现代数学分析基础

〔美〕R. 约翰逊鲍　等著

邓永录　译

中山大学出版社

现 代 数 学 分 析 基 础

〔美〕*R*. 约翰逊鲍　等著

邓 永 录 译

*

中山大学出版社出版发行

广 东 省 新 华 书 店 经 销

中 山 大 学 印 刷 厂 印 刷

*

787×1092毫米　16开本　23.75印张　54万字

1988年 8 月第 1 版　1988年 8 月第 1 次印刷

印数：1—2500册

ISBN 7-306-00078-0/O·6

统一书号：13339·33　定价：3.45元

内 容 简 介

本书在美国是数学系高年级与非数学系研究生一年级的教材．它取材精练、论述严谨、观点较高，能把我们原来开设的数学分析课中的一些理论和概念自然地和现代分析中较高、较抽象的概念和理论（如距离空间、紧性、内积空间、范数、赋范线性空间等）结合一起，而又不会增加大的难度．书中除了含有原来数学分析课的主要理论之外，还把原来实变函数课的基本内容也包括进去．此外还有部分泛函分析、点集拓扑的材料．书中还配有大量的习题，部分还有提示．是数学专业师生的一本好的教材．

序　言

本书是最近十年间我们在一学年的高等微积分课程的教学过程中发展起来的。我们的听众包括三、四年级专修生和优等生，间或也有一些有天赋的二年级学生。

本书在逻辑上是自包含的。这就是说，本书给出的全部结果都有证明，它们最终的基础是实数公理。除了少数几个关于线性代数的结果（我们也把它们归纳在书末简短的附录中）外，我们没有利用其它来源的结果。因此，从理论上来说，理解本书的材料不需要什么预备知识。但实际上，要学习本书应该在数学上具有某种程度的成熟，这一要求可以通过学习像微积分，也许还有线性代数这样一些课程而达到。

我们的目的是让学生掌握现代分析的工具。因为要进一步研究数学，特别是学习统计学、数值分析、微分方程、数学分析和泛函分析都一定与它有密切联系。

我们认为，打好学习分析的坚实基础的关键是对极限概念的了解。因此，在学习过集合和实数系之后，我们就利用数列和数项级数（第四章和第五章）介绍极限的概念。接着是讨论函数的极限（第六章）。然后，我们转到距离空间的一般讨论（第七章）。第八章是微分学的复习。第九章给出黎曼-斯蒂阶斯积分的详细介绍。随后是研究函数序列和函数项级数（第十章和第十一章），傅里叶级数（第十二章），黎斯表示定理（第十三章）和勒贝格积分（第十四章）。前七章可以用作一学期的有关极限概念课程的教材。

我们还认为，学习数学的一个必不可少的部分是"做"数学。因此，我们在本书选入750道以上的习题。其中一些含有不同难度的若干部分。带有*号的习题的提示和解答在书末给出。

鸣谢（略）。

R.　约翰逊鲍

W.E. 帕芬伯杰

译 者 的 话

为了适应开设新专业和课程改革的需要，我们选用并翻译了 R. Johnsonbaugh 和 W.E. Pfaffenberger 合著的"Foundations of Mathematical Analysis"(美国Marcel Dekken公司1981年出版）一书作为数学系的"现代分析基础"课程的教材。这课程是原来的数学分析课程经扩充后的一部分，主要内容安排在二年级讲授。这本教材已连续在我校数学系（包括数学、应用数学和概率统计三个专业）1985和1986级两届的教学中使用过。实践表明，这本书的选材和叙述方法都比较好，它的基本内容是能被数学系二年级学生接受和掌握的。

