高等学校教学用书

线性代数

周先意 编著

浙江大学出版社

高 等 学 校 教 学 用 书

线 性 代 数

周先意　编 著

浙 江 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书由浙江大学应用数学系周先意编著，与传统方法比较，对内容的处理有很大不同，使用篇幅较少而内涵较多，更便于教学。

全书分八章：行列式、矩阵、向量空间、内积空间、线性方程组、线性变换、约当标准形与二次型。向量空间理论是结合线性方程组的研究并联系普通向量空间而展开的，因此比较具体而又生动。

本书可以作为理工科各专业的教材使用。对于研究生与工程人员来说，也是值得一读的参考书。

线 性 代 数

周 先 意　编 著

责任编辑　陈晓嘉

※　※　※

浙江大学出版社出版

浙江大学印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

※　※　※

开本787×1092　1/32　9.75印张　215千字数

1987年2月第一版　1988年5月第二次印刷

印数5001 — 15000

ISBN 7-308-00003-6

O·002　定价：2.00元

前　言

由于电子计算机的应用日益广泛，而自然科学、工程技术与社会科学的许多重要问题的数学模型都是线性的，因而对于现代科技人员与管理人员来说，线性代数的重要性并不亚于微积分。

作为高等学校的必修课程，线性代数应该使得学生掌握向量空间理论这个强有力的工具，这对于他们学习后继课程以及今后工作无疑都是很重要的。然而对于一学期安排每周二学时或三学时的课程来说，按照传统方法去处理教学内容，就很难使学生更好地掌握向量空间理论。为此，必须对教材内容进行新的处理，才有可能达到上述目的。本书正是编者进行这种尝试的产物。

本书第一章讲行列式，在行列式定义中不是采用排列的逆序数，而是采用排列的符号，这就使得所有的定理，包括拉普拉斯（Laplace）定理在内，其证明都得到简化。第二章讲矩阵，这里介绍了初等矩阵，但以后很少使用它，从而使得繁锁的计算与公式得以减少。第三章讲向量空间。向量空间理论是紧密结合线性代数方程组的研究，并联系普通向量空间理论而展开的。这就使得概念的所由产生以及理论的如何应用立即得到了表现，而且使得这个理论具有直观性，看到了普通向量空间理论在这里的再现。此外，矩阵的秩这个重要概念是从向量出发而不是从行列式出发来定义的，这就使得这个概念更加清楚。第四章讲内积空间，普通向量空间理论在这里得到了更多的再现，从而充实了向量空间理论。正交和理论立即应用于确定齐次线性代数方程组的解空间的维

数，结论因此具有直观性。第五章讲线性代数方程组，把有关结论重新汇集在一起。由于应用了向量空间理论，所有这些结论几乎是一望而知的。在这章还介绍了最小平方法。第六章讲线性变换，作为函数概念的推广，引进了变换概念，并指出了定义域与值域。第七章讲约当（Jordan）标准形。这里没有引用初等因子，只用了向量空间理论。第八章讲二次型，还介绍了同时把两个二次型化为标准形的方法。

对教学内容的如此处理，编者从77级教到85级，从每周二学时教到每周三学时，从普通班教到尖子班、少年班，都表明在教学是可行的，效果是相当好的。本书是在这个基础上编写而成。对于一学期每周三学时的课程，不论是工科、理科、还是普通班、尖子班，本书都可以作为教材，其中带*号内容是留给自学用的。

为阅读本书，需要熟悉向量代数与空间解析几何的基本知识。对科技人员来说，阅读本书所讲的向量空间理论会感到具体而生动。

虽然编者力图将全书内容按照如何提出问题、如何解决问题而展开，以期有利于培养学生的研究解决问题的能力，掌握认识论与方法论的能力，但是限于水平，缺点错误在所难免，希望得到批评指正。

周先意　1986年元月于杭州

目　　录

第一章　行列式

§1.行列式的定义

由于科学技术的许多重要问题都涉及到线性代数方程组，即多元一次方程组，因此线性代数方程组的研究是一个重要课题。它是线性代数的基本内容之一。我们先来研究未知数个数与方程个数相等的最基本情况，即研究包含 n 个未知数的 n 个方程的情况：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{1}$$

