复　分　析

第 三 版

L. V. 阿尔福斯　著

张立　张靖　译

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书第一版的中译本出版于1962年。现在按原书1979年第三版重译，与第一版相比，内容有较大变动，还增加了不少新材料。但保持了原来的风格，仍以选材精练，叙述严谨，处理巧妙见长。全书共八章，包括：复数，复函数，作为映照的解析函数，复积分，级数和乘积展开，共形映照，Dirichlet问题，椭圆函数，整体解析函数等。各章节后均附有慎选的习题，供教师灵活选用。

本书可供综合大学数学系作为复变函数论教材或教学参考书，也可供科研人员参考。

COMPLEX ANALYSIS

Third Edition

By Lars V. Ahlfors

McGraw-Hill Book Co., 1979

复 分 析

第 三 版

L. V. 阿尔福斯 著

张 立 张 靖 译

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 江苏溧水印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 10.875 字数 283,000

1962年11月第1版

1984年6月第2版 1984年6月第3次印刷

印数 1—11,300

统一书号：13119·485 定价：（科五）2.00 元

第三版序

«复分析»已经能够挤列于单复变函数论的标准基础教材之林. 尽管如此, 仍然需要一个新版, 这是因为: 一方面, 流行的数学术语有了改变; 另一方面, 学生的程度和他们的目标也已有所不同.

新版没有根本性的变革. 作者仍然坚信几何方法在施教中的作用, 所以引论性的几章没有实质的改变. 经验表明: 全书有少数几处可能会引起误解或困难, 需要予以澄清. 已经发现的印刷上的误植和小的错误均已改正. 除此之外, 第三版与第二版的主要区别可概括如下:

1. 记法和用语都已现代化, 但是要对文风作任何重大改变看来没有必要.

2. 在第 2 章中加了一节讨论共形映照下长度和面积的变化. 这在某种程度上违反了讲解的自给自足的要求, 因为这需要读者退回到微积分中重积分的定义和处理. 但这并不产生大的不便.

3. 在第 4 章中, 柯西定理的一般形式有了一个新的简单证明. 这是属于 A. F. Beardon 的, 承他慨允, 在此引录. 它补充了仍然保留并得到改善的老的证明, 但并不取代老的证明.

4. 增加了一小节介绍黎曼 zeta 函数. 这常常会使学生着迷, 而且函数方程的证明正说明了留数在比定积分计算更为复杂的情况下的应用.

5. 第 8 章的大部分均已完全重写. 主要目的是在强调经典概念的同时为读者引进"芽"和"层"的术语. 但是可以说, 所涉及的层理论不会超出与本书初等性质相一致的基本概念范围.

6. 作者成功地抵制了把黎曼面作为一维复流形列入的劝导. 一本书, 如果超出了作为平面上复函数论的基本方法与结果的入门书这一目的, 那将失去其大部分用途.

很多人帮助我指出了本书第二版中的一些误植、缺点和错误，在此向他们表示感谢. 特别要感谢我的同事 Lynn Loomis，他使我得以了解学生们在以本书作为教材的新课程中的反映.

Lars V. Ahlfors.

724/211/02

目　录

第1章　复　　数

1　复数的代数学

实数和复数遵从同样的算术基本律．在学习复变函数论的开始，我们要着重应用并进一步充实这一相似性．

1.1　算术运算

读者从初等代数中已经知道虚数单位 i 具有性质 $i^2=-1$．如将这一虚数单位与两个实数 α、β 通过加法与乘法结合起来，则得一复数 $\alpha+i\beta$．α 及 β 分别称为这一复数的实部与虚部．若 $\alpha=0$，则称这一数为纯虚数；若 $\beta=0$，它当然是实数．零是同时可作为实数与纯虚数的唯一数．两复数相等，必须而且只须它们具有相等的实部与相等的虚部．

复数对加法与乘法自封．假定我们将算术的普通规则应用于复数，当然就有

$$(\alpha+i\beta)+(\gamma+i\delta)=(\alpha+\gamma)+i(\beta+\delta) \tag{1}$$

及

$$(\alpha+i\beta)(\gamma+i\delta)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+i(\alpha\delta+\beta\gamma). \tag{2}$$

在第二个恒等式中，我们使用了关系式 $i^2=-1$．

除法的可行并不那末明显．我们要来证明 $(\alpha+i\beta)/(\gamma+i\delta)$ 仍是一复数，此处 $\gamma+i\delta\neq0$．以 $x+iy$ 表示所求的商，则必有

$$\alpha+i\beta=(\gamma+i\delta)(x+iy).$$

根据(2)，上式可写成

$$\alpha+i\beta=(\gamma x-\delta y)+i(\delta x+\gamma y),$$

从而得到下列两方程：

$$\alpha=\gamma x-\delta y,$$
$$\beta=\delta x+\gamma y.$$

由于我们已知 $\gamma^2+\delta^2\neq 0$，故上面的线性方程组有唯一解：

$$x=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2},\quad y=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}.$$