正如原作者在序言中指出，本书的目的是给学生提供现代分析的理论基础，便于学生以此为工具进一步学习概率统计，数值分析，微分方程，函数论和泛函分析等较高级的课程，这也正是我们选用这本书和把它翻译出来介绍给广大读者的主要目的。我们觉得，由于原作者兼有教学与科研工作的丰富经验，这本书的最大特点（同时也是它成功之处）是在精心选材的基础上，较好地处理具体和抽象，特殊和一般（例如，对实数直线与距离空间及有关紧性、完备性的讨论；黎曼积分与黎曼一斯蒂阶斯积分；实数直线与一般内积空间中的傅里叶级数；实数直线与抽象空间上的勒贝格测度和勒贝格积分等）的关系。书中尽量使用和介绍现代数学的术语、概念和结果，但所用的方法比较容易接受，和普通数学分析沿用的方法相距不远。本书的另一特点是复盖面相当广。除了数学分析的一些主要内容外，它还包含实变函数理论的基本材料。此外，通过学习本书还可以了解和掌握泛函分析，测度论和拓扑学的一些基本概念和结果。

本书除了可供大学数学系学生作教科书外，对于需要了解和掌握现代数学的某些分支的非数学系大学生，研究生以及科研和应用工作者也是一本较好的教材和自学参考书。

原书的一些明显的小错误（其中多为印刷错误）在译本中已不加说明地改正，个别较大的错误或缺陷则以译者注的形式指出并改正。由于作者水平有限，译本存在某些缺点和错误在所难免，敬请同行和读者批评指正。最后，译者对中山大学数学系有关领导和师生的鼓励和帮助，对中山大学出版社的支持表示衷心的感谢。

邓永录

1987年7月于中山大学

J411515121

目 录

第一章　集合和函数

在这一章中我们综述本教程将要用到的某些基本概念和定义。

1. 集　合

作为一个出发点，我们首先说明**集合**的含义。我们并不打算给出术语“**集合**”的定义，只是通过一些例子指出这术语的用途。术语“**集合**”被用来（粗略地）描述任意的对象集合。例如，对象是正整数1，2，3的集合可以表为

$$\{1, 2, 3\}.$$

如果一个集合由有限多个对象组成，我们可以通过列出它的对象来表示这个集合。如果集合由无穷多个对象组成，就不可能把它的对象都列出来。这时，我们可以通过说明这集合的所有对象共有的性质来描述这集合。例如，为了描述正整数集合，我们利用如下记号：

$$\{x \mid x\text{是正整数}\}.$$

这记号应读作“使得x是正整数的所有x的集合”（竖“|”读作“使得”）。一般地，为了描述所有具有某一特殊性质P的对象的集合，我们写

$$\{x \mid x\text{有性质}P\}.$$

如果x是集合A的一个对象，我们记

$$x \in A,$$

并说x是A的一个元素（或者说一个点）。如果x不是集合A的元素，我们写

$$x \notin A.$$

例如，若$\mathbf{Z}$表示整数的集合，则$1 \in \mathbf{Z}$，但$\frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}$。

我们说两个集合A和B**相等**并记作$A = B$，如果A和B有同样的元素。于是，$A = B$如果当$x \in A$时有$x \in B$，而且当$x \in B$时又有$x \in A$。

定义1.1　若A和B是集合，则A和B之**并**是集合

$$A \cup B = \{x \mid x \in A\text{或}x \in B\}.$$

A和B之**交**是集合

$$A \cap B = \{x \mid x \in A\text{和}x \in B\}.$$

例如，若$A = \{1, 2, 3\}$和$B = \{2, 3, 4\}$，则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$A \cap B = \{2, 3\}.$$

我们可用如下方式把并和交的定义推广到多于两个集合的情形。若$\mathscr{A}$是一族集合，我们定义

$$\cup \mathscr{A} = \{x \mid x \in A\text{对某}A \in \mathscr{A}\},$$

$$\bigcap \mathscr{A} = \{ x \mid x \in A \text{对每一} A \in \mathscr{A} \}.$$

当族$\mathscr{A}$以正整数作附标，即$\mathscr{A} = \{ A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots \}$时，我们写

$$\bigcup \mathscr{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \bigcap \mathscr{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

例如，若

$$\mathscr{A} = \{ A_1, A_2, \cdots \}$$

其中$A_1 = \{ 1 \}$，$A_2 = \{ 1, 2 \}$，…，$A_n = \{ 1, 2, \cdots, n \}$，…

则

$$\bigcap \mathscr{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{ 1 \},$$

$$\bigcup \mathscr{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{ 1, 2, \cdots \}$$

