应用近世代数

胡冠章　编著

清华大学出版社

应用近世代数

胡冠章

清华大学出版社

内 容 提 要

近世代数(抽象代数)在计算机科学、通信理论、近代物理、近代化学等方面有广泛的应用,是从事这些方面工作的高级科技人员所必需的数学基础。本书介绍群、环、域的基本理论与应用,适用于应用数学、计算机科学、无线电、自动化、物理、化学、生物医学等专业的高年级学生、研究生以及专业人员。

(京)新登字 158 号

应用近世代数

胡冠章

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

北京密云胶印厂印装

新华书店总店科技发行所发行

☆

开本:850×1168 1/32 印张:7.5 字数:193 千字

1993 年 12 月第 1 版 1993 年 12 月第 1 次印刷

印数:0001—3000

ISBN 7-302-01317-9/O・144

定价:4.80 元

前　言

为了满足非纯数学专业的学生和科技人员学习近世代数的需要，本书尽力做到联系实际，多举例子，使读者感到有趣想学。对一些内容用叙述式、部分论证式、提示式等方法给出，并留有思考余地。读者若能边学边动手按提示完成证明或计算，必能收到满意效果。每节后的习题均附有提示或答案，便于自学。本书得益于著名代数学家曾肯成先生于80年代在清华大学应用数学系的讲课，在此谨致感谢。

作　者

1992.10

目　录

第一章　引言和预备知识

§1.1　几类实际问题

初等代数、高等代数和线性代数都称为**经典代数**(Classical Algebra)，它的研究对象主要是代数方程和线性方程组。**近世代数**(Modern Algebra)又称为**抽象代数**，它的研究对象是代数系，所谓代数系，是由一个集合，和定义在这个集合中的一种运算或若干种运算所构成的一个系统。例如，整数集合 $\boldsymbol{Z}$，和普通的整数加法＋构成一个代数系，记作$(\boldsymbol{Z},+)$。$\boldsymbol{Z}$ 和普通加法＋以及普通乘法·两种运算也构成一个代数系，记作$(\boldsymbol{Z},+,\cdot)$。

由于近世代数在近代物理、近代化学、计算机科学、数字通信、系统工程等许多领域都有重要应用，因而它是现代科学技术的数学基础之一，许多非数学专业科技人员也都希望掌握它的基本内容与方法。本书将以一些实际问题为背景，在初等代数和线性代数的基础上，由浅入深介绍它的基本内容，使读者感到通俗易懂，饶有兴趣。下面介绍几类与近世代数的应用有关的实际问题。

1. 项链问题

这个问题的提法是：用 n 种颜色的珠子做成有 m 颗珠子的项链，问可做成多少种不同类型的项链？

首先需要对此问题作数学上的确切描述。设由 m 颗珠子做成一个项链，可用一个正 m 边形来代表它，每个顶点代表一颗珠子。从任意一个顶点开始，沿逆时针方向，依次给每个顶点标以号码：$1,2,\cdots,m$。这样的一个项链称之为有标号的项链。由于每一颗珠

子的颜色有 n 种选择，因而由乘法原理这些有标号的项链共有 n^m 种。但是其中有一些项链可通过旋转一个角度或翻转 180°使它们完全重合。对于这些项链，我们称它们本质上是相同的。对那些无论怎样旋转或翻转都不能使它们重合的项链，称之为本质上不同的项链，即为问题所提的不同类型的项链。当 n 与 m 较小时，不难用枚举法求得问题的解答，读者不妨自行解决以下例子。

例 1 用黑、白 2 种颜色的珠子做成有 5 颗珠子的项链，问可以做成多少种不同类型的项链？

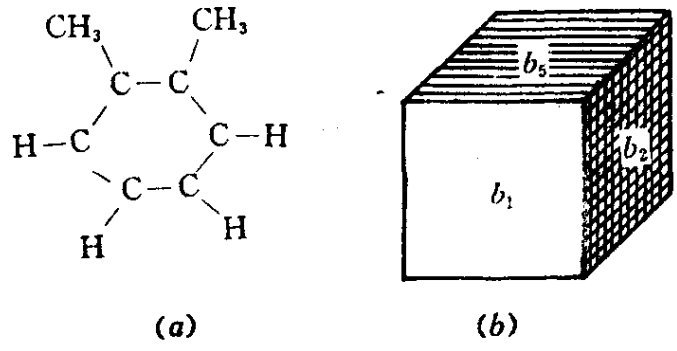
随着 n 与 m 的增加，用枚举法越来越困难，因而必须寻找更加有效的可解决一般的任意正整数 n 与 m 的方法。采用群论方法可完全解决此问题，且至今尚未发现其它更为简单和有效的方法。

