

第 4 篇

电磁场、电路、 磁 路

江苏工业学院图书馆
藏书章

第4篇

电磁场、电路、 磁路

主编单位 西安交通大学

编写单位 西安交通大学

主 编 邱关源

编 写 人 周佩白 钱秀英 江慰德 刘正兴
夏承铨

主 审 肖达川 马信山

常用符号表

A ——矢量磁位 关联矩阵	$\dot{U}$ ——电压相量
B ——磁感应强度矢量	U_m ——磁位差
B_l ——基本回路矩阵	V ——体积
B ——电纳	W ——能量
C ——电容	X ——电抗
D ——电通量密度, 电位移矢量	Y ——(复数)导纳
E ——电场强度矢量	Z ——(复数)阻抗
F ——力	Z_0 ——波阻抗
F_m ——磁通势	α ——衰减系数
f ——频率	β ——相位系数
G ——电导	γ ——电导率
H ——磁场强度矢量	Γ ——传播常数
I, i ——电流	δ ——透入深度
$\dot{I}$ ——电流相量	$\delta(t)$ ——单位冲激函数
J ——电流密度矢量	ϵ ——介电常数
L ——电感	$\epsilon(t)$ ——单位阶跃函数
M ——互感	λ ——波长
P, p ——功率	功率因数
P ——有功功率	μ ——磁导率
Q, q ——电荷	ρ ——电荷体密度
Q ——无功功率	ρ_m ——磁荷体密度
R ——电阻	σ ——电荷面密度
R_m ——磁阻	τ ——电荷线密度
S ——坡印亭矢量	时间常数
S ——视在功率	Φ ——磁通
$\bar{S}$ ——复功率	φ ——标量电位
s ——复频率	相位差
T ——周期	φ_m ——标量磁位
U, u ——电压	Ψ ——磁链
	ω ——角频率

第 1 章 电磁场方程

1 麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程是研究电磁场运动规律的基本方程,它为研究全部宏观电磁现象奠定了理论基础。从麦克斯韦方程可以导出有源、无源,有损耗电介质、无损耗电介质,随时间变化或不随时间变化等各种不同情况下的电磁场方程组。

麦克斯韦方程组的积分形式为

$$\left. \begin{aligned} \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_s \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_s \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ \oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= q \end{aligned} \right\} \quad (4.1-1)$$

式中 $\mathbf{H}$ ——磁场强度矢量 (A/m);

$\mathbf{E}$ ——电场强度矢量 (V/m);

$\mathbf{B}$ ——磁感应强度矢量 (T);

$\mathbf{D}$ ——电通量密度或电位移矢量 (C/m²);

$\mathbf{J}_c$ ——传导电流密度矢量 (A/m²);

ρ ——电荷体密度 (C/m³);

$\mathbf{v}$ ——电荷运动速度矢量 (m/s);

q ——自由电荷 (C)。

式 (4.1-1) 中各方程的物理意义参见第 3 篇第 4 章 11.3 节。

2 麦克斯韦方程组的微分形式

麦克斯韦方程组的积分形式是描述空间某一区域内电磁场量与源之间的关系。为考察空间任意一点上各场量之间以及各场量与源之间的关系则必须用微分形式。

2.1 麦克斯韦方程组的微分表示

设场矢量 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{D}$ 为连续并具有对时间和空间的一阶导数的函数,麦克斯韦方程的微分形式为

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J}_c (\mathbf{J}_v) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \text{rot} \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \text{div} \mathbf{D} &= \rho \end{aligned} \right\} \quad (4.1-2)$$

式中 ρ ——自由电荷体密度 (C/m³);

$\mathbf{J}_v$ ——运流电流密度矢量 (A/m²), $\mathbf{J}_v = \rho \mathbf{v}$, ρ 为电荷体密度;

$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ ——位移电流密度矢量 (A/m²)。

通常 $\mathbf{J}_c$ 和 $\mathbf{J}_v$ 不可能同时存在。式 (4.1-2) 中的第一式表示传导电流、运流电流和位移电流都是产生磁场的旋涡源。随时间变化的电场 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 要产生磁场。式 (4.1-2) 中的第二式表示随时间变化的磁场产生电场。变化的磁场是时变电场的旋涡源。式 (4.1-2) 中的第三、四两式分别说明磁场中无点源,磁感应线是闭合线;而电场则是点源场,电通量线起始于正自由电荷并终止于负自由电荷。

麦克斯韦方程组的四个表达式中只有两个是独立的,应用电荷守恒定律

$$\text{div} \mathbf{J}_c = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

可以从式 (4.1-2) 中的第一式导出第四式;从第二式导出第三式。应用麦克斯韦方程组及洛仑兹力公式,可得

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

可以分析计算全部宏观电磁过程。

在无源自由空间中式 (4.1-2) 可简化为

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \text{rot} \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \text{div} \mathbf{D} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1-3)$$

此式表示即使在电荷密度 ρ 和电流密度 $\mathbf{J}_c (\mathbf{J}_v)$ 都等于零的地方,随时间变化的电场和磁场将相互激励而形成向外扩散的电磁波。

在真空中, $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{H}$ 之间的关系分别为

$$\left. \begin{aligned} D &= \epsilon_0 E \\ B &= \mu_0 H \end{aligned} \right\} \quad (4.1-4)$$

式中 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

ϵ_0, μ_0 分别为真空介电常数(真空电容率)及真空磁导率。

对任意线性均匀各向同性的媒质

$$\left. \begin{aligned} D &= \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 (1 + \chi_e) E = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon E \\ B &= \mu_0 H + \mu_0 M = \mu_0 (1 + \chi_m) H = \mu_0 \mu_r H = \mu H \end{aligned} \right\} \quad (4.1-5)$$

$$P = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum p_i}{\Delta V}$$

$$M = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum m_i}{\Delta V}$$

式中 P ——电介质的电极化强度矢量 (C/m^2);

p_i ——电偶极子的电偶极矩 $p = qd$ ($\text{C}\cdot\text{m}$);

M ——磁性媒质的磁化强度矢量 (A/m);

m_i ——磁偶极子的磁偶极矩 $m = Ids$ ($\text{A}\cdot\text{m}^2$);

