数学物理方法习题集

武 仁编

北京大学出版社

数学物理方法
习题集

武　仁　编

北京大学出版社

数学物理方法习题集
武　仁　编
责任编辑：吴　鹏
*
北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
787×1092毫米　32开本　6.25印张　140千字
1986年9月第1版　1986年9月第1次印刷
印数：00001—15,000册
统一书号：13209·147　定价：1.10元

序　言

本习题集是以北京大学物理系讲授的数学物理方法课程为基础编集而成的，可供综合性大学及师范院校物理类各系、各专业教学时参考。编者都是在郭敦仁先生指导下从事此课程教学的。我们希望，对于把郭先生编写的《数学物理方法》当作基本教材的师生来说，本习题集更能对他们的教与学有所裨益。

本习题集按照郭敦仁先生的《数学物理方法》的各章次序排列先后，只是为了使用的方便，我们把习题作了重新编排，并另拟了标题。在习题的选择上，我们着重于本课程的基本要求，力求精悍。习题的重复量不大，也未涉及数学物理方法在物理学各领域中的应用。本书中也选入了少量特殊的习题，它们具有一定的难度，然而在真正掌握课程要求的基础上又完全可以解决。我们希望，此类习题可以使学生开阔视野，并有助于他们对基本内容的深入掌握。

本书中给出了全部计算题的答案，但未给出详细解答，因为我们觉得，后者利少弊多。借此机会，我们也吁请不要为本习题集编印任何形式的解答。

本习题集是在多年教学过程中逐渐积累起来的。参加本书编写工作的有吴崇试、钟毓澍、周治宁、刘玉如、成琍等五位同志，还有不少同志在北京大学物理系担任过此课程的教学工作。遗憾的是，由于各种原因，他们未能参加本书的编写工作。编者谨在此致以谢忱。

由于编者水平所限，错误与不妥之处在所难免，敬请使用本书的同志们不吝指正。

编者　一九八四年七月

目　录

第一部分 习 题

习题一 复 数

1. 写出下列复数的实部、虚部、模和辐角：

(1) $1+i\sqrt{3}$；(2) $1-\cos\alpha+i\sin\alpha$，$0\leqslant\alpha<2\pi$；

(3) $e^{i\sin x}$，x 为实数；(4) e^{iz}；

(5) e^{z}；(6) $\sqrt[4]{-1}$；(7) $\sqrt{1+i}$；

(8) $\sqrt{\dfrac{1+i}{1-i}}$；(9) e^{1+i}；

(10) $e^{i\varphi(x)}$，$\varphi(x)$是实变数 x 的实函数。

2. 把下列关系用几何图形表示出来：

(1) $|z|<2$，$|z|=2$，$|z|>2$；

(2) $\operatorname{Re} z>\dfrac{1}{2}$，$1<\operatorname{Im} z<2$；

(3) $\arg(1-z)=0$，$\arg(1+z)=\dfrac{\pi}{3}$，

$\arg(z+1-i)=\dfrac{\pi}{2}$；

(4) $0<\arg(1-z)<\dfrac{\pi}{4}$，$0<\arg(1+z)<\dfrac{\pi}{4}$，

$\dfrac{\pi}{4}<\arg(z-1-2i)<\dfrac{\pi}{3}$；

(5) $\alpha<\arg z<\beta$ 与 $\gamma<\operatorname{Re} z<\delta$ 的公共区域，α、β、γ 及 δ 均为常数；

(6) $|z-\mathrm{i}|<1$，$1<|z-\mathrm{i}|<\sqrt{2}$；

(7) $|z-a|=|z-b|$，a、b 为常数；

(8) $|z-a|+|z-b|=c$，其中 a、b、c 均为常数，且 $c>|a-b|$；

(9) $|z|+\operatorname{Re} z<1$；(10) $0<\arg\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}<\frac{\pi}{4}$。

3. 已知一复数 z，画出 $\mathrm{i}z$、$-z$、$\bar{z}$、$\frac{1}{\bar{z}}$、$\frac{1}{z}$，并指出它们之间的几何关系。