2. 分子结构的计数问题

在化学中研究由某几种元素可合成多少种不同物质的问题，由此可以指导人们在大自然中寻找或人工合成这些物质。

例 2 在一个苯环上结合 H 原子或 CH_3 原子团，问可能形成多少种不同的化合物(见图 1.1a)？

如果假定苯环上相邻 C 原子之间的键都是互相等价的，则此问题就是两种颜色 6 颗珠子的项链问题。



(a) (b)

图 1.1

3. 正多面体着色问题

对一个正多面体的顶点或面用 n 种颜色进行着色，问有多少种不同的着色方法？

下面以正六面体为例说明此问题的数学描述。

例 3 用 n 种颜色对正六面体的面着色，问有多少种不同的着色方法(图 1.1b)？

首先建立此问题的数学模型，将问题中的一些概念给以量化。

设 n 种颜色的集合为

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},$$

正六面体的面集合为

$$B=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6\},$$

则每一种着色法对应一个映射：

$$f:B\to A,$$

反之，每一个映射 $f:B\to A$ 对应一种着色法。由于每一个面的颜色有 n 种选择，所以全部着色法的总数为 n^6，但这样的着色法与面的编号有关，其中有些着色法可适当旋转正六面体使它们完全重合，对这些着色法，称它们为本质上是相同的。我们的问题是求本质上不同的着色法的数目。

当 n 很小时不难用枚举法求得结果，例如，当 $n=2$ 时，读者可以自己算出本质上不同的着色法数为 10，对于一般的情况则必须用群论方法才能解决。

4. 图的构造与计数问题

首先让我们介绍一下**图论**(Graph Theory)的一些基本概念。

设 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，称为**顶点**集合(Vertex Set)，E 是由 V 的一些 2 元子集构成的集合，称为**边集**(Edge Set)，则有序对：(V,E)称为一个**图**(Graph)，记作 $G=(V,E)$。

例如，设 $V=\{1,2,\cdots,10\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_{15}\}$，其中 $e_1=\{1,2\}$，$e_2=\{2,3\}$，$e_3=\{3,4\}$，$e_4=\{4,5\}$，$e_5=\{1,5\}$，$e_6=\{1,6\}$，$e_7=\{2,7\}$，$e_8=\{3,8\}$，$e_9=\{4,9\}$，$e_{10}=\{5,10\}$，$e_{11}=\{6,8\}$，$e_{12}=\{7,9\}$，$e_{13}=\{8,10\}$，$e_{14}=\{6,9\}$，$e_{15}=\{7,10\}$。图 $G=(V,E)$ 可用图 1.2 来表示。每一个顶点用圈圈表示，对边集 E 中的每一个元素 $\{i,j\}\in E$，用一条直线或曲线连接顶点 i 与 j。顶点的位置及边的长短，形状均无关紧要。

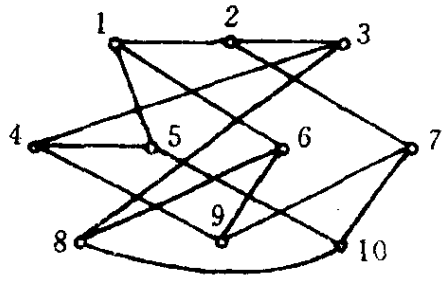


图 1.2

一个图可以代表一个电路，水网络，通信网络，交通网络，地图等有形的结构，也可以代表一些抽象关系。例如可用一个图表示一群人之间的关系：点代表人，凡有边相连的两个点表示他们互相认识，否则表示不认识，则这个图就表示出了这群人之间的关系。图论中有许多有趣的问题，有兴趣的读者可阅读有关参考书。

图论中自然会提出某类图有多少个的问题。

例 4 画出所有点数为 3 的图。

此问题可以这样来解决：首先画出 3 个顶点：1，2，3，在每两个点之间有“无边”和“有边”两种情况，因而全部有 $2\times2\times2=2^3=8$ 种情况，每一种情况对应一个图（图 1.3）。

当点数为 n 时，共可形成 $\binom{n}{2}$ 个 2 元子集，每一个 2 元子集可以对应图中的边或不对应边两种情况，故可形成 $2^{\binom{n}{2}}$ 个图。但是，我们观察一下图 1.3 中的 8 个图，可以发现有些图的构造是完全相同的，如果不考虑它们的点号，可以完全重合，这样的图称它们是同构的。例如图 1.3 中的 G_2，G_3 与 G_4。可以看出图 1.3 中的图，共有 4 个互不同构的图。那么，对一般情况，n 个点的图中互不同