χ_e ——电介质的电极化率;

χ_m ——磁性媒质的磁化率。

对结构复杂的媒质,例如晶体中的 D 、 E 和 B 、 H 之间不存在式(4.1-5)所示的简单关系,相对介电常数 ϵ_r 和相对磁导率 μ_r 要用张量表示^{[1][2]},这种媒质称为各向异性媒质。例如云母、冷轧硅钢片等。

对线性及各向同性的导电媒质有

$$J_c = \gamma E \quad (4.1-6)$$

式中 γ ——导电媒质的电导率 (S/m)。

式(4.1-5)及(4.1-6)称为媒质的构成方程。考虑了媒质的构成方程后,麦克斯韦方程组不论在真空或任意媒质中的表示形式都是相同的。将媒质的构成方程和麦克斯韦方程组相结合再加上边界条件就可唯一地确定宏观电磁场中各场量 E 、 H 、 D 、 B 。

2.2 麦克斯韦方程组的复数形式

工程中应用较多的是源和场都随时间按正弦规律变化的情况。将场量及源量均用相量形式表示后^[3],式(4.1-2)可记为

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \dot{H} &= \dot{J}_c + j\omega \dot{D} \\ \text{rot} \dot{E} &= -j\omega \dot{B} \\ \text{div} \dot{B} &= 0 \\ \text{div} \dot{D} &= \dot{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (4.1-7)$$

对非正弦变化的周期电磁量,在线性系统下可用傅里叶级数将它们变为一系列不同频率的正弦量的叠加。

2.3 计及磁荷及磁流的麦克斯韦方程组

磁性媒质在外磁场中磁化后的效应可用假想的磁流和磁荷来表示^[4]。引入磁流和磁荷后,式(4.1-7)可扩充为

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} H &= \frac{\partial D}{\partial t} + J_c \\ \text{rot} E &= -\frac{\partial B}{\partial t} - J_m \\ \text{div} B &= \rho_m \\ \text{div} D &= \rho \end{aligned} \right\} \quad (4.1-8)$$

式中 J_m ——磁流密度;

ρ_m ——磁荷密度。

ρ_m 与 J_m 之间满足磁荷守恒原理

$$\text{div} J_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t}$$

式(4.1-8)不论从“电”或“磁”任一方面看都具有完全对称的形式,在知道了一组电型源 ρ 及 J_c 产生的场以后,可根据对偶关系写出相应的另一组磁型源所产生的场^[5]。近年来也用它们来计算磁场^[6]。

3 不同媒质分界面处的边界条件

在均匀媒质中且无分布的电荷源、电流源时场量为坐标的连续函数。在两种性质不同的媒质的分界面,场量从媒质分界面的一侧过渡到另一侧时所遵循的变化规律就是媒质分界面处的边界条件。

图4.1-1表示两种不同媒质的分界面。图中 n 为媒质交界面的法线方向。根据麦克斯韦方程的积分形式〔式(4.1-1)〕求得场量 E 、 H 、 D 、 B 、 J 在媒质分界面二侧满足以下规律。

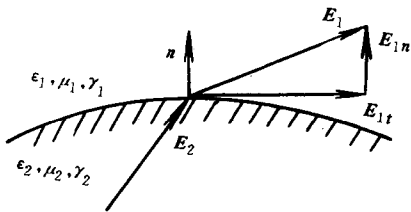


图4.1-1 不同媒质交界面处的边界条件

$$\left. \begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} \\ H_{1n} - H_{2n} &= \pm J_s \\ D_{1n} - D_{2n} &= \pm \sigma \\ B_{1n} &= B_{2n} \\ J_{1n} - J_{2n} &= -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (4.1-9)$$

式中 J_s ——交界面处的面电流密度(A/m),其正、负号由安培环路定律确定;

σ ——交界面处的自由电荷面密度(C/m²),其正、负号由高斯定理确定。

式(4.1-9)中各量的下标 t 及 n 分别表示交界面的切向及法向分量。此式表示在不同媒质的两侧场量 E 、 H 、 J 将发生折射,但电场强度的切向分量 E_t 及磁感应强度的法向分量 B_n 总是连续的,而磁场强度的切向分量 H_t 及电位移的法向分量 D_n 之间是否连续将取决于在分界面上是否有面源。若分界面上无面源则 H_t 及 D_n 也是连续的,否则其突变量将取决于面源的强度。

3.1 双层源两侧电位的不连续性

如果交界面处有偶极子形式的分布源(双层源)则电位移矢量的法向分量 D_n 因产生正、负二次突变,结果使 D_n 连续但在双层源两侧的电位将发生突变,其突变量决定于双层源的强度^[7]。

3.2 理想导体与理想电介质交界处的边界条件

如果在图4.1-1中,媒质2为理想导体($\gamma_2 \rightarrow \infty$)而媒质1为理想电介质($\gamma_1 = 0$)则因理想条件内部 $E_2 = 0$, $B_2 = 0$ 式(4.1-9)简化为

$$\left. \begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} = 0 \\ H_{1t} &= J_s \\ D_{1n} &= \sigma \\ B_{1n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1-10)$$

此式说明在理想导体表面电场强度无切向分量,导体为等位面。导体表面的电位移矢量垂直于导体表面且其值等于导体表面的自由电荷面密度。在理想导体表面有面电流密度时,导体表面只有磁场强度的切向分量 H_t ,且其值等于面电流密度 J_s ,导体表面为一条磁力线。利用这些性质便于定性判断场分布。对任何工程问题,根据给定问题所对应的麦克斯韦方程组及边界条件(包括全场域的边界及媒质分界面的边界)可唯一地确定其场分布。

4 电磁位及其方程

为便于计算,位函数在电磁场问题的分析中起着极为重要的作用。

4.1 静态标量位、静态矢量位

根据 $\text{rot}E=0$ 及 $\text{rot}H=0$ (在 $J_e=0$ 的区域)可定义

$$\left. \begin{aligned} E &= -\text{grad}\varphi \\ H &= -\text{grad}\varphi_m \end{aligned} \right\} \quad (4.1-11)$$

式中 φ ——标量电位(电标位)(V);

