纯粹数学与应用数学专著 第16号

微分几何学

及其在物理学中的应用

陆启铿 著

科学出版社

纯粹数学与应用数学专著第16号

微分几何学
及其在物理学中的应用

陆启铿 著

科学出版社

1986

内 容 簡 介

本书介绍高维微分几何学的基本知识，特别着重于与现代理论物理学有关的以及与大范围微分几何学有关的内容．全书共分七章：1．张量分析；2.四维空间；3.旋量分析；4.N–P 方程；5.微分流形；6.黎曼几何；7．测地线的指数和比较定理．

本书可供高等学校数学系、物理系高年级学生、研究生及数学与物理工作者参考．

微分几何学及其在物理学中的应用

陆启铿 著

责任编辑 李义发

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院开封印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1982年3月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1986年3月第二次印刷 印张：10

印数：11,201—13,600 字数：226,000

统一书号：13031·1815

本社书号：2467·13—1

定价：2.80 元

序　　言

现代微分几何学的主流，一方面是大范围的研究，另一方面是研究它在物理学中的应用．本书的目的是介绍这两方面的基础知识，虽然物理学所应用的微分几何学，近来已有大范围的趋势，但许多应用仍然是局部的，所以本书仍然从局部的微分几何学开始，再逐步转到大范围方面．

本书是根据作者在 1970 年所编写的《旋量分析与引力辐射》和 1972 年编写的《规范场与纤维丛》以及近两、三年来为中国科学院研究生院编写的微分几何学等讲义为基础而写成的．在改写过程中，得到邹振隆、钟家庆、陈志华、叶芳草、吴可、杨洪苍等同志的大力协助，特在此表示感谢．

著　者

《纯粹数学与应用数学专著》丛书

目　　录

第一章 张量分析

§1.1 张　量

令 R^m 代表所有m个实数 $x=(x^1, \cdots, x^m)$ 组成的空间，x 也称为 R^m 的点. $x^j(j=1,2,\cdots,m)$ 称为 x 点的坐标. 在 R^m 的任两点 x 与 y 之间可以引进一度量

$$|x-y|=\{(x^1-y^1)^2+\cdots+(x^m-y^m)^2\}^{1/2}, \quad (1.1.1)$$

称为欧氏度量. 于是可由此定义 R^m 的一拓扑.

设V是 R^m 中的开集，映照 $f:V\to\tilde{V}$ 把V映入 R^n 的一子集 $\tilde{V}$. 设 $x\in V$ 映为 $\tilde{x}\in\tilde{V}$，表示为

$$x\longmapsto\tilde{x}=f(x).$$

于是x的坐标 x^j 与 $\tilde{x}$ 的坐标 $\tilde{x}^\alpha(\alpha=1,\cdots,n)$之间有一函数关系:

$$\tilde{x}^\alpha=f^\alpha(x)=f^\alpha(x^1,\cdots,x^m),$$

$f^\alpha(x)$称为映照函数. 如果所有的 $f^\alpha\in C^r(V)$($C^r(V)$表示在V中，有r次连续偏微分的函数集合)，则f称为r次可微分映照. 今后如非有特别说明，为方便起见，我们说可微分函数是指可无穷次微分函数，而微分映照则是指无穷次可微分映照.

目前暂考虑 $\tilde{V}$ 也是 R^m 的开集，微分映照 $f:V\to\tilde{V}$ 是一一对应的，且映照函数

$$\tilde{x}^j=f^j(x) \quad (1.1.2)$$

的函数方阵

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}=\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^m} \end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$

是非异的情形. 此时，变换(1.1.2)称为局部坐标变换或简称坐标变换.

令K代表实数域或复数域，$GL(N,K)$表示矩阵元素属于K的 $N\times N$ 非异方阵所成的群. 由于 $GL(N,K)$是欧氏空间 K^{N^2} 的开集，其幺元素，即单位方阵 I，必有 K^{N^2} 中的邻域仍然包含于$GL(N,K)$.