4. 若 $|z|=1$，试证明

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=1,$$

a、b 为任意复数。

5. 证明下列各式：

(1) $|z-1|\leqslant\big||z|-1\big|+|z||\arg z|$；

(2) 若 $|z_1|=|z_2|=|z_3|$，则

$$\arg\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=\frac{1}{2}\arg\frac{z_2}{z_1}.$$

6. 用复数 z 表示曲线上的变点。

(1) 试写出经过点 a 且与复数 b 所代表的矢量平行的直线方程；

(2) 写出以 d 和 $-d$ 为焦点、长轴为 $2a$ 的椭圆方程，$a>|d|$。

7. 用复数运算法则推出：

(1) 平面直角坐标平移公式；

(2) 平面直角坐标旋转变换公式。

8. 设复数 z_1、z_2、z_3 满足关系式

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3},$$

证明：$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_1 - z_3|$。

9. (1) 给出 z_1、z_2、z_3 三点共线的充要条件；

(2) 给出 z_1、z_2、z_3、z_4 四点共圆的充要条件。

10. 求下列方程的根，并在复平面上画出它们的位置：

(1) $z^2 + 1 = 0$；(2) $z^3 + 8 = 0$；

(3) $z^4 - 1 = 0$；(4) $z^4 + 1 = 0$；

(5) $z^{2n} + 1 = 0$，n 为正整数；

(6) $z^2 + 2z\cos\lambda + 1 = 0$，$0 < \lambda < \pi$。

11. 设 $z = p + iq$ 是实系数方程

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0$$

的根，证明 $\bar{z} = p - iq$ 也必定是此方程的根。

12. 证明：$\sin^4\varphi = \frac{1}{8}(\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + 3)$。

13. 把 $\sin n\varphi$ 和 $\cos n\varphi$ 用 $\sin\varphi$ 和 $\cos\varphi$ 表示出来。

14. 将下列和式表示成有限形式：

(1) $\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \cdots + \cos n\varphi$；

(2) $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \cdots + \sin n\varphi$。

15. 证明：

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\cdots\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

16. 求下列序列 $\{a_n\}$ 的聚点和极限，如果是实数序列，

则同时求出上极限和下极限：

(1) $a_n=(-)^n\frac{n}{2n+1}$；(2) $a_n=(-)^n\frac{1}{2n+1}$；

(3) $a_n=n+(-)^n(2n+1)\mathrm{i}$；

(4) $a_n=2n+1+(-)^n n\mathrm{i}$；

(5) $a_n=\left(1+\frac{\mathrm{i}}{n}\right)\sin\frac{n\pi}{6}$；(6) $a_n=\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cos\frac{n\pi}{3}$.

17. 证明序列$\{a_n\}$

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

的极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在。

提示：证明$\{a_n\}$是单调有界序列。

18. 证明拉格朗日恒等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n}z_k w_k\right|^2=\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2\right)-\sum_{k<j=1}^{n}|z_k\overline{w}_j-z_j\overline{w}_k|^2.$$

19. 试证明：从条件

$$\lim_{n\to\infty}z_n=A$$

可以导出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}=A.$$

又当$A=\infty$时，上述结论还正确吗？

习题二　解析函数

20. 设 $z=x+\mathrm{i}y$，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，$c=a+ib$，并且已知 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，证明

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = c$$

与

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = a, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = b$$

彼此等价。

21. 证明：$f(z) = \dfrac{1}{1 - z^2}$ 在单位圆 $|z| < 1$ 内连续但不一致连续。

22. 证明下列函数在 $z = 0$ 点连续：

(1) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{[\mathrm{Re}(z^2)]^2}{z^2}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0; \end{cases}$

(2) $f(z) = |z|$。

23. 判断下列函数在何处可导(并求出其导数)、在何处解析：

(1) $|z|$； (2) $\bar{z}$； (3) z^m， $m = 0, 1, 2, \cdots$；

(4) e^z； (5) $(x^2 + 2y) + \mathrm{i}(x^2 + y^2)$；

(6) $(x - y)^2 + 2\mathrm{i}(x + y)$；

(7) $z\mathrm{Re}\, z$； (8) $\dfrac{1}{z}$； (9) $\cos z$； (10) $\mathrm{sh}\, z$。