φ_m ——标量磁位(磁标位)(A)。

又根据 $\text{div}B=0$ 及 $\text{div}D=0$ (在 $\rho=0$ 的区域)可定义

$$\left. \begin{aligned} B &= \text{rot}A \\ D &= -\text{rot}F \end{aligned} \right\} \quad (4.1-12)$$

式中 A ——矢量磁位(磁矢位)(Wb/m);

F ——矢量电位(电矢位)(C/m)。

对静态矢量函数 A 及 F 的散度规定为

$$\left. \begin{aligned} \text{div}A &= 0 \\ \text{div}F &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1-13)$$

式(4.1-13)称为库仑规范。对静态电场标量电位 φ 已足够应用,矢量电位 F 成为多余的。

4.2 动态标量位、动态矢量位

在时变状态下 $\rho=0$ 的区域内的动态矢量位的定义与式(4.1-12)相同,只是 A 、 F 均为时间空间的函数,其散度亦可规定为

$$\left. \begin{aligned} \text{div}A &= -\mu\epsilon \frac{\partial\varphi}{\partial t} \\ \text{div}F &= -\mu\epsilon \frac{\partial\varphi_m}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (4.1-14)$$

该式称为洛伦兹规范。洛伦兹规范和库仑规范都满足电流连续性原理。对不同问题采用不同的规范条件会影响求解过程的繁易程度^[8]。

将式(4.1-12)中的二个方程分别与无源区域的麦克斯韦第二及第一方程相结合得

$$\left. \begin{aligned} \text{grad}\varphi &= -\left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) \\ \text{grad}\varphi_m &= -\left(H + \frac{\partial F}{\partial t}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.1-15)$$

及

$$\left. \begin{aligned} E &= -\text{grad}\varphi - \frac{\partial A}{\partial t} \\ H &= -\text{grad}\varphi_m - \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (4.1-16)$$

此式仍表示随时间变化的磁场产生电场;随时间变化的电场亦产生磁场。当 A 、 F 不随时间变化时式(4.1-16)退化为式(4.1-11)。

4.3 无损电介质中的波动方程

无损耗的理想电介质中的动态矢量位 $\mathbf{A}$ 及动态标量位 φ 在应用了洛伦兹规范条件后满足如下的非齐次波动方程又称达朗贝尔方程:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu \mathbf{J}_c \\ \nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\rho/\epsilon \end{aligned} \right\} \quad (4.1-17)$$

式中 ∇^2 ——拉普拉斯算子, 在直角坐标中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

式(4.1-17)中包含了 $\mathbf{A}$ 和 φ 对空间和时间的二次导数。在无源区, 式(4.1-17)简化为理想电介质中的波动方程

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1-18)$$

式(4.1-17)、式(4.1-18)的解参见本篇第4章2节。

若采用库仑规范, 则 $\mathbf{A}$ 、 φ 满足的方程为

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu\epsilon \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\mu \mathbf{J}_c \\ \nabla^2 \varphi &= -\rho/\epsilon \end{aligned} \right\} \quad (4.1-19)$$

与式(4.1-17)相比, 式(4.1-19)中 $\mathbf{A}$ 、 φ 方程在形式上不对称, 式(4.1-19)的第二方程中不含 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ 项。

4.4 导电媒质中的扩散方程

在电机工程中大量碰到的是位移电流的效应相对于传导电流的效应可忽略不计, 即在麦克斯韦方程中 $\frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}$ 项可忽略。在选用库仑规范且磁导率为常数的条件下, 矢量位 $\mathbf{A}$ 和标量位 φ 满足的方程为

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mu\gamma \text{grad} \varphi &= 0 \\ \nabla^2 \varphi + \frac{1}{\gamma} \text{grad} \gamma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} \varphi \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1-20)$$

式中只包含 $\mathbf{A}$ 对时间的一次导数, 该式为扩散方程。

$\frac{1}{\mu\gamma}$ 为扩散率。当电导率 γ 为常数, 且为正弦工作状态时式(4.1-20)改写为

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \dot{\mathbf{A}} - j\omega\mu\gamma \dot{\mathbf{A}} &= -\mu \dot{\mathbf{J}}_c \\ \nabla^2 \dot{\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1-21)$$

式(4.1-21)中的第一式称为亥姆霍茨方程, 用它可直接求得计及集肤效应时的矢量位 $\dot{\mathbf{A}}$ 。

4.5 泊松、拉普拉斯方程

当源和场量都不随时间变化时, 式(4.1-17)、(4.1-18)均退化为恒定及静态条件下的泊松方程或拉普拉斯方程。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} &= -\mu \mathbf{J}_c \quad (\text{或}=0) \\ \nabla^2 \varphi &= -\rho/\epsilon \quad (\text{或}=0) \end{aligned} \right\} \quad (4.1-22)$$

5 电磁能的传播、坡印亭定理

当场量 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 随时间变化时, 由它们确定的电场和磁场能量也随时间在变化, 说明电磁能在流动和传播。能量的变化和传播符合守恒定律。电磁场中的能量守恒定理就是坡印亭定理, 其数学表示式为

$$\int_V \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{J}_c dV - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_c dV - \frac{\partial W}{\partial t} = \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \quad (4.1-23)$$

式中 $\mathbf{E}_c$ ——电动势源中的局外场强 (V/m);

$\frac{\partial W}{\partial t}$ ——电磁能随时间的增加率。

式(4.1-23)左端第一项为体积 V 中所有的源供给的功率, 第二项 (不计负号) 为 V 中所有的有功功率, 第三项 (不计负号) 为 V 中电磁能的增加率。因此 V 中电源提供的功率扣除内部的损耗及补充储藏在电磁场中的功率以外多余的部分将穿过包围 V 的表面 S 向外流出。式(4.1-23)的右端项就是穿出 S 面的全部功率。

5.1 坡印亭矢量

坡印亭矢量 $\mathbf{S}$ 定义为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (\text{W/m}^2) \quad (4.1-24)$$

$\mathbf{S}$ 的方向表示该点电磁能流动的方向, 它的大小等于单位时间内穿过垂直于流动方向上单位面积的电磁能。 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{S}$ 三个矢量的方向符合右手螺旋法则。