首先回顾中学已学过的有关内容。

对二元线性代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{2}$$

消去未知数x_2，得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2, \tag{3}$$

同理可得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_1-b_2a_{21}. \tag{4}$$

如果系数行列式不等于 0，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0,$$

那末，由(3)，(4)两式就得到

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\qquad (5)$$

这是线性方程组(2)的一组解。其中的分母是系数行列式，分子是把系数行列式中该未知数 x_i 的系数 a_{1i}，a_{2i} 分别换成常数项 b_1，b_2 而得到的行列式。

从几何上看，线性方程组(2)中的两个方程分别表示平面上的两条直线，而(5)式中的这组解 (x_1, x_2) 表示这两条直线的交点。

对三元线性代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}\qquad (6)$$

消去未知数 x_2，x_3，得到

$$\begin{aligned}(a_{11}a_{22}a_{33}&+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}\\ &-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1\\ =b_1a_{22}a_{33}&+a_{13}b_2a_{32}+a_{12}a_{23}b_3-b_1a_{23}a_{32}\\ &-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3. \qquad (7)\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}(a_{11}a_{22}a_{33}&+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}\\ &-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_2\\ =a_{11}b_2a_{33}&+a_{13}a_{21}b_3+b_1a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}b_3\\ &-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}, \qquad (8)\end{aligned}$$

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_3$$
$$=a_{11}a_{22}b_3+b_1a_{21}a_{32}+a_{12}b_2a_{31}-a_{11}b_2a_{32}$$
$$-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}. \qquad (9)$$

如果系数行列式不等于0，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0,$$

那末，由(7)，(8)，(9)三式就得到

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \qquad (10)$$

其中的分母是系数行列式，分子是把系数行列式中该未知数x_1的系数a_{11}，a_{21}，a_{31}分别换成常数项b_1，b_2，b_3得到的行列式。这是线性方程组(6)的一组解。

从几何上看，线性方程组(6)中的三个方程分别表示空间中的三张平面，而(10)式中的这组解(x_1,x_2,x_3)表示这三张平面的交点。

从公式(5)与公式(10)可以看出它们的共同规律：分母都是系数行列式，分子是把系数行列式中该未知数的系数分别换成常数项而得到的行列式。

于是我们要问：对于n元线性方程组(1)，是否也有以上所述的规律呢？为回答这个问题，首先就要研究如何去定义n阶行列式。为此，我们就要仔细观察二阶与三阶行列式的结构，找出它们的共同规律，再根据这些规律去定义n阶行列式，然后用它去解n元线性方程组(1)，检验预期的目的是否能够达到。

现在来观察分析二阶与三阶行列式的结构，它们是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

可以看出，三阶行列式是这样一些乘积的代数和，这些乘积都可以写成$a_{1i_1}\ a_{2i_2}\ a_{3i_3}$的形式。其中第一个下标是固定

的，依次是1，2，3，它们构成由1，2，3这三个数依自然顺序的一个排列；第二个下标j_1，j_2，j_3是流动的，它们是1，2，3这三个数的任何一个排列，这种排列共有3！= 6个，因此这些乘积共有3！= 6个。因为a_{ij}的第一个下标i表明a_{ij}位于行列式的第i行，第二个下标j表明a_{ij}位于行列式的第j列，所以这些乘积$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$都是从不同的行与不同的列中取出来的三个元素a_{1j_1}，a_{2j_2}，a_{3j_3}的乘积。每个乘积$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$都带有正号或负号，这正负符号是根据什么来确定的呢？因为第一个下标是固定的，第二个下标是变动的，所以可以推断，正负符号是根据排列j_1，j_2，j_3来确定的。事实上，

当$(j_2-j_1)(j_3-j_1)(j_3-j_2)>0$时，乘积$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$就带正号。

当$(j_2-j_1)(j_3-j_1)(j_3-j_2)<0$时，乘积$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$就带负号。

例如对于乘积$a_{13}a_{21}a_{32}$来说，$(1-3)(2-3)(2-1)>0$，它带正号；对于乘积$a_{12}a_{21}a_{33}$来说，$(1-2)(3-2)(3-1)<0$，它带负号。

引进记号

$$S(j_1,j_2,j_3)=\mathrm{Sign}(j_2-j_1)(j_3-j_1)(j_3-j_2), \quad (11)$$

其中Sign（…）是符号函数，当（…）>0时，Sign（…）= 1；当（…）<0时，Sign（…）= －1。因此，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1,j_2,j_3)} \mathrm{Sign}(j_1,j_2,j_3)a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \quad (12)$$