是正整数集。

定义1.2 **空集**是没有元素的集合并记作ϕ。

定义1.3 若集合A的每一个元素都是集合B的元素，则记作$A \subset B$并说**A含于B中**或A是B的一个**子集**。

如果$A \subset B$，我们也写作$B \supset A$并说B包含A。

我们要指出，按照定义1.3，$A \subset B$允许$A = B$这一可能性。从我们的定义马上推知，当且只当$A \subset B$和$B \subset A$时$A = B$。如果$A \subset B$和$A \neq B$，我们就称A为B的一个**真子集**。

定义1.4 若A和B是集合，则A和B之**差**是集合

$$A \backslash B = \{ x \mid x \in A \text{和} x \notin B \}$$

例如，若$A = \{ 1, 2, 3 \}$和$B = \{ 2, 3, 4 \}$，$A \backslash B = \{ 1 \}$。

如果我们讨论的所有集合都是某一特殊集合U的子集，我们有时把U称做讨论的**全域**。例如，如果我们讨论的是整数集合，则可以认为全域U是所有整数的集合$\mathbf{Z}$。

定义1.5 如果我们在一个固定的全域U内进行讨论，而且$A \subset U$，我们记

$$A' = U \backslash A.$$

集合$U \backslash A$称做A相对于U的**余集**（如果全域U是明确的话，就简单地称做A的余集）。

例如，若U是实数集合，我们可以说有理数集的余集是无理数集。

现在，我们证明称做德莫根（De Morgan）定律的两个定理。这些定理常常用来把一个关于“并”的命题转化为关于“交”的命题，或者作相反的转化。

定理1.6 若A和B是全域U的子集，则

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

证明 我们只证第一个等式，第二个等式留作习题。

设$x \in (A \cup B)'$。则$x \notin A \cup B$，因此$x \notin A$和$x \notin B$。从而$x \in A'$和$x \in B'$，这蕴含$x \in A' \cap B'$。故

$$(A \cup B)' \subset A' \cap B'.$$

其次，假设$x \in A' \cap B'$，则$x \in A'$和$x \in B'$，因此$x \notin A$和$x \notin B$。于是$x \notin A \cup B$，这蕴含$x \in (A \cup B)'$。故

$$A' \cap B' \subset (A \cup B)'.$$

证毕。 ■

利用类似的方法可以证明下面的定理。

定理1.7 设$\mathscr{A}$是全域U的一族子集，又设

$$\mathscr{A}' = \{ A' \mid A \in \mathscr{A} \}.$$

则 $(\cup \mathscr{A})' = \cap \mathscr{A}'$ $(\cap \mathscr{A})' = \cup \mathscr{A}'$.

习　　题

1.1 设$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

计算下列集合：

(a) $A \cup B$

(b) $A \cap B$

(c) $A \backslash B$

(d) $B \backslash A$

(e) A'

(f) B'

1.2 证明定理1.6的第二个等式。

1.3 证明定理1.7。

在题 4～13中，A，B和C都是全域U的子集。

1.4 证明当且只当$A = \phi$时$A \subset \phi$。

1.5 证明若$A \subset B$和$B \subset C$，则$A \subset C$。

1.6 证明$A \cup B = B \cup A$。

1.7 证明$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$。

1.8 证明$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

1.9 证明$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$。

1.10 证明$(A')' = A$。

1.11 证明若$A \subset B$，则$B' \subset A'$。

1.12 证明$A \cap A' = \phi$。

1.13 证明当且只当$A \cap B' \neq \phi$时$A \not\subset B$（这表示"A不是B的子集"）。

1.14 设U是一全域，A是U的一个子集和$\mathscr{A}$是U的一族子集。证明

(a) $A \cap (\cup \mathscr{A}) = \cup \{ A \cap X \mid X \in \mathscr{A} \}$，

(b) $A \cup (\cap \mathscr{A}) = \cap \{ A \cup X \mid X \in \mathscr{A} \}$.