用坡印亭矢量可说明电磁能量是借助于空间的电磁场将能量从电源传到负载, 导线只起到引导能量传播方向的作用。导线本身吸收一部分能量转化为导线电阻的损耗。图4.1-2充分说明此观点。

根据导线中以及导线周围的 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 矢量可求出导线周围的 $\mathbf{S}$ 矢量有二个分量: 分量 S_t 是垂直于二导线侧面从导线外指向导线的轴线, 这部分能量转化为导线的电阻损耗; 另一分量 S_a 是沿着导线的轴线从电源端指向负载, 就是电源传送给负载单位面积上的功率。导线周围合成矢量 $\mathbf{S}$ 的方向如图4.1-2b)所示。

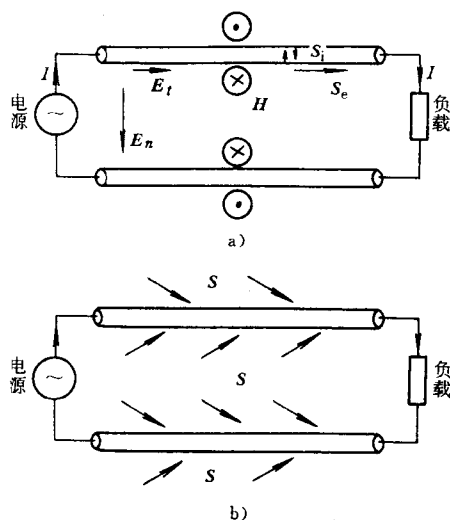


图 4-1-2 平行输电线周围的坡印亭矢量
a) $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{S}$ 的各分量 b) $\mathbf{S}$ 的合成矢量

5.2 坡印亭定理的复数形式

当电磁场量随时间作正弦变化时, 相量形式的坡

印亭矢量定义为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad (4-1-25)$$

式中 $\mathbf{H}^*$ —— 磁场强度矢量 $\mathbf{H}$ 的共轭矢量。

于是在无源情况下坡印亭定理的复数形式为

$$\begin{aligned} & - \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S} \\ & = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_c dV + j\omega \int_V (\mu H^2 - \epsilon E^2) dV \end{aligned} \quad (4-1-26)$$

此式表示

穿入闭合面 S 的总功率 = 面内的有功功率
+ 面内的无功功率

应用式 (4-1-26) 可计算任意媒质, 任意形状的体积中的损耗及等效的电阻 R 和电抗 X 。

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{I^2} \operatorname{Re} \left[- \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S} \right] \\ X &= \frac{1}{I^2} \operatorname{Im} \left[- \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S} \right] \end{aligned} \quad (4-1-27)$$

式中 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 为所求媒质边界面上的电场和磁场强度。

第2章 静电场

1 静电场及其基本方程的微分形式

通常把不随时间而变化, 静止电荷所产生的电场称为静电场。在场源随时间变化的频率很低, 如工频 ($f = 50\text{Hz}$) 的情况下, 也可按静电场的规律进行分析与计算。

静电场的分析和计算广泛地应用于电力设备、电力系统及高电压技术等各工程领域。

静电场的性质可由场矢量 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$ 所表述的基本方程加以描述。基本方程除了用 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$; $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$ 表示外, 工程上还广泛论及其微分形式。

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (4-2-1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (4-2-2)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (4-2-3)$$

式中 $\mathbf{E}$ —— 电场强度矢量 (V/m);

$\mathbf{D}$ —— 电位移矢量 (C/m^2);

ρ —— 电荷体密度 (C/m^3);

ϵ —— 媒质的介电常数, 真空的介电常数 $\epsilon_0 =$

$$8.85 \times 10^{-12} \text{ (F/m)}.$$

式 (4-2-1) 与式 (4-2-2) 在不同坐标系的表达式

分别为

直角坐标

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 0$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$$

圆柱坐标

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial E_\alpha}{\partial z} \right) \mathbf{r}^\circ + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \mathbf{\alpha}^\circ$$

$$+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r E_\alpha) - \frac{\partial E_r}{\partial \alpha} \right] \mathbf{k}^\circ = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r D_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$$

球坐标

$$\frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (E_\alpha \sin \theta) - \frac{\partial E_\theta}{\partial \alpha} \right] \mathbf{r}^\circ + \frac{1}{r}$$

$$\times \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\alpha) \right] \mathbf{\theta}^\circ + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{\alpha}^\circ = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (D_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} = \rho$$

2 静电场的边值问题

在静电场的求解中,常把电位函数 φ 作为直接求解量。然后由 $E = -\text{grad}\varphi$ 得 E 的解答。

边值问题是在适当的边界条件下,求解满足泊松方程或拉普拉斯方程的电位函数。因此,边值问题应包括求解量所满足的方程与定解条件。

2.1 静电场的泊松方程与拉普拉斯方程

位函数 φ 满足泊松方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (4.2-4)$$

而当 $\rho=0$ 时,则满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (4.2-5)$$

“拉普拉斯”算子“ ∇^2 ”在不同坐标系有不同表达式,在直角坐标系下,拉普拉斯方程可表示为

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

当场分布具有轴对称或球对称性质时,应采用圆柱坐标或球坐标,分别为

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0$$

2.2 电位函数的定解条件

为使位函数所满足的泊松或拉普拉斯方程有唯一解,必须给出定解条件,即边界条件,它有

(1)场域边界上的边界条件给定的是边界上的电位函数值 $\varphi = f_1(s)$,或电位函数的法向导数值 $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = f_2(s)$,再或是前二者的线性组合 $\varphi + f_1(s) \frac{\partial \varphi}{\partial n} = f_2(s)$,并分别称为第一、第二、第三类边界条件。

(2)两种不同媒质分界面上的边界条件,即衔接条件。当场域内具有多种媒质时,在媒质分界面上媒质特性发生突变,所以场量不连续,如图 4.2-1 所示,它们分别满足

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (4.2-6)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (4.2-7)$$

式中 E_{1t} 、 E_{2t} ——分界面上某点两侧电场强度的切向分量(V/m);

D_{1n} 、 D_{2n} ——分界面上某点两侧电位移矢量的法

向分量(C/m²);