24. 试证明极坐标下的科希－黎曼条件：

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

25. 证明：若函数 $f(z)$ 的偏导数在 $z = z_0$ 点连续，且满足科希-黎曼方程，则 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 点可导。

26. 设

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^5}{|z|^4}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0.\end{cases}$$

(1) 证明：当 $z\to 0$ 时，$\dfrac{f(z)}{z}$ 的极限不存在；

(2) 若 $u=\operatorname{Re} f(z)$，$v=\operatorname{Im} f(z)$，证明：$u(x,0)=x$，$v(0,y)=y$，$u(0,y)=v(x,0)=0$；

(3) 证明：u、v 的偏导数存在，且科希－黎曼方程成立。但(1)中已证明 $f'(0)$并不存在，这个结论和第25题矛盾吗？

27. 试利用极坐标形式下的科希－黎曼方程(第24题)，证明：

$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right).$$

28. 设 $\rho=\rho(x,y)$及 $\varphi=\varphi(x,y)$是实变量 x,y 的实函数。若 $f(z)=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$是 $z=x+\mathrm{i}y$的解析函数，证明：

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}=\rho\frac{\partial \varphi}{\partial y},\quad \frac{\partial \rho}{\partial y}=-\rho\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

29. 设$\rho=\rho(r,\theta)$ 及$\varphi=\varphi(r,\theta)$是实变数$r,\theta$的实函数。若$w=f(z)$解析，其中$w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$，$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，试证：

$$\frac{\partial \rho}{\partial r}=\frac{\rho}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta},\quad \frac{\partial \rho}{\partial \theta}=-r\rho\frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

30. 若函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$在G内解析，且$f(z)\neq$常数，试

讨论下列函数是否也是G内的解析函数：

(1) $u-\mathrm{i}v$；(2) $-u-\mathrm{i}v$；

(3) $-v+\mathrm{i}u$；(4) $v+\mathrm{i}u$。

31. 设$z=x+\mathrm{i}y$，已知解析函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$的实部或虚部如下，试求其导数$f'(z)$：

(1) $u=\mathrm{e}^{-y}\cos x$；(2) $u=\mathrm{ch}x\cos y$；

(3) $v=\sin x\,\mathrm{sh}y$；　(4) $v=\dfrac{x}{x^2+y^2}$；

(5) $u=\ln(x^2+y^2)$；(6) $v=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$。

32. 试根据下列条件确定解析函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$：

(1) $u=x+y$；(2) $u=\sin x\,\mathrm{ch}y$；

(3) $v=\dfrac{x}{x^2+y^2}$；　(4) $v=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}$。

33. 若$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$解析，且$u(x,y)-v(x,y)=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$，试求$f(z)$。

34. 若$u(x,y)$具有连续三阶偏导数，且$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，证明函数$\dfrac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial y}$解析。

35. 如果$u(x,y)$和$v(x,y)$都是调和函数，试讨论下列函数是否也是调和函数：

(1) $u(v(x,y),0)$；(2) $u(0,v(x,y))$；

(3) $u(x,y)v(x,y)$；(4) $u(x,y)+v(x,y)$。

36. 假设函数$f(z)$在区域G内的任何一点z都可满足$f'(z)=0$，证明$f(z)$在G内为常数。

37. 若$f(z)$在区域G内解析，且$\mathrm{Im}f(z)=0$，证明$f(z)$为常数。

38. 若$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域 G 内解析，且 $au(x,y)+bv(x,y)=c$，a、b、c是不为 0 的实常数，证明 $f(z)$为常数。