其中$\sum\limits_{(j_1,j_2,j_3)}$表示对所有的排列$j_1,j_2,,j_3$进行相加。共有3！

个排列，所以共有3!项相加。

对于二阶行列式来说，情况完全相似，这里就不重复。

为定义 n 阶行列式，现在来研究排列。

定义 1 对于由 n 个正整数 1，2，…，n排成的 n 阶排列$j_1, j_2, \cdots, j_n$，记

$$S(j_1, j_2, \cdots, j_n) = \mathrm{Sign} \prod_{n \geqslant p > q \geqslant 1} (j_p - j_q), \quad (13)$$

称为这个排列的符号，其中Π表示连乘积，即所有排在后面的一个数 j_p 减去排在前面的一个数 j_q 的连乘积。把公式(13)写得详细些，就是

$$\begin{aligned}
S(j_1, j_2, \cdots, j_n) &= \mathrm{Sign} \prod_{n \geqslant p \geqslant 1} (j_p - j_q) \\
&= \mathrm{Sign}[(j_2-j_1)(j_3-j_1)\cdots(j_r-j_1)\ (j_{r+1}-j_1)\ (j_{r+2}-j_1)\ (j_{r+3}-j_1)\cdots(j_n-j_1) \\
&\quad \times (j_3-j_2)\cdots(j_r-j_2)\ (j_{r+1}-j_2)\ (j_{r+2}-j_2)\ (j_{r+3}-j_3)\cdots(j_n-j_2) \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad \times (j_r-j_{r-1})\ (j_{r+1}-j_{r-1})(j_{r+2}-j_{r-1})(j_{r+3}-j_{r-1})\cdots(j_n-j_{r-1}) \\
&\quad \times (j_{r+1}-j_r)\ (j_{r+2}-j_r)\ (j_{r+3}-j_r)\cdots(j_n-j_r) \\
&\quad \times (j_{r+2}-j_{r+1})(j_{r+3}-j_{r+1})\cdots(j_n-j_{r+1}) \\
&\quad \times (j_{r+3}-j_{r+2})\cdots(j_n-j_{r+2}) \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad \times (j_n-j_{n-1})].
\end{aligned}$$

显然，称之为标准排列 1，2，…，n的符号

$$S(1,2,\cdots,n)=1 .$$

例 1 求排列 1，2，5，3，4 的符号。

解：根据定义 1，有

$$\begin{aligned} S(1,2,5,3,4) &= \mathrm{Sign} \prod_{5\geq p>q\geq 1} (j_p - j_q) \\ &= \mathrm{Sign}[(2-1)(5-1)(3-1)(4-1) \\ &\qquad \times(5-2)(3-2)(4-2) \\ &\qquad \times(3-5)(4-5) \\ &\qquad \times(4-3)] \\ &= 1 . \end{aligned}$$

现在我们来指出后面要用到的一个结论。

如果 n 阶排列 $j_1,j_2,\cdots,j_r,j_{r+1},\cdots,j_n$ 的前半部分 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 是由 1，2，…，r 排列而成，而后半部分 $j_{r+1},j_{r+2},\cdots,j_n$ 是由 r＋1，r＋2，…，n 排列而成，那末

$$\begin{aligned} &S(j_1,\cdots,j_r,j_{r+1},\cdots,j_n) \\ &= S(j_1,j_2,\cdots j_r)S(j_{r+1},j_{r+2},\cdots,j_n) . \end{aligned} \tag{15}$$

这个结论的正确性可以从公式(14)看出：公式(14)右边由虚线所围成的方框中的各个因子都是正数，所以方框内的乘积也是正的，不会影响排列的符号；方框左边的乘积的符号正好就是 $S(j_1, j_2,\cdots, j_r)$，方框下边的乘积的符号正好就是 $S(j_{r+1},j_{r+2},\cdots,j_n)$。

定理 1 如果在一个排列中，对调其中任意两个数从而得到一个新排列，那末，新排列的符号必定与原排列的符号相反。

证明：首先假定在排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$中对调的两个数是相邻的，比如对调 j_r 与 j_{r+1}。这时连乘积 $\prod\limits_{n\geq p>q\geq 1}(j_p-j_q)$中的

全部因子，除了$(j_{r+1}-j_r)$变成(j_r-j_{r+1})以外，其余的因子都没有改变，因此新排列的符号与原排列的符号相差一个负号，即新排列的符号与原排列的符号相反。