2. 函　数

函数的概念在所有数学中都是很重要的，在这一节中我们将给出函数的确切定义并

证明函数的若干性质．我们从**序对**的概念开始．

定义2.1 元素a和b的序对(a, b)是集合

$$(a, b)=\{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

a称做(a, b)的第一元素，b称做(a, b)的第二元素．

在下面的定理中我们叙述序对的一个极为重要的性质．这定理告诉我们，当且只当两个序对有同样的第一元素和同样的第二元素时它们是等同的．

定理2.2 设(a, b)和(c, d)是序对，则当且只当$a=c$和$b=d$时$(a, b)=(c, d)$．

证明 假设$a=c$和$b=d$，则$\{a\}=\{c\}$和$\{a, b\}=\{c, d\}$，因此$(a, b)=(c, d)$．

反之，设$(a, b)=(c, d)$．则

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}=\{\{c\}, \{c, d\}\} \tag{2.1}$$

首先，我们考虑$a=b$的情形．这时

$$(a, b)=\{\{a\}, \{a, b\}\}=\{\{a\}, \{a\}\}=\{\{a\}\},$$

因此 $$\{\{c\}, \{c, d\}\}=\{\{a\}\}.$$

于是$\{a\}=\{c\}=\{c, d\}$，故$a=b=c=d$．

现设$a\neq b$．由等式(2.1)看出或者$\{c\}=\{a\}$，或者$\{c\}=\{a, b\}$．因为$a\neq b$，故必有$\{c\}=\{a\}$，由此推出$a=c$．再次利用等式(2.1)得知或者$\{a, b\}=\{c\}$，或者$\{a, b\}=\{c, d\}$．如果$\{a, b\}=\{c\}$，则$a=b=c$，这不可能，于是$\{a, b\}=\{c, d\}$．由此推得$b=c$或$b=d$．但若$b=c$，我们就得到矛盾$b=c=a$．因此$b=d$，于是定理得证．■

定义2.3 若X和Y是集合，则X和Y的**笛卡儿乘积**$X\times Y$是集合

$$X\times Y=\{(x, y)|x\in X\text{和}y\in Y\}.$$

定义2.4 设X和Y是集合．从X到Y中的一个**函数**是$X\times Y$的一个子集f，它满足

(i) 若(x, y)和(x, y')属于f，则$y=y'$．

(ii) 若$x\in X$，则$(x, y)\in f$对某$y\in Y$．

若f是从X到Y中的一个函数，我们将记为$f:X\to Y$．

从X到Y中的函数的最为重要的性质是：X中的每一个元素x〔2．4(ii)〕连结Y中唯一的一个元素y〔2．4(i)〕．

定义2.5 设f是从X到Y中的一个函数，又设$A\subset X$和$B\subset Y$．

(i) X称做f的**定义域**，Y称做f的**上域**．

(ii) 若$(x, y)\in f$，我们记$y=f(x)$并把y称做x关于f的（**正**）**象**．

(iii) f的**值域**是集合

$$\{f(x)|x\in X\}.$$

(iv) A关于f的**象**是集合

$$f(A)=\{f(x)|x\in A\}.$$

(v) B关于f的**逆象**是集合

$$f^{-1}(B)=\{x|f(x)\in B\}.$$

(vi) 若$f(X)=Y$则说f是从X到Y上的。

(vii) 若$f(x)=f(x')$恒蕴含$x=x'$对x，$x'\in X$则称f是一一对应的。

若f是从X到Y中的一一对应函数，则可以定义f的反函数f^{-1}，它是从f的值域到X并由规则

$$(y,\ x)\in f^{-1}\text{当且只当}(x,\ y)\in f$$

确定的函数。注意函数f^{-1}仅当f是一一对应时才有定义，而$f^{-1}(B)$是对任意函数f和所有集合$B\subset Y$都有定义的。

如果$g:X\to Y$和$f:Y\to Z$，我们通过如下的规则定义**复合**（函数）$f\circ g:X\to Z$：

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$对每一$x\in X$。

若$f:X\to Y$和$A\subset X$，我们定义函数

$$f|A=\{(x,\ y)\in f|x\in A\}.$$

$f|A$称做f在A上的**限制**，而f则称做$f|A$在X上的**延拓**。

我们用一个例子说明上面的定义。

例 设

$$f=\{(1,1),\ (2,1),\ (3,4)\},\ A=\{1,2\},\ B=\{1\}.$$

f的定义域是$\{1,\ 2,\ 3\}$而值域是$\{1,\ 4\}$。A关于f的象是集合$f\{A\}=\{1\}$。B关于f的逆象是集合$f^{-1}(B)=\{1,\ 2\}$。如果令$Y=\{1,\ 4\}$，则f是到Y上的。函数f不是一一对应的。f在A上的限制是函数