σ ——分界面上自由电荷面密度(C/m²)。

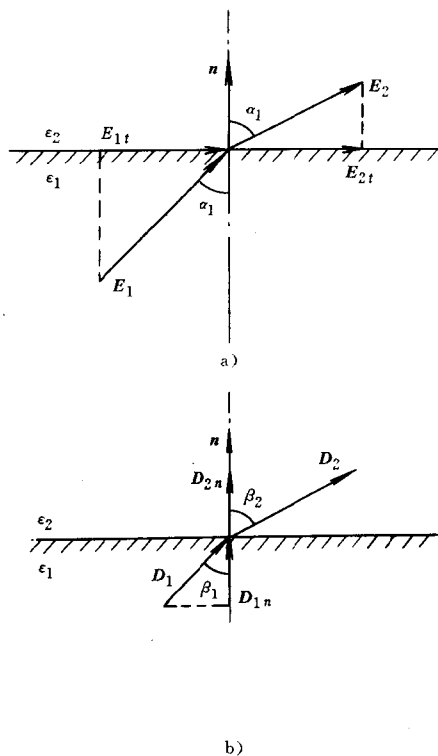


图 4.2-1 分界面上的 E 、 D

a) E b) D

工程上常见导体(媒质 1)与电介质(媒质 2)的分界面,由于导体内部 $E_1=0$,又由关系式 $D=\epsilon E$ 而得 $D_1=0$,所以

$$E_{2t} = E_{1t} = 0 \quad D_{2n} = \sigma$$

即

$$D_2 = \sigma n^0 \quad E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon} n^0$$

由上可见,在导体与电介质分界面上, E 与 D 都是垂直于导体表面的。

当分界面上无自由电荷,两种媒质均为线性并各向同性时, E 与 D 的入射角与透射角(见图 4.2-1)有 $\alpha_1 = \beta_1$; $\alpha_2 = \beta_2$,并可推得

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\tan \beta_1}{\tan \beta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (4.2-8)$$

式中 ϵ_1 、 ϵ_2 ——分界面两侧的介电常数。

在不同媒质分界面上电位函数所满足的关系可由式(4.2-6)与式(4.2-7)求得

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (4.2-9)$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma \quad (4.2-10)$$

2.3 边值问题的直接积分求解方法

当场源与场域的形状比较简单,位函数仅是一个坐标的函数时,可采用直接积分的方法求解,其求解步骤为:

- (1) 列出边值问题(包括求解量中所满足的场方程与边界条件)。
- (2) 根据场分布特点,选用相应坐标系,求 $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ 或 $\nabla^2 \varphi = 0$ 的通解。
- (3) 由边界条件决定通解中的积分常数。
- (4) 将积分常数代入通解而得位函数 φ 的解答。
- (5) 由 $E = -\text{grad}\varphi$ 可得 E 的解。

所求解的场方程是二阶偏微分方程,根据场分布的对称性,当场量是一个自变量的函数时即为常微分

方程,求解比较简单。

2.4 镜象法

镜象法^[10]是边值问题中一种间接求解法,其依据是场的唯一性定理。

镜象法的基本原理是在求解的场域之外用镜象电荷等效替代边界上分布的感应电荷或极化电荷,只要求解区在等效前后所满足的方程与边界条件不变,则其解答是唯一的。

应用镜象法的关键是找到镜象电荷的位置与大小。

注意点是解答适用的区域。

【例 4-2-1】 在接地金属球壳外,离球心距离 d 处,有一点电荷 Q ,见图 4-2-2a,求球内、外的电位与电场强度。

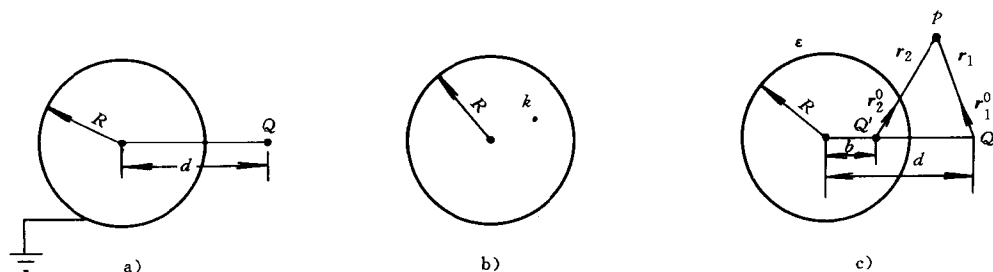


图 4-2-2 点电荷与球

a) 球外点电荷 b) 球内电位 c) 镜象电荷

解 球内 由于点电荷在球壳内不产生电场,且球内无电荷,电位参考点选在接地地球表面,所以球内任意点 k (如图 4-2-2b) $\varphi_k = 0; E = 0$ 。

球外 由于点电荷 Q 在球壳外表面上引起的感应电荷分布不均匀,它在球外产生的场不对称;根据对场分布的分析,可用在点电荷与球心连线上离球心 b 处的点电荷 Q' (称为镜象电荷)来等效替代。又根据球面是电位为零的等位面这一边界条件,可求得镜象电荷的位置与大小为

$$b = \frac{R^2}{d} \quad (4.2-11)$$

$$Q' = -\frac{R}{d}Q \quad (4.2-12)$$

如图 4-2-2c 所示,球外任意点 p 的电位与电场强度为

$$\varphi_p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q}{r_1} + \frac{Q'}{r_2} \right)$$

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q}{r_1^2} + \frac{Q'}{r_2^2} \right)$$

再次强调上面两个计算式只适用于球外。

2.5 分离变量法(参阅参考文献[10]或参见第2篇第4章)

当位函数是两个或三个坐标的函数如 $\varphi = f(x, y,$

$z)$ 时,把位函数分离成由两个或三个各自仅含一个坐标的函数的乘积,组成 $\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$,将其代入场方程,可得每一变量的常微分方程,并分别求得其通解,然后将几组常微分方程的通解组合成偏微分方程的通解,由边界条件决定分离常数与积分常数,最后得位函数的解。

在代入场方程时,需使所选择的坐标系中坐标面与场域的边界面相吻合。

2.6 复变函数法与保角变换法^[10]

