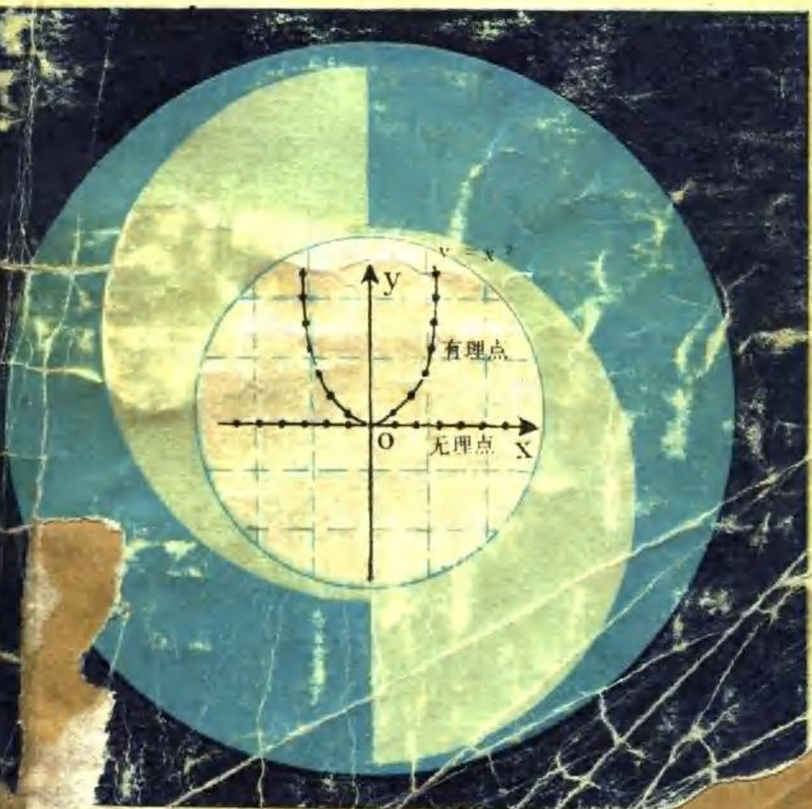
数学分析选讲

宝

广西人民出版社



XUE FEN XI

数学分析选讲

方初宝

广西人民出版社

序

20世纪以来，以泛函分析、随机过程等新学科为代表的现代分析数学有了十分迅猛的发展。然而经典分析仍是许多数学研究的基础和出发点，以牛顿—莱布尼兹肇始的微积分，仍是大学数学基础课程的支柱。从事分析数学教学的人员，是整个数学大军中最庞大的一支队伍。

我国研习微积分已有一百多年的历史了，但大规模地普及工作应该说在解放后才得以实现。30多年来，我国的分析教学研究理论完整，叙述严谨，注意应用，逐渐有了自己的教学体系。尽管可能有不够活泼和过于庞杂的毛病，应该说主流是好的。眼下，分析教学又处于兴旺时期，各种教材、参考书以至题解等出版物大量涌现，研究分析课程改革的会议也开了多次，并有许多论文发表。在这百花盛开的分析教学园地里，我觉得类似于文学中“考据与注释”那样的品种似乎还不曾见过。应该说，数学分析课程中的基本内容虽已千锤百炼，十分完整，但并非毫无引伸的余地。有些问题看来平常，却并不是每个教师都弄得一清二楚了的。对这些问题作些注释性的介绍和剖析，仍不失为一项有益的工作。

现在，方初宝先生的《数学分析选讲》一书出版了，我觉得填补了这方面的空白。这本书的篇幅不大，内涵却不小，提出的问题似乎司空见惯，人所共知，但仔细想来，又

觉得并不简单，其中还颇有一番道理，耐人寻味。如果我们把重要的教科书和著作比作通行大道，那么在大道旁边还有许多小径可走。“曲径通幽”，有些羊肠小道的尽头，也会别有洞天，使人赏心悦目。《选讲》也许可以看成广袤的分析领域中的几处小景罢！

值得一提的是，《选讲》中的许多材料目前较难找到，有些来自早年的许多文献，有些散见各处，有些则是作者自己的见解。作者不是剪刀加浆糊式地“编”，而是融汇贯通地“写”，应该说是化了一番心血的。

数学分析作为人类文化中的一宗宝贵财富，将会代代相传，永不泯灭。各种分析方面的出版物，也必然绵绵不断，越编越好。我们希望有更多的各种风格、各种题材的新作问世，以迎接中国数学的春天，推动中国数学的起飞。

程其襄

1984年12月于华东师大

目　录

第一讲　关于实数连续性等价命题的几点注记

实数理论是数学分析理论的基础，若没有这一基础，分析中的许多定理就无法建立．但是数学分析的教科书，往往不能从严密的实数理论开始进行系统论述，只能把实数理论当作已知知识加以引用．对数学分析理论起着特别重要作用的实数连续性，也是以某种形式的命题提出而加以直接引用．例如承认单调有界数列必有极限、确界存在原理、闭区间套原理等命题中的某一个，数学分析理论就可以顺利展开．这样，就产生了“实数连续性”的等价命题的问题．