$$f|A=\{(1,1),\ (2,1)\}$$

令

$$g=\{(1,1),\ (2,3)\},$$

则g是一一对应的，而且g的反函数是函数

$$g^{-1}=\{(1,1),\ (3,2)\}.$$

复合$f\circ g$是函数

$$f\circ g=\{(1,1),\ (2,4)\}.$$

下述定理确立逆象和正象的若干性质。

定理2.6 设f是从X到Y中的函数，$\mathscr{A}$是X的一族子集，$\mathscr{C}$是Y的一族子集。又设$C\subset Y$。则

(i) $f(\cup\mathscr{A})=\cup\{f(A)|A\in\mathscr{A}\}$,

(ii) $f^{-1}(\cup\mathscr{C})=\cup\{f^{-1}(C)|C\in\mathscr{C}\}$,

(iii) $f^{-1}(\cap\mathscr{C})=\cap\{f^{-1}(C)|C\in\mathscr{C}\}$,

(iv) $f^{-1}(C')=[f^{-1}(C)]'$.

证明 我们只证明(ii)。设$x\in f^{-1}(\cup\mathscr{C})$，则$f(x)\in\cup\mathscr{C}$，于是$f(x)\in C_1$对某$C_1\in\mathscr{C}$。因此$x\in f^{-1}(C_1)$，从而$x\in\cup\{f^{-1}(C):C\in\mathscr{C}\}$。这样就证明了

$$f^{-1}(\cup\mathscr{C})\subset\{f^{-1}(C)|C\in\mathscr{C}\}.$$

现设$x\in\cup\{f^{-1}(C):C\in\mathscr{C}\}$，则$x\in f^{-1}(C_1)$对$\mathscr{C}$中某一$C_1$。因此$f(x)\in C_1$，从而$f(x)\in\cup\mathscr{C}$。由此推知$x\in f^{-1}(\cup\mathscr{C})$。这又证明了

$$\cup\{f^{-1}(C)|C\in\mathscr{C}\}\subset f^{-1}(\cup\mathscr{C}).$$

于是(ii)得证。 ■

当$\mathscr{A}=\{A, B\}$和$\mathscr{C}=\{C, D\}$时，定理2.6的结论可以写作

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B),$$
$$f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D),$$
$$f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D),$$

一般说来，$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$是不成立的。（请验证）

习　题

2.1 设 $g=\{(1, 2), (2, 2), (3, 1), (4, 4)\}$

$f=\{(1, 5), (2, 7), (3, 9), (4, 17)\}$

$A=\{1, 2\}$

计算

(a) g的定义域。

(b) g的值域。

(c) $g(A)$。

(d) $g^{-1}(A)$。

(e) $f\circ g$。

(f) f^{-1}。

2.2 设$h:X\to Y$，$g:Y\to Z$和$f:Z\to W$。证明$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$。

2.3 设 $f:X\to Y$和$A\subset X$和$B\subset Y$。证明

(a) $f(f^{-1}(B))\subset B$。

(b) $A\subset f^{-1}(f(A))$。

2.4 证明定理2.6(i)，(iii)和(iv)。

2.5 设$g:X\to Y$和$f:Y\to Z$。

(a)证明若g和f都是一一对应的函数，则$f\circ g$也是一一对应函数，而且$(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$。