复变函数法是利用复变函数中解析函数的实部与虚部都满足拉普拉斯方程的特性,当所求解的两维拉普拉斯场的场域边界与某一解析函数的图形一致时,则此解析函数实部或虚部即为所求位函数的解。

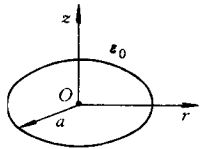
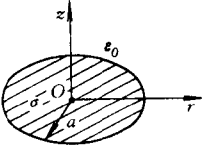
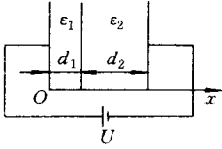
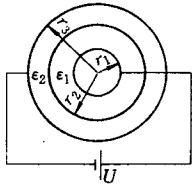
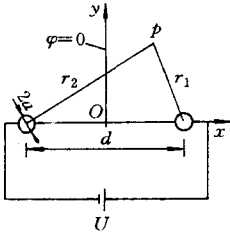
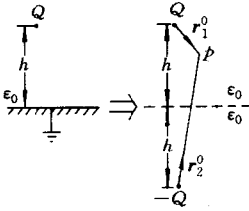
保角变换法是利用解析函数的保角变换特性,将 Z 平面上边界形状较复杂的场域 D ,通过解析函数 $W = f(Z)$ 变换到边界形状较为简单的 W 平面,求解后再反变换到 Z 平面,获得原问题的解。

3 几种典型结构的电场强度与电位的计算式

静电场的源是电荷,但在工程实际中给定的常是

导体间的电压。表4·2-1列出几种简单结构在已知电荷或电压条件下电场强度 E 与电位 φ 的计算公式。

表4·2-1 电场强度与电位计算式

场源情况	结构	电场强度(V/m)	电位(V)
圆环线电荷 τ —电荷线密度(C/m) a —圆环半径(m)		沿轴线 z $E = \frac{\tau z}{2\epsilon_0(a^2 + z^2)^{3/2}} k$	沿轴线 z $\varphi = \frac{\tau a}{2\epsilon_0(a^2 + z^2)^{1/2}}$
半径为 a 带电圆盘 σ —电荷面密度(C/m ²)		沿轴线 z $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \right] k$	沿轴线 z $\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[(a^2 + z^2)^{1/2} - z \right]$
具有两层媒质的平板电容器 U —板间电压(V) d_1, d_2 —媒质厚度(m)		媒质1内 $E_1 = \frac{\epsilon_2 U}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} i$ 媒质2内 $E_2 = \frac{\epsilon_1 U}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} i$	媒质1内 ($x < d_1$) $\varphi_1 = E_1(d_1 - x) + E_2 d_2$ 媒质2内 ($x > d_1$) $\varphi_2 = E_2(d_2 + d_1 - x)$
具有两层媒质的同轴线 U —内、外导体间电压(V) r_1, r_3 —内、外导体的半径(m)		媒质1内 $E_1 = \frac{U r^0}{r \left(\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ln \frac{r_3}{r_2} \right)}$ 媒质2内 $E_2 = \frac{U r^0}{r \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \ln \frac{r_3}{r_2} \right)}$	$\varphi_1 = \frac{U \ln(r_2/r)}{\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ln \frac{r_3}{r_2}} + \frac{U \ln(r_3/r_2)}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \ln \frac{r_3}{r_2}}$ $\varphi_2 = \frac{U \ln(r_3/r)}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \ln \frac{r_3}{r_2}}$
两线传输线 a —导线半径(m) d —线间距离(m) U —线间电压(V) ($d \gg a$)		$E_p = \frac{U}{\ln \left(\frac{d}{a} \right)} \left[\frac{A i - B j}{r_1 r_2} \right]$ $A = d \left[y^2 + \left(\frac{d}{2} \right)^2 - x^2 \right]$ $B = 2dxy$	$\varphi_p = \frac{U}{\ln \left(\frac{d}{a} \right)} \ln \left[\frac{r_2}{r_1} \right]^{\frac{1}{2}}$
无限大导板上方的点电荷 Q —电荷值(C) h —点电荷与导板距离(m)		导板上方空间 $E_p = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_1^0}{r_1^2} - \frac{r_2^0}{r_2^2} \right)$	导板上方空间 $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$

4 电容与部分电容的计算

4.1 电容与部分电容

4.1.1 两导体系统的电容

两导体组成的静电独立系统($\Sigma Q=0$)中电容的计算式为

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \quad (\text{F}) \quad (4.2-13)$$

式中 Q ——导体带的电荷量(C);

U ——两导体间的电压(V)。

4.1.2 多导体系统的电容——部分电容

由 $(n+1)$ 个导体组成的静电独立系统中,每个导体上的电荷与各导体间电压有以下关系:

$$q_1 = C_{10}U_{10} + \dots + C_{1k}U_{1k} + \dots + C_{1n}U_{1n}$$

.....

$$q_k = C_{k1}U_{k1} + \dots + C_{k0}U_{k0} + \dots + C_{kn}U_{kn}$$

.....

$$q_n = C_{n1}U_{n1} + \dots + C_{nk}U_{nk} + \dots + C_{n0}U_{n0}$$

式中零号导体为参考导体, $C_{10}, \dots, C_{k0}, \dots, C_{n0}$ 为各导体与参考导体间的部分电容,称为自部分电容; $C_{12}, C_{23}, \dots, C_{kn}, \dots$ 为相应两导体间的部分电容,称互部分电容。系统中任两导体间的部分电容值决定于系统内所有导体的几何尺寸与相互间位置,以及介电常数。表4.2-2中两线传输线的相电容与线电容等都是部分电容。