如果a、b、c是不为 0 的复常数，这个结论还成立吗？

39. 若$f(z)$、$g(z)$在$z=a$点解析，且 $f(a)=g(a)=0$，而$g'(a)\neq 0$，试证：

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

40. 设点z沿着从原点出发的射线运动，其模无限增大，试讨论函数e^z的变化趋势。

41. 试证明下列公式(z是任意复数)：

(1) $\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\cos z_1\sin z_2$；

(2) $\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2$；

(3) $\mathrm{sh}z=-i\sin iz$；(4) $\mathrm{ch}z=\cos iz$；

(5) $\cos^{-1}z=-i\ln(z+\sqrt{z^2-1})$；

(6) $\mathrm{tg}^{-1}z=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}$；

(7) $\mathrm{ch}^2z-\mathrm{sh}^2z=1$；(8) $1-\mathrm{th}^2z=\mathrm{sech}^2z$。

42. 证明下列公式(z是任意复数)：

(1) $\frac{d}{dz}\mathrm{sh}z=\mathrm{ch}z$；(2) $\frac{d}{dz}\mathrm{ch}z=\mathrm{sh}z$；

(3) $\frac{d}{dz}\mathrm{th}z=\mathrm{sech}^2z$；(4) $\frac{d}{dz}\mathrm{cth}z=-\mathrm{csch}^2z$ 。

43. 证明下列不等式(x、y是实数)：

(1) $|\mathrm{sh}y|\leqslant|\sin(x+iy)|<\mathrm{ch}y$；

(2) $|\mathrm{sh}y|\leqslant|\cos(x+iy)|<\mathrm{ch}y$。

44. 解下列方程：

(1) $\operatorname{sh}z=0$； (2) $2\operatorname{ch}^2z-3\operatorname{ch}z+1=0$；

(3) $\sin^2 z-\frac{5}{2}\sin z+1=0$； (4) $\operatorname{tg}z=i$。

45. 求出下列函数值：

(1) e^{2+i}； (2) $\sin i$；

(3) $\cos(5-i)$； (4) $\ln(-1)$。

46. 扇形区域 $0<\arg z<\frac{\pi}{3}$ 经变换 $w=z^3$ 后变成什么区域？

47. 试证：圆 $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$ 经变换 $w=\frac{1}{z}$ 后仍为圆，并讨论 $A=0$ 及 $D=0$ 的情形。

48. $w=e^{iz}$ 把实轴上线段 $0\leqslant x<2\pi$ 变为什么图形？

49. 双纽线 $r^2=2a^2\cos 2\theta$ 经变换 $w=z^2$ 后变为什么图形？a 是已知常数。

50. 证明：$w=-i\frac{z-1}{z+1}=-i+i\frac{2}{z+1}$ 将直线 $y=ax$ 变为圆。

51. 证明：在变换 $w=\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$ 下，z 平面上以原点为心、e^{β}（$\beta>0$）为半径的圆变为 w 平面上的椭圆，其焦点为 $\pm i$，长、短半轴分别为 $\operatorname{ch}\beta$ 及 $\operatorname{sh}\beta$。

52. 设 $w=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析，且 $\frac{dw}{dz}\neq 0$，试证

明曲线族

$$u(x,y)=C_1, v(x,y)=C_2$$

（C_1、C_2为任意常数）互相正交。

习题三　多 值 函 数

53. 判断下列函数是单值的还是多值的：

(1) $z+\sqrt{z-1}$；(2) $\dfrac{1}{1+\ln z}$；(3) $\sqrt{\cos z}$；

(4) $\ln\sin z$；(5) $\dfrac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$；(6) $\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$。

54. 找出下列函数的枝点，并讨论z绕各个枝点移动一周回到原处后函数值的变化。若同时绕两个、三个枝点，又会出现怎样的情况？

(1) $\sqrt{1-z^3}$；(2) $z+\sqrt{z^2-1}$；

(3) $\sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$，a、b为已知复数；

(4) $\dfrac{1}{1+\ln z}$；(5) $\dfrac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$；(6) $\sqrt[3]{z^2-4}$；