现在假定对调的是任意两个数，比如说对调j_r与j_{r+m}。我们先把j_r向右边作m次的相邻两个数的对调，j_r就调到j_{r+m}的右边（见下图）；再把j_{r+m}向左边作$m-1$次的相邻两个数

$$\cdots j_r,\ j_{r+1},\ j_{r+2},\ \cdots,\ j_{r+m-1},\ j_{r+m},\ \cdots$$

$$\cdots\cdots j_{r+1},\ j_{r+2},\ \cdots,\ j_{r+m-1},\ j_{r+m},\ j_r,\cdots$$

$$\cdots j_{r+m},\ j_{r+1},\ j_{r+2},\ \cdots,j_{r+m-1},\ j_r,\ \cdots$$

的对调，j_{r+m}就调到j_r的原来位置上。经过这样的$2m-1$次的相邻两个数的对调以后，j_r与j_{r+m}就对调了位置。因此新排列的符号与原排列的符号就相差$(-1)^{2m-1}=-1$，即新排列的符号与原排列的符号相反。

根据这个定理可以断定，在所有n阶排列中，排列的符号等于1或-1的排列各占总数的一半，即各有$\frac{1}{2}n!$个。

定义 2　由n^2个数组成的n阶行列式定义如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{(j_1,j_2,\cdots j_n)} S(j_1,j_2,\cdots,j_n)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \qquad (16)$$

其中$\sum\limits_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$表示对所有的排列$j_1,j_2,\cdots,j_n$进行相加；总共有$n!$个排列，所以总共有$n!$项相加。$a_{ij}$称为行列式的第i行第j列的元素。

显然，由公式(16)定义的 n 阶行列式，当 $n=2$，$n=3$ 时就是读者熟悉的二阶与三阶行列式。

从公式(16)可以看出，右边各个乘积的第一个因子 a_{1i_1} 位于行列式的第一行，第二个因子 a_{2i_2} 位于第二行，……，第 n 个因子 a_{ni_n} 位于第 n 行。因此我们有下列结论：

如果行列式中有一行，其元素都是 0，那末各个乘积就都有一个因子为 0，因此这个行列式等于 0。

为简便起见，常常采用下列记号：

$$\det A=\det[a_{ij}]=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

§2.行列式的性质

为便于应用行列式这个工具，有必要研究它的性质。

定义 1 行列式的各行依次转置成各列，即第一行写成第一列，第二行写成第二列，……，第 n 行写成第 n 列，这样得到的新行列式称为原行列式的转置行列式。例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{的转置行列式是} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

显然，原行列式也是新行列式的转置行列式。

定理 1 转置行列式的值与原行列式的值相等。或者说，行列式经过转置以后其值不变。例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证明：设行列式 $\det[b_{ij}]$ 是行列式 $\det[a_{ij}]$ 的转置行列式，则它们的元素之间有下列关系：

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad (i,j = 1,2,\cdots,n).$$

根据行列式的定义，

$$\det[b_{ij}] = \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} S(j_1,j_2,\cdots,j_n) b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n}$$

$$= \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} S(j_1,j_2,\cdots,j_n) a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}. \tag{1}$$

重新调整和式中各项 $a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}$ 的因子 a_{ij} 的次序，例如 $a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$，使得

$$a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n} = a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}. \tag{2}$$

设（2）式左边的那些因子 a_{ij} 经过 m 次对调以后，得到（2）式的右边。经过这样 m 次的对调，排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 变到排列 $1,2,\cdots,n$；排列 $1,2,\cdots,n$ 变到排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$。根据§1定理1，这两个排列的符号改变了m次，即

$$S(j_1,j_2,\cdots,j_n) = (-1)^m S(1,2,\cdots,n) = (-1)^m,$$

$$S(i_1,i_2,\cdots,i_n) = (-1)^m S(1,2,\cdots,n) = (-1)^m$$

因此 $S(j_1,j_2,\cdots,j_n) = S(i_1,i_2,\cdots,i_n)$。于是由（1），（2）两式得到

$$\det[b_{ij}] = \sum_{(i)} S(j_1,j_2,\cdots,j_n) a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}$$

$$= \sum_{(i)} S(i_1,i_2,\cdots,i_n) a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

$$= \det[a_{ij}].$$