必须注意导体间的部分电容与总电容(或称等效电容)的差别,如图4.2-3中的 C_{10} 为部分电容,而导体

1与导体0间的总电容为 C'_{10} ,如图4.2-3b所示,

$$C'_{10} = C_{10} + \frac{C_{12}C_{20}}{C_{12} + C_{20}}$$

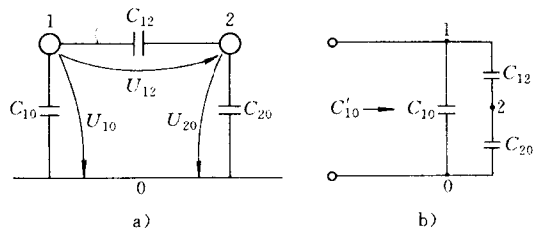


图4.2-3 部分电容与总电容

a)部分电容 b)总电容

工程上常用测量的方法来获得部分电容值。设两线传输线如图4.2-3a所示,导体1与2上的电荷值

$$Q_1 = C_{10}U_{10} + C_{12}U_{12}$$

$$Q_2 = C_{21}U_{21} + C_{20}U_{20}$$

如在导体1和2与0号导体间分别加上相同的电压,即使 $U_{12}=0$,测得 $U_{10}(=U_{20})$, Q_1 与 Q_2 ,则得导体1与2的相电容

$$C_{10} = \frac{Q_1}{U_{10}} \Big|_{U_{12}=0}; C_{20} = \frac{Q_2}{U_{20}} \Big|_{U_{12}=0}$$

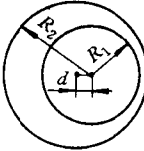
如使导体1与0电位相等,即 $U_{10}=0$,测得 U_{12} 与 Q_1 ,则得线电容 C_{12} ,并有 $C_{21}=C_{12}$

$$C_{12} = \frac{Q_1}{U_{12}} \Big|_{U_{10}=0} \quad (4.2-14)$$

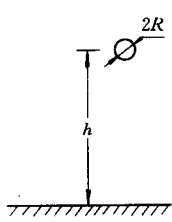
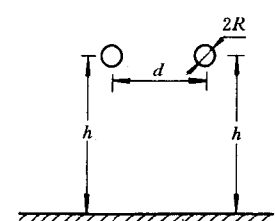
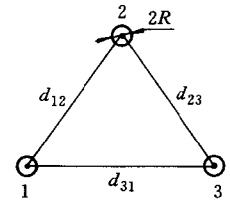
4.2 几种典型结构的电容计算式

一般的平板电容器、球形电容器与柱形电容器的电容量计算式参见第3篇第4章2.3.2节,工程上几种典型结构的电容量计算式列于表4.2-2。

表4.2-2 几种典型结构的电容计算式^{[10][11]}

结 构	电 容 量 (F)
偏心电缆 d—两轴线间距离(m) R_1, R_2—内、外导体半径(m) l—电缆长度(m)	 $C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{[A+B][A-D]}{[A-B][A+D]}}$ $A = \left[\left(\frac{R_2^2 - R_1^2 - d^2}{2d} \right)^2 - R_1^2 \right]^{1/2}$ $B = \frac{R_2^2 - (R_1 + d)^2}{2d}$ $D = \frac{(R_2 - d)^2 - R_1^2}{2d}$

(续)

结 构	电 容 量 (F)
单根架空传输线 R—导线半径(m) h—导线离地高度(m) l—导线长度(m)	 $C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \left\{ \frac{h}{R} + \left[\left(\frac{h}{R} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}}$ 当 $R \ll h$ $C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \left(\frac{2h}{R} \right)}$
两线传输线 R—导线半径(m) d—线间距离(m) h—导线离地高度(m)	 相电容 $C_{10} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \left\{ \frac{2h}{R} \left[\left(\frac{2h}{R} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}}$ 线电容 $C_{12} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \left\{ \frac{2h}{R} \left[\left(\frac{2h}{d} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}}$ $\times \frac{\ln \left[\left(\frac{2h}{d} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}}}{\ln \left\{ \left(\frac{2h}{R} \right) / \left[\left(\frac{2h}{d} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}}$
三线传输线 R—导线半径(m) d_{12}, d_{23}, d_{31}—线间距离(m) 不计地面影响	 每相电容 $C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \left(\frac{d}{R} \right)}$ $d = \sqrt[3]{d_{12}d_{23}d_{31}}$

5 静电场能量

5.1 静电场能量公式

系统内所储存的能量 W_e , 单位为焦耳(J), 可根据不同的已知条件, 分别选用以下公式计算,

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2 \quad (\text{J}) \quad (4.2-15)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k \varphi_k \quad (\text{J}) \quad (4.2-16)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \quad (\text{J}) \quad (4.2-17)$$

式中 C, U ——两导体的电容(C/V)与导体间的电压(V);

n ——系统中导体总数;

φ_k, q_k ——第 k 号导体的电位(V)与电荷值(C);

V ——场域的全部体积(m^3).

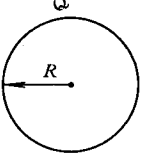
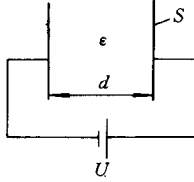
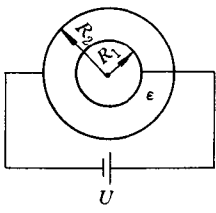
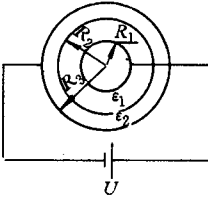
5.2 静电场能量密度

由式(4.2-17)可见, 静电场的能量是储存在所有电场区域内的, 如将式(4.2-17)除以体积 V , 表示场域中单位体积所储存的能量, 即场域中每点的能量密度 w_e 为

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{J}/\text{m}^3) \quad (4.2-18)$$

5.3 典型结构的能量计算式(表 4.2-3)

表 4-2-3 典型结构能量计算式

结 构	能 量 (J)	结 构	能 量 (J)
孤立导体球 	$W_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon R}$ Q —导体所带电量(C) R —导体球半径(m)	两平行导板 	$W_e = \frac{\epsilon S U^2}{2d}$ U —两板间电压(V) S —导板面积(m ²) d —两导板间距离(m)
两同心导体球壳 	$W_e = \frac{4\pi\epsilon R_1 R_2 U^2}{2(R_2 - R_1)}$ U —两球壳间电压(V) R_1, R_2 —内、外球壳半径(m)	有两种媒质同轴电缆 	$W_e = \frac{2\pi\epsilon_1\epsilon_2 l U^2}{\epsilon_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \epsilon_1 \ln \frac{R_3}{R_2}}$ U —电缆上所加电压(V) R_1, R_3 —内、外导体半径(m) R_2 —不同媒质交界面半径(m) l —电缆长度(m)