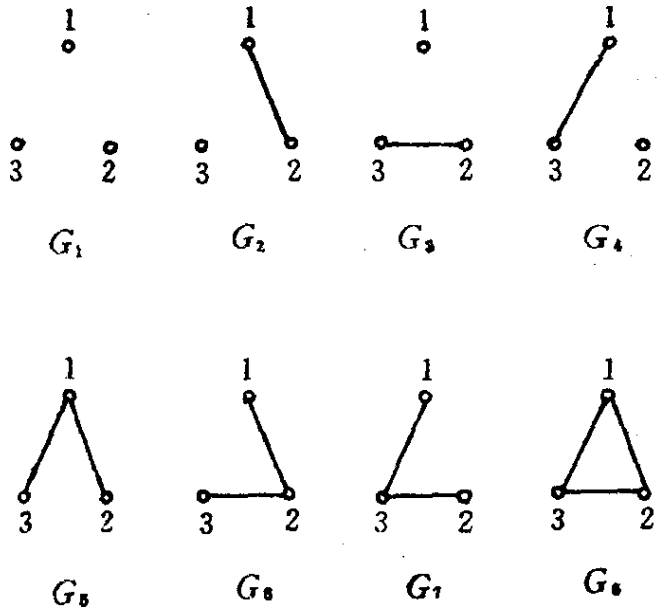


图 1.3

构的图有多少个呢？这个问题也不能用初等方法来解决。

5. 开关线路的构造与计数问题

一个有两种状态的电子元件称为一个开关，例如普通的电灯开关，二极管等。由一些开关组成的二端网络称为开关线路。一个开关线路的两端也只有两种状态：通与不通。我们的问题是：用 n 个开关可以构造出多少种不同的开关线路？

首先必须对此问题建立一个数学模型，然后用适当的数学工具来解决它。

我们用 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表 n 个开关，每一个变量 x_i 的取值只能是 0 或 1，代表开关的两个状态。开关线路的状态也用一个变量 f 来表示，f 的取值也是 0 或 1，代表开关线路的两个状态。f 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数，称 f 为开关函数，记作

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)。$$

令 $A=\{0,1\}$，则 f 是 $\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n个}$ 到 A 的一个映射（函数），反

之，每一个函数

$$f: A \times A \times \cdots \times A \to A$$

对应一个开关线路。因此，开关线路的数目就是开关函数的数目。下面来计算这个数目。

由于 f 的定义域的点数为 $|A|^n = 2^n$，f 在定义域的每一个点上的取值有两种可能，所以全部开关函数的数目为 2^{2^n}，这也就是 n 个开关的开关线路的数目。

但是上面考虑的开关线路中的开关是有标号的，有一些开关线路结构完全相同，只是标号不同，我们称这些开关线路本质上是相同的。参见图 2.8 中的(a)与(b)。要进一步解决本质上不同的开关线路的数目问题，必须用群论方法。

6. 数字通信的可靠性问题

现代通信中用数字代表信息，用电子设备进行发送、传递和接收，并用计算机加以处理。由于信息量大，在通信过程中难免出现错误。为了减少错误，除了改进设备外，还可以从信息的表示方法上想办法。用数字表示信息的方法称为编码。编码学就是一门研究高效编码方法的学科。下面用两个简单的例子来说明检错码与纠错码的概念。

例 6 简单检错码—奇偶性检错码。

设用 6 位二进制码来表示 26 个英文字母，其中前 5 位顺序表示字母，第 6 位作检错用，当前 5 位的数码中 1 的个数为奇数时，第 6 位取 1，否则第 6 位是 0。这样编出的码中 1 的个数始终是偶数个。例如，

A:000011　　B:000101　　C:000110

D:001001　　……

用这种码传递信息时可检查错误。当接收一方收到的码中含有奇数个 1 时，则可断定该信息是错的，可要求发送者重发。因而，同样

的设备，用这种编码方法可提高通信的准确度。

但是，人们并不满足仅仅发现错误，能否不通过重发的办法，仅从信息本身来纠正其错误呢？这在一定的程度上也可用编码方法解决。

例 7 简单纠错码——重复码

设用 3 位二进制重复码表示 A，B 两个字母如下：

A：000　　B：111

则接收的一方对收到的信息码不管其中是否有错，均可译码如下：

接收信息：000 001 010 011 100 101 110 111

译　　码：A　A　A　B　A　B　B　B

这就意味着，对其中的错误信息作了纠正。

利用近世代数方法可得到更高效的检错码与纠错码。

7. 几何作图问题

古代数学家们曾提出一个有趣的作图问题：用圆规和直尺可作出哪些图形？而且规定所用的直尺不能有刻度和不能在其上作记号。为什么会提出这样的问题呢？一方面是由于生产发展的需要，圆规、直尺是丈量土地的基本工具，且最初的直尺是无刻度的；另一方面，从几何学观点看，古人认为直线与圆弧是构成一切平面图形的要素。据说，古人还认为只有使用圆规与直尺作图才能确保其严密性。且整个平面几何学是以圆规与直尺作为基本工具。

历史上，有几个几何作图问题曾经困扰人们很长时间，它们是：

(1) **二倍立方体问题**　作一个立方体使其体积为一已知立方体体积的两倍。

(2) **三等分任意角问题**　给定任意一个角，将其三等分。

(3) **圆化方问题**　给定一个圆(即已知其半径 r)，作一个正方形使其面积等于已知圆的面积。