有些文章罗列出许多命题并就它们的等价性加以证明，这对深刻理解分析的理论基础，了解为什么不同版本的教科书可以从不同的命题出发而导致相同的结论是有好处的．但是论证时存在着一些问题，处理得不好，可能产生错误的结论．例如若无条件地认为完备性（柯西（Cauchy）序列必有极限）或闭区间套原理，与确界存在原理是等价的，这就有问题了．为了正确理解和应用实数连续性等价命题，下面作几点注记．

一、有序域是实数连续性等价命题论证的共同基础

我们说两个命题A与B等价，是指从承认命题A成立出

发，通过正确的逻辑推理，能证明B亦成立，反之亦然。必须注意的是，在推理过程中，往往有个作为推理依据的共同基础，即有哪些命题能够算作是已经成立而可以引用的。这一基础必须确定，否则，将会导致混乱。如若笼统地去证明确界存在原理、闭区间套原理和完备性是等价的，而不搞清楚作为推理依据的共同基础是什么，则它们的等价性是无法明确判断的。就实数连续性的等价命题而言，这个共同基础是什么呢？让我们先从实数的公理化定义入手。为此，介绍定义如下：

定义1（域） 设R是一个集合。如果在R中的元素之间规定了两种代数运算：加法和乘法（记为“+”和“·”），并满足下面公理，则称R为域。

（一）加法公理

（1）如果$x\in R$，$y\in R\Rightarrow x+y\in R$；（加法封闭）

（2）$x+y=y+x$；（交换律）

（3）$(x+y)+z=x+(y+z)$；（结合律）

（4）存在零元$0\in R$，对任意$x\in R\Rightarrow x+0=x$；

（5）对任意$x\in R$，存在$-x\in R$，使$x+(-x)=0$。（存在加法逆元）

（二）乘法公理

（1）如果$x\in R$，$y\in R\Rightarrow x\cdot y\in R$；（乘法封闭）（$x\cdot y$ 可简写成xy）

（2）$xy=yx$；（交换律）

（3）$(xy)z=x(yz)$；（结合律）

（4）存在单位元$1\in R$，$1\neq 0$，对任意$x\in R\Rightarrow 1x=x$；

（5）对任意$x\in R$，$x\neq 0$，存在$\frac{1}{x}\in R$，

使 $x \cdot \frac{1}{x} = 1$。* （非零元存在乘法逆元）

（三）对任意x，y，$z \in R \Rightarrow x(y+z) = xy + xz$。

（分配律）

定义2（有序域（环）） 设R为域（环），如果存在一个称为正元素集的真子集P，使得

（1）对任意$x \in R \Rightarrow x \in P$，$x = 0$，$-x \in P$三者有且仅有一个成立；

（2）对任意x，$y \in P \Rightarrow x + y$，$xy \in P$，

则称R为有序域（环）。

在有序域中，可以规定序关系"$<$"如下：

$$x<y \iff y - x \in P.$$

容易验证，它满足序的性质：

（1）对任意$x \in R$，$y \in R \Rightarrow x<y$，$x = y$，$y<x$三者有且仅有一个成立； （三歧性）

（2）由$x<y$且$y<z \Rightarrow x<z$； （传递性）

"$x \leqslant y$"表示$x<y$或$x = y$，"$>$"和"$\geqslant$"可由"$<$"及"$\leqslant$"派生出来。

容易推出，若$x \in P$，则$x>0$；若$-x \in P$，则$x<0$。

关于有序域，首先注意到以下事实：

（1）四则运算是封闭的。减法和除法分别理解为：

$$x - y = x + (-y) \text{ 及 } \frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y} \ (y \neq 0).$$

（2）R包含"有理数域Q"作为子域，R中的元素不一定是数，但是由单位元1经过有限次四则运算所得的元素可视为R中的"有理数"，由这些"有理数"所组成的R的

* 若R仅满足除了（二）之（5）以外的所有性质，则称之为环。

子集Q是R中的子域，并且在保序同构的意义下，它和有理数有序域没有本质区别．用N表示Q中与自然数对应的子集，N中的元素称为自然数。

（3）完全类似于数学分析中的概念，可以在有序域中定义有界集合，集合的上、下确界，戴德金（Dedekind）分划，区间，绝对值，邻域，序列及其极限，单调有界序列，序列的子列，聚点等一系列概念。

定义3（实数域） 有序域R如果满足连续性公理：

（1）阿基米德（Archimedes）公理：对任意的 $\varepsilon>0$，$a>0$，存在$n\in N$，使得$n\varepsilon>a$。（以下简称阿氏公理）

（2）完备公理：对序列$\{x_n\}$，若对任意的$\varepsilon>0$，总存在 $m\in N$，当n，$l>m$时，有$|x_n-x_l|<\varepsilon$，则$\{x_n\}$在R中收敛．