这样，就得到结果

$$\frac{\alpha+i\beta}{\gamma+i\delta}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+i\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}.\tag{3}$$

商的存在既经证明之后，它的值就可用较简单的方法求得．以 $\gamma-i\delta$ 乘分子分母，立即可得

$$\frac{\alpha+i\beta}{\gamma+i\delta}=\frac{(\alpha+i\beta)(\gamma-i\delta)}{(\gamma+i\delta)(\gamma-i\delta)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+i(\beta\gamma-\alpha\delta)}{\gamma^2+\delta^2}.$$

作为一个特例，一个不等于零的复数的倒数为

$$\frac{1}{\alpha+i\beta}=\frac{\alpha-i\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

注意：i^n 只有四个可能的值，即 1, i, -1, $-i$. 它们相当于指数 n 的值 0, 1, 2, 3, 这是以 4 除 n 后可能得到的余数．

习　　题

1．求下列各数的值：

$$(1+2i)^3,\ \frac{5}{-3-4i},\ \left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2,\ (1+i)^n+(1-i)^n.$$

2．设 $z=x+iy$（x、y 实数），求下列各数的实部和虚部：

$$z^4,\quad \frac{1}{z},\quad \frac{z-1}{z+1},\quad \frac{1}{z^2}.$$

3．证明　$$\left(\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3=1\quad 及\quad \left(\frac{\pm 1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)^6=1$$

不论符号如何搭配均成立．

1.2　平方根

现在我们来证明一个复数的平方根可以明显地求得．设所给复数为 $\alpha+i\beta$，我们来求复数 $x+iy$，它满足关系

$$(x+iy)^2=\alpha+i\beta.$$

这一关系等价于下列方程组：

$$\begin{aligned}x^2-y^2&=\alpha,\\ 2xy&=\beta.\end{aligned}\tag{4}$$

由上两式得

$$(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=\alpha^2+\beta^2.$$

因而必有
$$x^2+y^2=\sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$
式中的平方根为正或零．将这一式与(4)的第一式求解，得

$$\begin{aligned}x^2&=\frac{1}{2}(\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}),\\ y^2&=\frac{1}{2}(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}).\end{aligned}\tag{5}$$

我们看到这些量不论 α 的符号如何总是正的或零．

从方程 (5) 一般可得两个相反符号的 x 值和两个相反符号的 y 值．但这些值不能任意组合，因为(4)中的第二式并不是(5)的结果．因此必须谨慎地选择 x 与 y，使其积与 β 同符号．这样就得到一般解

$$\sqrt{\alpha+i\beta}=\pm\left(\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}+i\frac{\beta}{|\beta|}\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\right),\tag{6}$$

只要 $\beta\neq0$．对于 $\beta=0$，当 $\alpha\geqslant0$ 时，其值为 $\pm\sqrt{\alpha}$，当 $\alpha<0$ 时，为 $\pm i\sqrt{-\alpha}$．应当理解，正数的所有平方根均取正号．

上面证明了任一复数的平方根是存在的，且具有两个相反的值．这两个值仅当 $\alpha+i\beta=0$ 时相等．如 $\beta=0$，而 $\alpha\geqslant0$，则平方根值为实数，如 $\beta=0$ 而 $\alpha\leqslant0$，则为纯虚数．换句话说，除了零以外，只有正数才有实的平方根，只有负数才有纯虚数的平方根．

由于两个平方根一般都是复数，所以一个复数的平方根就不可能分出正负来．我们当然可以用 (6) 式中上面的符号与下面的符号来进行区分，但这种区分是不自然的，因而必须避免．正确的方法是将两个平方根按对称的方式处理．

习　题

1. 计算 $\sqrt{i}$，$\sqrt{-i}$，$\sqrt{1+i}$，$\sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}$.

2. 求 $\sqrt[4]{-1}$ 的四个值.

3. 计算 $\sqrt[4]{i}$ 及 $\sqrt[4]{-i}$.

4. 解出二次方程

$$z^2+(\alpha+i\beta)z+\gamma+i\delta=0.$$

1.3 复数体的存在

到目前为止，我们对复数的讨论是完全不严密的. 还没有探究到当算术中一切规则保持有效时，方程 $x^2+1=0$ 的解所从属的数系本身存在的问题.

我们先来回想一下实数系 $\mathbf{R}$ 的一些特征性质. 首先我们知道 $\mathbf{R}$ 是一个体(field, 或域). 这意思就是说，在 $\mathbf{R}$ 中定义了加法运算和乘法运算，它们满足结合律、交换律及分配律. 数 0 及 1 分别是加法及乘法运算中的中性元素，意即对于所有的 α 有 $\alpha+0=\alpha$, $\alpha\cdot1=\alpha$. 其次，定义减法的方程 $\beta+x=\alpha$ 恒有一个解，而定义除法的方程 $\beta x=\alpha$，只要 $\beta\neq0$，也总有一个解❶.

