构中所取的广义应力有关。

凡与广义应力 Q_i 相对应的并能使塑性功增加的塑性应变 q_i 都称为**广义应变**。转角、位移、曲率等都可以作为广义应变。在塑性变形过程中，广义应力在相应的广义应变上所作的功称为**耗散功**，即塑性变形过程中所作的功是不可恢复的，且有

$$dW=CQ_i\,dq_i \tag{1-2}$$

上式中 C 为正的乘子，重复下标表示按求和约定计算。若采用广义应变率 $\dot{q}_i$ 作为变量时，则耗散功率为

$$\dot{W}=\frac{dW}{dt}=CQ_i\dot{q}_i \tag{1-3}$$

在塑性变形过程中可以利用上式确定单位耗散功率。

在结构的极限分析中，经常要用到如下两个概念，即：

1）静力容许的应力（内力）场

凡满足平衡条件和力的边界条件，且不破坏屈服条件（极限条件）的应力（内力）场，则称为静力容许的应力（内力）场。

由以上定义可知，当结构处于极限状态时，其真实的应力场必定是静力容许的应力场；在一般情况下，静力容许的应力场并不一定是极限状态时的真实应力场。

2）机动容许的位移场

凡满足几何约束条件，并使外力作正功的位移场，称为机动

容许的位移场。

由以上定义可知，在极限状态时的位移场必定是机动容许的位移场；在一般情况下，机动容许的位移场并不一定是极限状态时的真实位移场。

在极限分析理论中，为了求解复杂结构的极限荷载，要经常利用上限定理与下限定理，这两个定理可以用如上两个概念来描述，即：

1）下限定理

在所有与静力容许应力场对应的荷载中，最大的荷载为极限荷载。

2）上限定理

在所有与机动容许位移场对应的荷载中，最小的荷载为极限荷载。

由下限定理可知，如果整个结构满足平衡条件，并且不破坏极限条件，在一般情况下，结构将不破坏，由此所得荷载为极限荷载的下限。

由上限定理可知，如果结构按某一形式破坏，即存在着内力功不比外力功大的变形状态；由于此时结构已经破坏，在一般情况下，由此所得荷载为极限荷载的上限。

根据极限分析的上、下限定理，可以有两种求解极限荷载的方法，即**机动法**（或称为破坏机构法）和**静力法**。

在静力法中，要求结构必须具有满足平衡条件，且不破坏极限条件的内力场。由于只有在极限状态下结构才能形成破坏机构，在一般情况下，结构具有静力容许的内力场时并不一定破坏。或者说，满足静力容许条件的内力场有无穷多个，在一般情况下，由静力法求得的荷载要比真实的极限荷载小，即用静力法求得的极限荷载是极限荷载的一个下限值。在有限个下限值中，应选取最大的荷载作为极限荷载的近似值，因为最大值与真实的极限荷载最为接近。在静力法中，不考虑结构变形方面的条件，也就是放松了对机动条件的要求。

在机动法中，一般先假设一个破坏机构，并使外力在假设的破坏机构上作正功，然后利用内力功与外力功相等的原理求出与破坏机构对应的极限荷载。由此所得荷载的数值不会小于真实的极限荷载；在这种情况下，应该选取有限个数值中最小的一个，因为它最接近于实际破坏时的荷载。在一般情况下，用机动法求得的极限荷载是极限荷载的一个上限值。

如果一个荷载既是极限荷载的上限，又是它的下限，则这个荷载满足极限分析理论中的全部条件，因此，将这样的解称为极限分析的完全解。

对于复杂的结构，还可以放松对极限条件的要求，即对极限条件简化以找出解的上限或下限。在复杂结构中，用广义应力表示的极限条件，其数学表达式往往是非线性的，将这种非线性的代数方程与板、壳等结构中以偏微分表示的平衡方程联立求解时，经常遇到数学上的困难。因此，用线性化了的极限条件代替非线性的极限条件亦可得到极限荷载的上、下限解。将极限条件

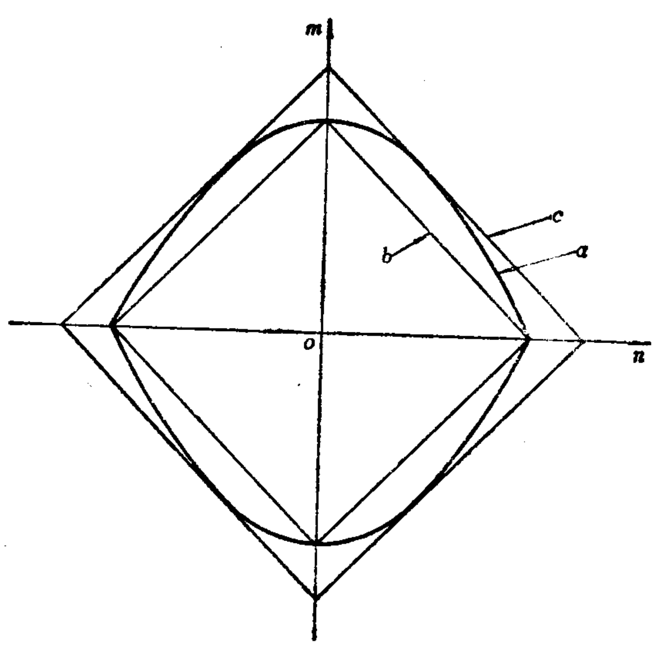

图 1-4 简化极限条件示意图

线性化，在几何上就是将极限曲面用外切或内接的组合平面来代替。如图 1-4 所示，曲线 a 为该二维应力（广义应力）的极限曲线，内接多边形 b 和外切多边形 c 都是线性化了的极限条件，可以用这两个条件代替实际的极限条件。在结构的任何部分提高材料的屈服极限都不会降低结构的极限承载能力，而在结构的任何部分降低材料的屈服极限不会提高结构的极限承载能力。因此，在图1-4中按条件 b 所求得的极限荷载将不大于实际的极限荷载，而按条件 c 所求得的极限荷载将不小于实际的极限荷载，亦即求得了极限荷载的下限值与上限值。用这种方法可以得到许多复杂结构极限荷载的上、下限解。在板、壳结构的极限分析中，简化极限条件法得到了广泛的应用。

§1-4 塑性极限分析的发展

早在 1864 年屈雷斯卡（H.Tresca）提出最大剪应力屈服条件之后，塑性力学便受到了广泛的重视。但是，由于塑性力学中本构关系的复杂性，塑性力学的发展是缓慢的，塑性极限分析理论也不可能系统地发展起来。自从本世纪五十年代初期卓柯（D.C.Drucker）以稳定材料为基础提出了与屈服条件相关联的塑性流动法则之后，塑性极限分析的理论和方法都得到了较大的发展。卓柯、普拉格(W.Prager)、格林贝尔格(H.J.Greenberg)曾对理想弹塑性模型的平面和空间问题的上、下限定理进行了研究，而希尔（R.Hill）则用理想刚塑性模型对最大塑性功原理和最小塑性功原理进行了论证。这两种基于不同变形体模型的论证计算得到的极限荷载是一致的。

对于极限分析中上、下限定理的研究开始较早。在1914年，卡金契（Von Kazinczy）和基斯特（N.C.Kist）便对连续梁的极限承载能力进行了研究，提出了只要满足平衡条件，而在梁的任何截面上都没有使梁破坏的弯矩时，则结构便不致于破坏。这实际上是下限定理的萌芽。此后，英格斯莱夫（A.Ingerslev)和约翰逊（K.W.Johansen）提出了用塑性铰线求板的极限荷载的