设G是 $GL(N,K)$的子群，它满足下述条件:

(i)存在 $GL(N,K)$ 单位方阵I的邻域 $\mathfrak{V}_\varepsilon$，使得 $\mathfrak{W}_\varepsilon=G\cap\mathfrak{V}_\varepsilon$ 的元素与 R^r 的原点的邻域 $W_\varepsilon=\{\sigma=(\sigma^1,\cdots,\sigma^r)\in R^r\,|\,|\sigma^\alpha|<\varepsilon,\ \alpha=1,\ \cdots,\ r\}$ 的点一一地对应，并且如 $A\in G\cap\mathfrak{V}_\varepsilon$，$A=(A^\alpha_\beta)_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant r}$，则

$$A^\alpha_\beta=A^\alpha_\beta(\sigma)=A^\alpha_\beta(\sigma^1,\cdots,\sigma^r)$$

是 σ^α 的实解析函数，其函数矩阵之秩为 r. 为简便起见，我们记$A(\sigma)=(A^\alpha_\beta(\sigma))$. 此外假定 $A(0)=I$.

(ii)存在实解析函数$\psi(\sigma,\tau)=(\psi^1(\sigma,\tau),\cdots,\psi^r(\sigma,\tau))$，在 $(\sigma,\tau)\in W_{\varepsilon_1}\times W_{\varepsilon_1}$ $(0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon)$ 定义的乘法函数，使得 $\psi(\sigma,\tau)\in W_\varepsilon$，且

$$A(\sigma)A(\tau)=A(\psi(\sigma,\tau)),$$

这时G称为 r 维矩阵李群.

若 $B_0\in G$，但 $B_0\notin\mathfrak{W}_\varepsilon$，令

$$B_0\mathfrak{W}_\varepsilon=\{B\in G\,|\,B=B_0A,\ A\in\mathfrak{W}_\varepsilon\},$$

则当 $B\in B_0\mathfrak{W}_\varepsilon$ 时，能写为

$$B=B_0A(\sigma),\ \sigma\in W_\varepsilon,$$

这证明G中的任一元素可用 $\sigma\in W_\varepsilon$ 的参数来表示.

设G是 r 维 $N\times N$ 矩阵李群. 又设任一坐标变换(1.1.2)对应于 $f:V\to\widetilde{V}$ 有一映照 $\varphi_{\widetilde{V}V}:V\to G$, 使得当 $x\longmapsto\varphi_{\widetilde{V}V}(x)\in B_0\mathfrak{W}_\varepsilon$ 因而可写 $\varphi_{\widetilde{V}V}(x)=B_0A(\sigma)$ 时,参数 σ 是 x 的可微分函数. 此外,如有 $\tilde{f}:\widetilde{V}\to\tilde{\widetilde{V}}$ 是另一坐标变换,则有

$$\varphi_{\tilde{\widetilde{V}}V}(x)=\varphi_{\tilde{\widetilde{V}}\widetilde{V}}(\tilde{x})\varphi_{\widetilde{V}V}(x), \tag{1.1.4}$$

其中 $\varphi_{\tilde{\widetilde{V}}V}$ 是相应于坐标变换 $\tilde{f}\circ f:V\to\tilde{\widetilde{V}}$ 的映照 $\varphi_{\tilde{\widetilde{V}}V}:V\to G$, 而(1.1.4)右边的乘法表示矩阵乘法. 这些 $\varphi_{\widetilde{V}V}(x)$称为联接方阵.

在V的 x 点的一 G 型张量, 即在 x 点有一组数 $\xi^\alpha(x)$ $(\alpha=1,\cdots,N)$, 使得对任一坐标变换(1.1.2)对应于 $\widetilde{V}$ 的 $\tilde{x}$ 点有一组数 $\xi^\alpha(\tilde{x})$, 适合

$$\xi^\alpha(\tilde{x})=\sum_{\beta=1}^{N}[\varphi_{\widetilde{V}V}(x)]^\alpha_\beta\xi^\beta(x), \tag{1.1.5}$$

其中 $[\varphi_{\widetilde{V}V}(x)]^\beta_\alpha$ 是联接方阵 $\varphi_{\widetilde{V}V}(x)$ 的矩阵元素.