用初等的理由就可证明中性元素以及减法与除法的结果都是唯一的. 又，每一个体是一个整环，意即，为了 $\alpha\beta=0$，必须而且只须 $\alpha=0$ 或 $\beta=0$.

这些性质是一切体所共有的. 此外，实数体 $\mathbf{R}$ 具有一种次序关系 $\alpha<\beta$ (或 $\beta>\alpha$). 用正实数集合 $\mathbf{R}^+$ 就更易于定义下面的关系：$\alpha<\beta$ 的充要条件是 $\beta-\alpha\in\mathbf{R}^+$. 集合 $\mathbf{R}^+$ 以下列几种性质为其特征：(1) 0 不属于 $\mathbf{R}^+$；(2) 如果 $\alpha\neq0$，则 α 或 $-\alpha$ 属于 $\mathbf{R}^+$，但不并立；(3) $\mathbf{R}^+$ 中任二元素之和与积仍属于 $\mathbf{R}^+$. 从这些性质就可推出不等式运算的全部规则. 特别是，任一数 α 的平方 α^2 或

❶ 我们假定读者已具有基础代数学的实际知识. 虽然上面所说关于体的特征表示是完备的，但对于一个还没有粗略地熟悉这些概念的读者，显然不会有很大帮助.

者是正数，或者等于零；因此 $1=1^2$ 是一正数.

根据次序关系可知：和 $1, 1+1, 1+1+1, \cdots$ 互不相同．因此，$\mathbf{R}$ 包含自然数全体，而由于它是一个体，故知它必包含有理数全体所组成的子体.

最后，$\mathbf{R}$ 满足下列的完备性条件：每一个递增而有界的实数叙列必有一极限．设 $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\cdots<\alpha_n<\cdots$，并设存在一个实数 B，得使对于所有的 n，有 $\alpha_n<B$．那么完备性条件就意味着存在一个数 $A=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha$，它具有下列性质：给定任意的 $\varepsilon>0$，存在一个自然数 n_0，使得对于所有的 $n>n_0$，有不等式 $A-\varepsilon<\alpha_n<A$ 成立.

我们对于实数系的讨论是不完全的，因为我们并没有证明具有上述公设性质的一个数系 $\mathbf{R}$ 的存在和唯一性（除同构以外）❶．读者如果还不十分明了那种用以引进实数的构作方法，可参看有关这方面的书籍.

由于 α^2+1 恒为正数，故知方程 $x^2+1=0$ 在 $\mathbf{R}$ 中无解．现在我们假设可以找到一个体 $\mathbf{F}$，它以 $\mathbf{R}$ 为其子体，而且在 $\mathbf{F}$ 中方程 $x^2+1=0$ 有解．以 i 表示这方程的一个解．则因

$$x^2+1=(x+i)(x-i),$$

故知方程 $x^2+1=0$ 在 $\mathbf{F}$ 中恰有两个解 i 及 $-i$．令 $\mathbf{C}$ 为 $\mathbf{F}$ 的子集，由所有能表为 $\alpha+i\beta$ 的元素组成，此处 α 及 β 为实数．这一表示式是唯一的，因为 $\alpha+i\beta=\alpha'+i\beta'$ 就意味着

$$\alpha-\alpha'=-i(\beta-\beta');$$

从而
$$(\alpha-\alpha')^2=-(\beta-\beta')^2,$$

但这只有在 $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$ 时方始可能.

子集 $\mathbf{C}$ 是 $\mathbf{F}$ 的一个子体．事实上，除了应由读者作一些普通的验证之外，这正是我们已在 1.1 节中证明过的．此外，子集 $\mathbf{C}$ 的构造与 $\mathbf{F}$ 无关．因为如设 $\mathbf{F}'$ 为另一个包含 $\mathbf{R}$ 及方程 $x^2+1=0$ 的一个根 i' 的体，则元素 $\alpha+i'\beta$ 全体组成对应的子集 $\mathbf{C}'$．$\alpha+i\beta$

❶ 两个体的同构指的是一种一对一的对应关系，它保持和与积的对方对应．这一词通常用以指一种对应关系，这种对应关系是一对一的，同时保持一给定联络中所认为重要的一切关系.

全体组成的子集 $\mathbf{C}$ 与 $\alpha+i'\beta$ 全体组成的子集 $\mathbf{C}'$ 成一一对应，而这一对应显然是体的同构，从此说明 $\mathbf{C}$ 与 $\mathbf{C}'$ 是同构的.