(7) $\sqrt[3]{z^2(z+1)}$；(8) $\ln(z^2+1)$。

55. 函数 $w=z+\sqrt{z-1}$，规定$w(2)=1$，试分别求当z沿着图中的C_1和C_2连续变化时$w(-3)$之值。

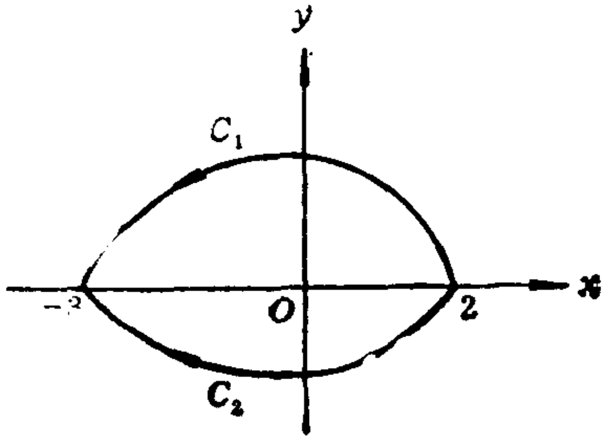


图 1

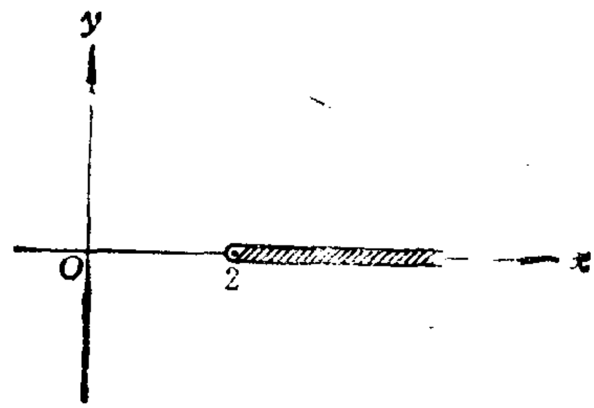


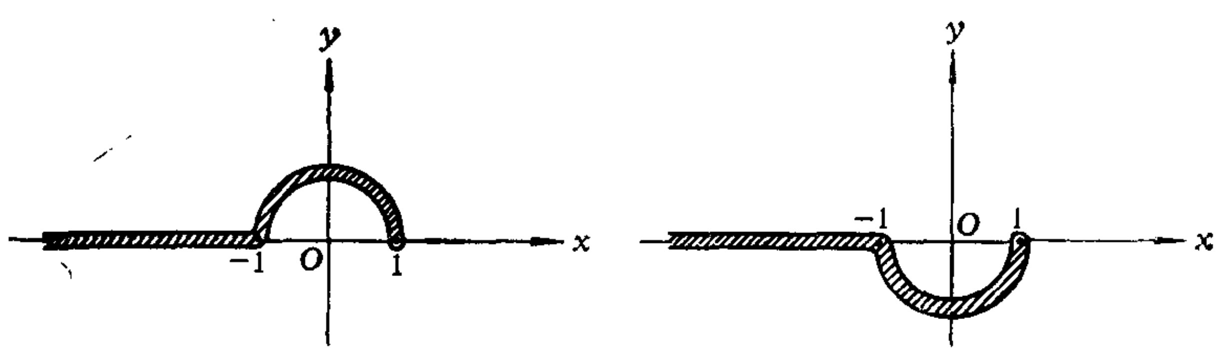
图 2

56. 规定函数 $w=z\sqrt[3]{z-2}$在图 2 中割线上岸的辐角为 0，试求该函数在割线下岸$z=3$处的数值．又问，这个函数有几个单值分枝？求出在其它分枝中割线下岸$z=3$处的函数值．

57. 函数 $w=\sqrt{(z-a)(z-b)}$的割线有多少种可能的作法？试在两种不同作法下讨论单值分枝的规定．设a、b为实数，且$a\neq b$．

58. 规定函数 $w=\sqrt{z^2-2z+2}$在$z=0$时 $w=\sqrt{2}$，求当 z 由原点出发沿圆 $|z-(1+i)|=\sqrt{2}$ 逆时针方向通过x轴时的函数值．又当z回到原点时，函数之值如何？

59. 函数$w=\ln(1-z^2)$，规定$z=0$时$w=0$，试讨论当 z 分别限制在图3(a)和(b)中变化时，$z=3$处w之值．



(a) (b)

图 3