(b)证明若g和f都是到其上域上的函数，则$f\circ g$也是到其上域上的函数。

(c)证明若$A\subset Z$，则$(f\circ g)^{-1}(A)=g^{-1}(f^{-1}(A))$。

2.6 设 $f:X\to Y$。证明当且只当

$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ 对X的所有子集A，B时f是一一对应的。

第二章 实数系

本教程的中心研究题目是实数系．我们将通过列出某些公理或规则并假定实数满足这些公理或规则来定义实数．在集合论中，人们可以构造满足这些公理的数系〔参看Kelley(1955)和Landau(1960)〕．我们能够证明这些公理确定实数系(参看习题7.9)．

3. 实数的代数公理

我们从一个定义开始．

定义3.1 在集合X上的一个**二元运算**是从$X\times X$到X中的一个函数．

直观上，在集合X上的一个二元运算是一种规则，它使X的元素的每一序对连结X的唯一元素．二元运算常常写作$+$，$\cdot$或$*$，而在一序对(x,y)上的函数值通常写作$x+y$，$x\cdot y$或$x*y$．我们随即要讨论的特殊的二元运算是实数的加法和乘法．实数的加法或乘法使每一实数序对(a,b)连结另一实数，即是a与b之和或a与b之积．

定义3.2 实数$\mathbf{R}$是满足下面列出的公理1到公理13的对象集合：

公理1 有一个称做加法的二元运算"$+$"，使得若x和y是实数，$x+y$也是一个实数．

公理2 加法是结合的．

$$(x+y)+z=x+(y+z)\quad 对所有x,y,z\in\mathbf{R}.$$

公理3 加法是交换的．

$$x+y=y+x\quad 对所有x,y\in\mathbf{R}.$$

公理4 存在一个加法单位元，即存在一个用0表示的实数，它满足

$$x+0=x=0+x\quad 对所有x\in\mathbf{R}.$$

公理5 存在加法逆元．对于每一$x\in\mathbf{R}$，存在$y\in\mathbf{R}$，使得

$$x+y=0=y+x.$$

可以证明公理5中的数y是唯一的，我们用$-x$表示它．对于$\mathbf{R}$中所有x和z，我们定义$x-z$为$x+(-z)$．

任意满足公理1—5的数学系统称做交换（阿贝耳）群．利用公理1—5可以建立实数加法的一般规则．在下面的定理中我们给出一个例子，某些其它加法性质将作为习题给出．

定理3.3 公理4中的加法单位元是唯一的，即若存在$0'\in\mathbf{R}$，使得$x+0'=x$对所有$x\in\mathbf{R}$，则$0=0'$．

证明 假设存在$0'\in\mathbf{R}$，使得$x+0'=x$对所有$x\in\mathbf{R}$．则$0+0'=0$．另一方面，由公理4有$0'+0=0'$．因为加法是交换的（公理3），

$$0=0+0'=0'+0=0' \qquad ■$$

公理6 有一个称做乘法的二元运算"$\cdot$"，使得若x和y是实数，则$x\cdot y$（或xy）

也是一个实数。

公理7 乘法是结合的。

$(xy)z = x(yz)$ 对所有$x,y,z\in\mathbf{R}$。

公理8 乘法是交换的。

$xy = yx$ 对所有$x,y\in\mathbf{R}$。

公理9 存在一个乘法单位元，即存在一个用1表示的异于0的实数，它满足

$x\cdot 1 = x = 1\cdot x$对$\mathbf{R}$中所有x。

公理10 非零实数存在乘法逆元。对于任意$x\in\mathbf{R}$且$x\neq 0$，存在$y\in\mathbf{R}$，使得

$xy = 1 = yx$。

下面的公理把加法和乘法运算连系起来。

公理11 乘法关于加法是分配的。

$x(y+z) = xy + xz \quad (y+z)x = yx + zx$

对所有$x,y,z\in\mathbf{R}$。

像在加法的情形中那样，我们可以证明1和乘法逆元是唯一的。一个非零实数x的乘法逆元用x^{-1}或$1/x$表示.若$y\neq 0$，我们定义$x/y = x(y^{-1})$。任意满足公理1～11的数学系统称做**域**。利用公理1～11可以建立实数的所有众所周知的代数性质。下面给出一个例子，其余的将在习题中给出。今后我们将假定实数这些众所周知的代数性质都已根据公理验证过。对此有兴趣的读者可参考Landau(1960)，看一看这些工作是怎样完成的。