现在我们把复数全体组成的体定义为任一给定的 $\mathbf{F}$ 的子体 $\mathbf{C}$. 上面说明了体 $\mathbf{F}$ 的选择是任意的，但还没有证明这一具有所需性质的体 $\mathbf{F}$ 的存在. 为了使我们的定义具有意义，还需要来构作出体 $\mathbf{F}$，它包含 $\mathbf{R}$(或与 $\mathbf{R}$ 同构的一个子体)，而且在其中方程 $x^2+1=0$ 有一个解.

这样的一个体可以用多种方法构作起来. 最简单而且最直接的方法如下：考察形如 $\alpha+i\beta$ 的所有元素，其中 α, β 均为实数，而记号 $+$ 及 i 则纯粹是符号($+$ 不表示加，i 不表示体的一个元素). 这些元素全体组成一个体 $\mathbf{F}$，在 $\mathbf{F}$ 中加法与乘法是用(1)及(2)定义的(注意记号 $+$ 的两种不同意义). 特殊形式 $\alpha+i0$ 的元素全体构成一个与 $\mathbf{R}$ 同构的子体，而元素 $0+i1$ 则满足方程 $x^2+1=0$；因为 $(0+i1)^2=-(1+i0)$. 这样，体 $\mathbf{F}$ 就具有所需的性质，而且由于

$$\alpha+i\beta=(\alpha+i0)+\beta(0+i1),$$

故知它与对应的子体 $\mathbf{C}$ 恒等. 这就证明了复数体的存在，于是可回到较简单的记法 $\alpha+i\beta$，此处 $+$ 表示 $\mathbf{C}$ 中的加法，而 i 为方程 $x^2+1=0$ 的一个根.

习　题

(供复习代数的读者练习)

1. 证明所有形如 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ 的矩阵经过用矩阵加法与矩阵乘法组合起来以后所成的集合与复数体同构.

2. 证明复数系可以设想为用不可约多项式 x^2+1 对于所有实系数多项式分类所得到的体.

1.4　共轭，绝对值

一个复数，或者可用单一个字母 a 表示，此处 a 为体 $\mathbf{C}$ 的一

个元素；或者可表为 $\alpha+i\beta$ 的形式，其中 α, β 为实数．此外，还有几种标准的记法如 $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$, $w=u+iv$ 等，在此，x, y, ξ, η, u, v 等总是理解为实数．复数 a 的实部和虚部还常记为 $\operatorname{Re} a$ 及 $\operatorname{Im} a$.

在推出复数加法与复数乘法的法则的过程中，我们只用到一个事实，那就是 $i^2=-1$．由于 $-i$ 具有同样的性质，因此，如将所有的 i 均换成 $-i$，则原来的一切规则必仍保持有效．这可通过直接验证来证明．将 $\alpha+i\beta$ 换成 $\alpha-i\beta$ 的变换称为复共轭，而 $\alpha-i\beta$ 就是 $\alpha+i\beta$ 的共轭复数．a 的共轭复数记为 $\bar{a}$．要一个数是实数，必须而且只须它与它的共轭数相等．共轭变换是一种对合变换，这就是说 $\bar{\bar{a}}=a$.

复数 a 的实部与虚部可用 a 及其共轭复数 $\bar{a}$ 表示为

$$\operatorname{Re} a=\frac{a+\bar{a}}{2}, \quad \operatorname{Im} a=\frac{a-\bar{a}}{2i}.$$

因此，系统地使用记法 a 及 $\bar{a}$，就可以避免用两个不同的字母来表示实部和虚部．话虽如此，但这两种记法最好还是能灵活使用．

共轭变换的基本性质就是我们上面已经提到的那个性质，即

$$\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b}, \quad \overline{ab}=\bar{a}\cdot\bar{b}.$$

由此可推出商的对应性质：如果 $ax=b$，则 $\bar{a}\bar{x}=\bar{b}$，因而 $(\overline{b/a})=\bar{b}/\bar{a}$．更一般地，令 $R(a, b, a, \cdots)$ 表施于复数 a, b, c, $\cdots$ 的任一有理运算，则

$$\overline{R(a, b, c, \cdots)}=R(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \cdots).$$

作为一个应用，考虑方程

$$c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n=0,$$

设 ζ 为这一方程的一个根，则 $\bar{\zeta}$ 必是方程

$$\bar{c}_0z^n+\bar{c}_1z^{n-1}+\cdots+\bar{c}_{n-1}z+\bar{c}_n=0$$

的一个根．特别是，若方程的系数均为实数，则 ζ 及 $\bar{\zeta}$ 必是同一方程的根，由此得到熟知的定理：实系数方程的非实数根必以成对的共轭根出现．

积 $a\bar{a}=\alpha^2+\beta^2$ 恒为正数或零．它的非负平方根称为复数 a 的