6 静电力

6.1 库仑力定律

两个带有 q_1 与 q_2 电量的点电荷, q_2 对 q_1 的作用力为 F_{12} , 并有 $F_{12} = -F_{21}$

$$F_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2} r_{12}^0 \quad (\text{N}) \quad (4.2-19)$$

式中 r ——两个点电荷间的距离(m);

r_{12}^0 ——由 q_2 指向 q_1 的单位矢量。

6.2 由电场强度定义求力

带有电量为 q 的点电荷所受的力

$$F = q \cdot E \quad (\text{N}) \quad (4.2-20)$$

式中 E ——不包括点电荷的其他场源在点电荷所在处产生的电场强度。

6.3 虚位移法

这是通过电场能量求带电体或媒质受力的一种方法。

$$f = - \frac{\partial W_e}{\partial g} \bigg|_{q=\text{常数}} \quad (4.2-21)$$

$$f = - \frac{\partial W_e}{\partial g} \bigg|_{U=\text{常数}}$$

式中 W_e ——电场能量;

g ——广义坐标, 是确定系统内导体形状与位置的几何量, 如距离、面积、体积或角度等;

f ——对应于广义坐标 g 的广义力, 如机械力、张力、压强或转矩等。

当 f 为正值, 表示此力的方向为使广义坐标 g 增加的方向, 反之则为使 g 减小的方向。 q =常数或 U =常数是表示当广义坐标发生变化时, 系统内 q 或 U 保持不变。

6.4 由法拉弟观点求力

法拉弟认为电场中由 E 线组成的每一段电力线管(图 4-2-4), 沿其轴线方向的端面受到纵张力, 在轴

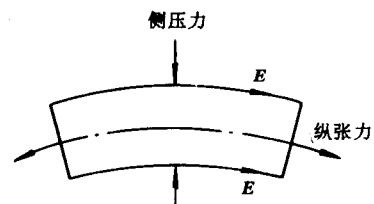


图 4-2-4 电力线管上所受的力

线的垂直方向的侧面受到侧压力, 这两个单位面积上

的力都为

$$f = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{N/m}^2) \quad (4.2-22)$$

7 静电屏蔽

在静电场中,导体空腔内无电荷时 $E=0$,导体外的电荷只能在导体外表面引起感应电荷,相关的电力

线只能终止于导体外表面,不能进入导体内,导体腔内的物体不会受到导体外电场的影响。当导体接地时,导体腔内的电荷变化只能引起导体腔内表面的感应电荷的变化,对导体腔外的电场不产生影响。这种通过带空腔的导体(接地)将导体内、外的场分割为二个互不影响的独立系统,这就是静电屏蔽的原理。

第3章 恒定电场与磁场

1 恒定电场

分布不随时间变化的运动电荷所产生的电场称为恒定电场。恒定电场存在于非导电媒质(电导率 $\gamma=0$)与导电媒质($\gamma \neq 0$)中。对非导电媒质中的恒定电场的分析计算方法与静电场类同。而在导电媒质中,在此电场作用下,运动电荷作宏观定向运动而形成恒定电流,由分布不随时间变化的电流密度矢量所描写的场称为恒定电流场,它与恒定电场同时存在。恒定电场的分析讨论较多地集中于导电媒质内的恒定电场。

2 恒定电场基本方程的微分形式

导电媒质中(电源外)恒定电场基本方程的微分形式为

$$\text{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (4.3-1)$$

$$\text{div} \mathbf{J} = 0 \quad (4.3-2)$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad (4.3-3)$$

式中 $\mathbf{E}$ ——电场强度矢量(V/m);

$\mathbf{J}$ ——电流密度矢量(A/m²);

γ ——导电媒质的电导率(S)。

式(4.3-3)称为欧姆定律的微分形式,它是描写场中每一点上的欧姆定律的。

3 恒定电场中不同媒质分界面处的边界条件

在两种媒质分界面上媒质特性发生突变,场量 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{J}$ 在分界面两侧不连续,根据基本方程的积分形式

可推得

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$J_{1n} = J_{2n}$$

这时,与静电场不同的是由于导体内部 $E_i \neq 0$,在导体与电介质的分界面上导体一侧 $E_{1t} = E_1$,在电介质一侧 $E_{2t} = E_{1t} \neq 0$,则 $\mathbf{E}_2 = E_{2n}\mathbf{n}^0 + E_{2t}\mathbf{t}^0$, $\mathbf{E}_2$ 不再垂直导体表面(见图 4.3-1),只有当导体内 $\gamma_1 \rightarrow \infty$, $\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{J}}{\gamma_1} \rightarrow 0$ 时,可看作 $\mathbf{E}_2$ 仍垂直于导体表面。

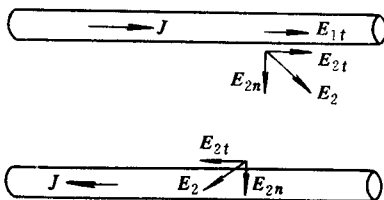


图 4.3-1 导体与电介质的分界面

4 恒定电场与静电场比拟

没有电荷分布区域的静电场与电源外导电媒质内的恒定电场的场方程有相似的形式,各物理量之间对应关系,列于表 4.3-1。因此把一种场的计算或实验所得结果,根据对应关系,可推广到相同边值问题的另一种场。例如平板电容器 $C = \frac{\epsilon S}{d}$,当电极间媒质 $\gamma \neq 0$

时,极板间的电导为 $G = \frac{\gamma S}{d}$ 。

表 4.3-1 导体内(无源部分)恒定电场与 $\rho=0$ 区域静电场间的比拟

导体内恒定电场 (无电源部分)	$\text{rot} \mathbf{E} = 0$	$\text{div} \mathbf{J} = 0$	$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$	$\nabla^2 \phi = 0$	$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$
静电场($\rho=0$)	$\text{rot} \mathbf{E} = 0$	$\text{div} \mathbf{D} = 0$	$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$	$\nabla^2 \phi = 0$	$Q = \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$
物理量间对应关系	$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$	$\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{D}$	$\gamma \rightarrow \epsilon$	$\phi \rightarrow \phi$	$I \rightarrow Q$