如果每一点 $x\in V$, 都有一G型向量 $\xi^\alpha(x)$ 是 $x\in V$ 的连续函数, 且联接矩阵也是连续的, 即矩阵的元素是 $x\in V$ 的连续函数,则 $\xi^\alpha(x)$ 称为在V中的G型向量场.通常假定联接矩阵是可微分的. 如 $\xi^\alpha(x)$ 是在V可微分的,则称为V中的可微分的G型向量场.

显然, 所有在 x 点的G型向量成实数域或复数域下的N维线性空间,用 T^G_x 来表示. T^G_x 的对偶空间用 $\overset{*}{T}{}^G_x$ 表示,众所周知,任一 $\zeta\in\overset{*}{T}{}^G_x$ 存在一组数 $\zeta_\alpha(x)$, 使得对任一 $\xi\in T^G_x$, 其分量为 $\xi^\alpha(x)$ 时有

$$\zeta(\xi)=\sum_{\alpha=1}^{N}\zeta_\alpha(x)\xi^\alpha(x),$$

其中 $\zeta_\alpha(x)$ 称为 ζ 的分量.显然,经过局部坐标变换(1.1.2),

对应于 $\tilde{x}$ 的分量 $\xi_\alpha(\tilde{x})$ 满足如下的关系：

$$\xi_\alpha(\tilde{x}) = \sum_{\beta=1}^{N} \zeta_\beta(x)[\varphi_{\tilde{V}}^{-1}{}_V(x)]^\beta_\alpha, \tag{1.1.6}$$

其中 $\varphi_{\tilde{V}}^{-1}{}_V(x)$ 表 $\varphi_{\tilde{V}V}(x)$ 的逆方阵．ζ 称为 G 型协向量．反之，如在 V 的点 x 有一组数 $\zeta_\alpha(x)$ 连续依赖于 x，，对局部坐标变换满足(1.1.6)，则 $\zeta_\alpha(x)$ 定义一 x 点的 G 型协向量．

最显然的情形是 $G=1$．此时的 G 型向量称为标量．在 V 的标量场即 V 中的函数．

设在 $x \in V$ 有一组量 $T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}(x)$ $(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s = 1,\cdots,N)$，它经坐标变换(1.1.2)有如下的变换关系：

$$\tilde{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}(\tilde{x}) = [\det\varphi_{\tilde{V}V}(x)]^\sigma T^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s}(x)$$

$$\times [\varphi_{\tilde{V}V}(x)]^{\alpha_1}_{\lambda_1}\cdots[\varphi_{\tilde{V}V}(x)]^{\alpha_r}_{\lambda_r}[\varphi_{\tilde{V}}^{-1}{}_V(x)]^{\mu_1}_{\beta_1}\cdots[\varphi_{\tilde{V}}^{-1}{}_V(x)]^{\mu_s}_{\beta_s}, \tag{1.1.7}$$

则称为 x 点的 G 型的权 σ 的 r 阶逆变，s 阶协变张量．这里我们利用和号省略，即有指标相同的代表对此指标从 1 到 N 求和．今后如非特别声明，皆按此规定处理．

当权 $\sigma=0$，$T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}(x)$ 简称为 x 点的 G 型的 r 阶逆变 s 阶协变张量．