定理3.4 $x\cdot 0 = 0$对所有$x\in\mathbf{R}$。

证明 由公理4知$x\cdot(0+0) = x\cdot 0$.另一方面，由公理11有$x\cdot(0+0) = x\cdot 0 + x\cdot 0$，于是$x\cdot 0 = x\cdot 0 + x\cdot 0$。现在，我们可以写

$$x\cdot 0 + [-(x\cdot 0)] = (x\cdot 0 + x\cdot 0) + [-(x\cdot 0)].$$

再利用公理5和公理2得

$$0 = x\cdot 0 + 0 ,$$

因此由公理4得 $0 = x\cdot 0$。

习　　题

3.1 证明公理5的加法逆元是唯一的。

3.2 证明

(a) $(x+y)+(z+w) = (x+(y+z))+w$ 对所有$x,y,z,w\in\mathbf{R}$。

(b) 和$x+y+z+w$不依赖于在其中插入括号的方式。

3.3 证明$-(-x) = x$对所有$x\in\mathbf{R}$。

3.4 证明$-(x+y) = -x-y$对所有$x,y\in\mathbf{R}$。

3.5 设$x,y\in\mathbf{R}$,证明当且只当$x=0$或$y=0$时$xy=0$。

3.6 设$x,y\in\mathbf{R}$,证明若$xy = xz$且$x\neq 0$,则$y = z$。

3.7 证明$-(xy) = x(-y) = (-x)y$对所有$x,y\in\mathbf{R}$。

3.8 证明$(-1)x=-x$对所有$x\in\mathbf{R}$.

4. 实数的序公理

在这一节中我们给出实数的序公理并推出若干有用的结果.

公理12 $\mathbf{R}$有一个称做**正实数**的子集P，它满足：

(i) 若x和y在P中，则$x+y$和xy也在P中.

(ii) 若$x\in\mathbf{R}$，则下列命题中恰有一个成立：

$$x\in P \quad 或 \quad x=0 \quad 或 \quad -x\in P.$$

利用公理12我们能够定义通常的序记号.

定义4.1 设x和y是实数.

(i) 若$-x$是正的，则说x是负的.

(ii) $x>y$表示$x-y$是正的.

(iii) $x\geqslant y$表示$x>y$或$x=y$.

(iv) $x<y$表示$y>x$.

(v) $x\leqslant y$表示$y\geqslant x$.

不等式$x>y(x<y)$读作"x大于(小于)y"，不等式$x\geqslant y(x\leqslant y)$读作"$x$大于(小于)或等于$y$."下面的定理给出实数的一些序性质.

定理4.2

(i) $1>0$.

(ii) 若$x>y$和$y>z$，则$x>z$，$x,y,z\in\mathbf{R}$.

(iii) 若$x>y$，则$x+z>y+z$，$x,y,z\in\mathbf{R}$.

(iv) 若$x>y$和$z>0$，则$xz>yz$，$x,y,z\in\mathbf{R}$.

(v) 若$x>y$和$z<0$，则$xz<yz$，$x,y,z\in\mathbf{R}$.

证明 我们证明(i)和(ii)，其它部分留作习题. 根据公理12，下列命题中恰有一个成立：

$$1\in P \quad 或 \quad 1=0 \quad 或 \quad -1\in P.$$

由公理9知$1\neq 0$. 假设$-1\in P$，则由公理12有$(-1)(-1)=1\in P$(见习题3.8)，因此$1\in P$和$-1\in P$，这与公理12矛盾. 故$1\in P$，即(i)成立.

若$x>y$和$y>z$，则按定义4.1有$x-y,y-z\in P$. 由公理12知$x-z=(x-y)+(y-z)\in P$，因而$x>z$. ■

在本书的余下部分我们将使用下面的记号：

定义4.3 设$a,b\in\mathbf{R}$，$a<b$. 我们定义

$$(a,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x<b\}$$

$$[a,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

$$[a,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x<b\}$$

$$(a,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x\leqslant b\}$$

$$(-\infty,a)=\{x\in\mathbf{R}\mid x<a\}$$