微分几何中最常见的群 G 是 $GL(m,R)$，即所有 $m\times m$ 实非异方阵所成的群，而取 $\varphi_{\tilde{V}V}(x) = \dfrac{\partial\tilde{x}}{\partial x}$．此时我们不必说是 $GL(m,R)$ 型张量，而简称为张量便可以了．x 点的向量所成的线性空间就简写为 T_x．x 点的向量最简单的例子是过 x 点的一可微分曲线 $x^i = x^i(t)$ 的切线：

$$\xi^i(x) = \frac{dx^i}{dt},$$

而协变向量的最简单例子是 x 点附近可微分函数 $\phi(x)$ 的偏微分：

$$\zeta_i(x)=\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^j}.$$

令

$$\delta^j_k=\begin{cases}1, & 当\ j=k;\\ 0, & 当\ j\neq k.\end{cases}\tag{1.1.8}$$

很容易地证明，这是一阶逆变以及一阶协变的张量．又令

$$\delta^{j_1\cdots j_r}_{k_1\cdots k_r}=\begin{vmatrix}\delta^{j_1}_{k_1}\cdots\delta^{j_1}_{k_r}\\ \cdots\cdots\\ \delta^{j_r}_{k_1}\cdots\delta^{j_r}_{k_r}\end{vmatrix},\tag{1.1.9}$$

这称为 Kronecker δ 符号．容易证明这是 r 阶逆变和 r 阶协变张量．此外，它有如下性质：任两逆变指标互换，或任两协变指标互换时差一负号，并且如果 $j_1,\cdots,j_r$ 中有一指标不同于 $k_1,\cdots,k_r$ 时，则 $\delta^{j_1\cdots j_r}_{k_1\cdots k_r}=0$.

§1.2　联络与协变微分

设G是 r 维 $N\times N$ 矩阵李群，据 §1.1 矩阵李群定义有乘法函数 $\psi^a(\sigma,\tau)(a=1,\cdots,r)$．令

$$u^a_b(\sigma)=\left[\frac{\partial\psi^a(\sigma,\tau)}{\partial\tau^b}\right]_{\tau=0},\quad a,b=1,\cdots,r.\tag{1.2.1}$$

由于 $\psi^a(\sigma,0)=\sigma^a$ 及 $\psi^a(0,\tau)=\tau^a$, 故 有 $u^a_b(0)=\delta^a_b(a,b=1,\cdots,r)$，因此，当正数 ε_1 充分小时，方阵 $(u^a_b(\sigma))_{1\leqslant a,b\leqslant r}$ 当$\sigma\in W_{\varepsilon_1}$ 是非异的．令 $(v^a_b(\sigma))_{1\leqslant a,b\leqslant r}$ 是它的逆方阵．由 § 1.1 矩阵李群定义的条件 (ii) 可知，当 $A(\sigma),A(\tau)\in\mathfrak{W}_{\varepsilon_1}$ 时，有

$$A(\sigma)\frac{\partial A(\tau)}{\partial\tau^a}=\sum_{b=1}^{r}\frac{\partial A(\psi)}{\partial\psi^b}\frac{\partial\psi^b(\sigma,\tau)}{\partial\tau^a},a=1,\cdots,r.\tag{1.2.2}$$

取 $\tau=0$, 而令

$$T_a = \left[\frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau^a}\right]_{\tau=0}, \quad a = 1, \cdots, r, \qquad (1.2.3)$$

这是 $N \times N$ 常数方阵，它们是线性独立的，如若不然，有一组数 $\lambda^1, \cdots, \lambda^r$ 使得 $\sum_{a=1}^{r} \lambda^a T_a = 0$, 于是有

$$\sum_{a=1}^{r} \lambda^a \left[\frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau^a}\right]_{\tau=0} = 0.$$

令 $A(\tau) = (A^\alpha_\beta(\tau))_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant r}$, 上式即

$$\sum_{c=1}^{r} \lambda^c \left[\frac{\partial A^\alpha_\beta(\tau)}{\partial \tau^c}\right]_{\tau=0} = 0,$$

这与 §1.1 矩阵李群的定义 (i) 中所说 $A^\alpha_\beta(\tau)$ 的函数矩阵之秩为 r 相矛盾. 令 $\mathfrak{g}$ 为以 $T_1, \cdots, T_r$ 为基生成的线性空间, T_a 称为对于参数 $\sigma^1, \cdots, \sigma^r$ 的自然基. 令 $\tau = 0$, 我们由 (1.2.2), 得出

$$A(\sigma) T_a = \sum_{b=1}^{r} \frac{\partial A(\sigma)}{\partial \sigma^b} u^b_a(\sigma),$$

或者

$$A^{-1}(\sigma) \frac{\partial A(\sigma)}{\partial \sigma^b} = \sum_{a=1}^{r} v^a_b(\sigma) T_a, \; b = 1, \cdots, r. \qquad (1.2.4)$$

若 $B \in B_0 \mathfrak{W}_\varepsilon$, 便能写成 $B = B_0 A(\sigma)$, 此时有

$$B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \sigma^b} = A^{-1} \frac{\partial A(\sigma)}{\partial \sigma^b} = \sum_{a=1}^{r} v^a_b(\sigma) T_a, \; b = 1, \cdots, r,$$

这证明对 G 中任一方阵 B, $B^{-1} \dfrac{\partial B}{\partial \sigma^a}$ 能够用常数方阵 T_a 的线性组合来表示，其系数 $v^a_b(\sigma)$ 是 σ 的实解析函数.

当 $\sigma, \tau \in \mathfrak{W}_{\varepsilon_1}$, 由

$$\sum_{a=1}^{r} v_b^a(\sigma)A^{-1}(\tau)T_aA(\tau)$$

$$= A^{-1}(\tau)A^{-1}(\sigma)\frac{\partial A(\sigma)}{\partial\sigma^b}A(\tau). \qquad (1.2.4)'$$

我们对(1. 2. 4)微分，有

$$A^{-1}\frac{\partial^2 A}{\partial\sigma^a\partial\sigma^b} - A^{-1}\frac{\partial A}{\partial\sigma^a}A^{-1}\frac{\partial A}{\partial\sigma^b} = \sum_{d=1}^{r}\frac{\partial v_b^d}{\partial\sigma^a}T_d.$$

把 a 与 b 交换而相减，得出

$$A^{-1}\frac{\partial A}{\partial\sigma^a}A^{-1}\frac{\partial A}{\partial\sigma^b} - A^{-1}\frac{\partial A}{\partial\sigma^b}A^{-1}\frac{\partial A}{\partial\sigma^a}$$

$$= \sum_{d=1}^{r}\left(\frac{\partial v_a^d}{\partial\sigma^b} - \frac{\partial v_b^d}{\partial\sigma^a}\right)T_d.$$

取 $\sigma = 0$，而令常数

$$C_{ab}^d = \left[\frac{\partial v_a^d(\sigma)}{\partial\sigma^b} - \frac{\partial v_b^d(\sigma)}{\partial\sigma^a}\right]_{\sigma=0},$$

便有

$$T_aT_b - T_bT_a = \sum_{d=1}^{r} C_{ab}^d T_d.$$

在 $\mathfrak{g}$ 中引进如下乘法：

$$[T_a, T_b] = T_aT_b - T_bT_a.$$

如 $X, Y \in \mathfrak{g}, X = \Sigma\lambda^a T_a, Y = \Sigma\mu^a T_a$，则

$$[X, Y] = \sum_{a,b=1}^{r}\lambda^a\mu^b[T_a, T_b].$$

上面已经证明

$$[T_a, T_b] = \sum_{d=1}^{r} C_{ab}^d T_d,$$

因此 $[X,Y]\in\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}$ 称为矩阵李群 G 的李代数，C^d_{ab} 称为对于基 T_a的结构常数.

当 $\sigma,\tau\in\mathfrak{W}_{\varepsilon_1}$，由（1.2.4)′可知

$$\sum_{a=1}^{r} v^a_b(\sigma)A^{-1}(\tau)T_aA(\tau)=A^{-1}(\tau)A^{-1}(\sigma)\frac{\partial A(\sigma)}{\partial\sigma^b}A(\tau)$$

$$=A^{-1}(\tau)A^{-1}(\sigma)A(\tau)\frac{\partial A^{-1}(\tau)A(\sigma)A(\tau)}{\partial\sigma^b}.$$

由于 $[A(\tau)]^{-1}$ 的矩阵元素仍然是 τ 的实解析函数,而

$$A^{-1}(\tau)A(\sigma)A(\tau)=A^{-1}(\tau)A(\phi(\sigma,\tau))\in G,$$

因此,它能够用 W_{ε_1} 的参数 Ψ^a 表示,即

$$A^{-1}(\tau)A(\sigma)A(\tau)=A(\Psi(\sigma,\tau)). \qquad (1.2.5)$$

我们得出

$$\sum_{a=1}^{r} v^a_b(\sigma)A^{-1}(\tau)T_aA(\tau)$$

$$=A^{-1}(\Psi(\sigma,\tau))\frac{\partial A(\Psi(\sigma,\tau))}{\partial\Psi^a}\frac{\partial\Psi^a(\sigma,\tau)}{\partial\sigma^b}$$

$$=\sum_{b,c=1}^{r} v^c_a(\Psi(\sigma,\tau))\frac{\partial\Psi^a(\sigma,\tau)}{\partial\sigma^b}T_c.$$

令 $\sigma=0$，于是有 $A(\Psi(0,\tau))=I$，即 $\Psi(0,\tau)=0$，因此得出

$$A^{-1}(\tau)T_bA(\tau)=\sum_{c=1}^{r}[Ad(\tau)]^c_bT_c, \qquad (1.2.6)$$

其中

$$[Ad(\tau)]^c_b=\left[\frac{\partial\Psi^c(\sigma,\tau)}{\partial\sigma^b}\right]_{\sigma=0}.$$

设 $\xi^a(x)$ 是 V 中 G 型可微分向量场,于是经过坐标变换

(1.1.2)，有

$$\tilde{\xi}^{\alpha}(\tilde{x}) = \xi^{\beta}(x)[\varphi_{\tilde{V}V}(x)]^{\alpha}_{\beta},$$

微分后有

$$\frac{\partial\tilde{\xi}^{\alpha}}{\partial\tilde{x}^{\beta}} = \frac{\partial\xi^{\lambda}}{\partial x^{k}}[\varphi_{\tilde{V}V}(x)]^{\alpha}_{\lambda}\frac{\partial x^{k}}{\partial\tilde{x}^{\beta}} + \xi^{\lambda}\frac{\partial[\varphi_{\tilde{V}V}(x)]^{\alpha}_{\lambda}}{\partial\tilde{x}^{\beta}}. \quad (1.2.7)$$

从上式中可看出，ξ^{λ} 的微分不再成为 G 型张量，为了设法使之成为另一矩阵李群 G_1 型的张量，我们引进一个联络的概念.

设 G 是 r 维 $N\times N$ 矩阵群. 在 V 中有一 G 型联络，即对于 G 的一组基方阵 T_a 有一组 V 中可微分量 $\Gamma^{a}_{j}(x)(a=1,\cdots,r;j=1,\cdots,m)$，使得经坐标变换(1.1.2)，在 $\tilde{V}$ 中相应的量 $\tilde{\Gamma}^{a}_{j}(\tilde{x})$ 有如下的关系:

$$\sum_{a=1}^{r}\tilde{\Gamma}^{a}_{j}(\tilde{x})T_a = \Big[\varphi_{\tilde{V}V}(x)\sum_{a=1}^{r}\Gamma^{a}_{k}(x)T_a\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}(x) - \frac{\partial\varphi_{\tilde{V}V}(x)}{\partial x^{k}}\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}(x)\Big]\frac{\partial x^{k}}{\partial\tilde{x}^{j}}. \quad (1.2.8)$$

令 $\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}(x) = \varphi_{V\tilde{V}}(\tilde{x})$ 的参数为 $\varphi^{a}_{V\tilde{V}}(\tilde{x})$, $a=1,\cdots,r$, 于是由(1.2.4)，有

$$\frac{\partial\varphi_{\tilde{V}V}(x)}{\partial\tilde{x}^{j}}\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}(x) = -\varphi_{\tilde{V}V}(x)\frac{\partial\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}(x)}{\partial\tilde{x}^{j}}$$

$$= -\varphi^{-1}_{V\tilde{V}}(\tilde{x})\frac{\partial\varphi_{V\tilde{V}}(\tilde{x})}{\partial\varphi^{a}_{V\tilde{V}}}\frac{\partial\varphi^{a}_{V\tilde{V}}(\tilde{x})}{\partial\tilde{x}^{j}}$$

$$= -\sum_{a,b=1}^{r}v^{b}_{a}(\varphi_{V\tilde{V}}(\tilde{x}))\frac{\partial\varphi^{a}_{V\tilde{V}}(\tilde{x})}{\partial\tilde{x}^{j}}T_b,$$

其中 $v^{b}_{a}(\varphi_{V\tilde{V}}(\tilde{x}))$ 表示 $v^{b}_{a}(\varphi^{1}_{V\tilde{V}}(\tilde{x}),\cdots,\varphi^{r}_{V\tilde{V}}(\tilde{x}))$.

根据(1.2.6)，可把(1.2.8)写成

$$\tilde{\Gamma}^a_j(\tilde{x}) = \sum_{b=1}^{r} Ad(\varphi_{V\tilde{V}}(\tilde{x}))^a_b \Gamma^b_k \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j}$$

$$+ \sum v^a_b (\varphi_{V\tilde{V}}(\tilde{x})) \frac{\partial \varphi^b_{V\tilde{V}}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^j}. \tag{1.2.9}$$

另一方面,若令

$$T_a = (T^a_{a\beta})_{1<\alpha,\beta<N}, \tag{1.2.10}$$

及

$$\Gamma^\alpha_{\beta k} = \sum_{a=1}^{r} \Gamma^a_k T^\alpha_{a\beta}, \tag{1.2.11}$$

则(1.2.8)写成矩阵元素的形式为

$$\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta j}(\tilde{x}) = [\varphi_{\tilde{V}V}(x)]^\alpha_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu k}(x)[\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}(x)]^\mu_\beta \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j}$$

$$- \frac{\partial[\varphi_{\tilde{V}V}(x)]^\alpha_\lambda}{\partial \tilde{x}^j}[\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}(x)]^\lambda_\beta. \tag{1.2.12}$$

有时我们称满足上面条件的 $\Gamma^\alpha_{\beta j}(x)$ 为 G 型联络.

我们可定义 G 型向量场 $\xi^\alpha(x)$ 的对于联络 $\Gamma^\alpha_{\beta j}$ 的协变微分为

$$\xi^\alpha_{\ ;j} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j} + \xi^\beta \Gamma^\alpha_{\beta j}, \tag{1.2.13}$$

则由(1.2.12)可知,对于坐标变换有

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \tilde{x}^j} + \xi^\beta \tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta j} = \left(\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^k} + \xi^\mu \Gamma^\lambda_{\mu k}\right)[\varphi_{\tilde{V}V}(x)]^\alpha_\lambda \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial \tilde{\chi}^j},$$

此即

$$\tilde{\xi}^\alpha_{\ ;j} = \xi^\beta_{\ ;k}[\varphi_{\tilde{V}V}(x)]^\alpha_\beta \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j}, \tag{1.2.14}$$

这说明 $\xi^\beta_{;k}$ 是 G_1 型张量, 其中 $G_1 = G \times GL(m, R)$, G_1 的元素是由直乘 $A \times B$ 组成的, $A \in G$, $B \in GL\ (m, R)$,