则称R为实数域，称R中的元素为实数。

满足完备公理条件的序列称为基本序列或柯西序列。

下面给出实数连续性等价命题，说明在有序域的共同基础上，实数连续性公理可以有许多不同的表述形式．

定理1 [1] 设R为有序域，则在R中以下十个命题等价：

（一）阿氏公理和完备公理；

（二）有上界的非空集合必有上确界；

（三）单调增加的有界序列必有极限；

（四）设(A,B)是R的一个分划（即（1）$A\neq\varnothing$，$B\neq\varnothing$；（2）对任意的$a\in A$，$b\in B\Rightarrow a<b$；（3）$A\cup B=R$），则或A有最大数，或B有最小数，两者居且仅居其一；

（五）单调减少的有界序列必有极限； 与(三)等价的公理

（六）有下界的非空集合必有下确界（与（二）统称确界存在原理）；

（七）阿氏公理和康托（Cantor）闭区间套原理；

（八）海因—波利尔（Heine—Borel）有限复盖原理；

（九）有界无限集A必有聚点(外尔斯特拉斯(Weierstrass) 聚点原理)； 即列紧性定理

（十）有界序列必有收敛子列（外氏致密性原理）．

定理的证明留给读者．定理说明，在R为有序域的共同基础上，以上十个命题都可以作为“实数连续性”公理．作为连续性等价命题推理的共同基础就是“有序域”，即由“有序域”所能够得到的事实都可以作为推理的依据，并且也只限于这些事实，才能作为依据．

下面的命题在有序域中皆成立．[2]

命题1 由加法公理推得

（a） 若$x+y=x+z$，则$y=z$； （消去律）

（b） 若$x+y=x$，则$y=0$； （零元唯一）

（c） 若$x+y=0$，则$y=-x$； （加法逆元唯一）

（d） $-(-x)=x$．

命题2 由乘法公理推得

（a） 若$x\neq 0$，且$xy=xz$，则$y=z$； （消去律）

（b） 若$x\neq 0$，且$xy=y$，则$y=1$； （单位元唯一）

（c） 若$x\neq 0$，且$xy=1$，则$y=\frac{1}{x}$；（乘法逆元唯一）

（d） 若 $x\neq 0$，则$\dfrac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}=x$．

命题3 由域可推得

(a) $0x=0$；

(b) 若$x\neq 0$，$y\neq 0$，则$xy\neq 0$；

(c) $(-x)y=-(xy)=x(-y)$；

(d) $(-x)(-y)=xy$。

命题4 由有序域可推得

(a) 若$x>0$，则$-x<0$；若$x<0$，则$-x>0$；

(b) 若$x>0$，$y<z$，则$xy<xz$；若$x<0$，$y<z$，则$xy>xz$；

(c) 若$x\neq 0$，则$x^2>0$；$1>0$；

(d) 若$0<x<y$，则$0<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$。

命题5 由有序域推得

(a) $|xy|=|x||y|$；$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$ $(y\neq 0)$；

(b) $|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$。

由上述命题可见，平常习惯了的关于实数的等式与不等式的运算规则，在有序域R中都可以施行。

二、在有序域内，阿氏公理不一定成立.

定理1的命题（一）与（七）都含有阿氏公理，这并不是多余的。也就是说，阿氏公理不是有序域的直接推论。事实上，存在着非阿氏有序域。

例1 [3] 设$Q[x]$为有理数域Q上的一元多项式环，对于$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in Q[x]$，规定$f(x)$为$Q[x]$的正元素当

且仅当$f(x)$的首项系数$a_n>0$，则$Q[x]$为有序环，并且任何一个正的n次多项式大于任何一个$n-1$次多项式。若令$Q(x)=\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\middle| f(x),\ g(x)\in Q[x],\ g(x)\neq 0\right\}$，且在$Q(x)$中规定：

相等：$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{r(x)}{s(x)} \Longleftrightarrow f(x)s(x)=r(x)g(x)$；

加法：$\dfrac{f(x)}{g(x)}+\dfrac{r(x)}{s(x)}=\dfrac{f(x)s(x)+g(x)r(x)}{g(x)s(x)}$；

乘法：$\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot\dfrac{r(x)}{s(x)}=\dfrac{f(x)r(x)}{g(x)s(x)}$，

正元素：$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0 \Longleftrightarrow f(x)g(x)>0$，

则可以证明$Q(x)$为有序域。但是对于$\dfrac{1}{1}>0$及$\dfrac{x-1}{1}>0$，对任意自然数$\dfrac{n}{1}\in Q(x)$，$\dfrac{n}{1}\cdot\dfrac{1}{1}<\dfrac{x-1}{1}$，所以$Q(x)$不具有阿基米德性。

可见阿氏公理不是有序域的必然推论。

定理2　在有序域R内，下列三个命题等价：

（1）阿氏公理；

（2）自然数集$\{n\}=N$在R中无界；

（3）$\lim\dfrac{1}{n}=0$。

证　（1）⇒（2）。用反证法。设$N=\{n\}$有界，则存在$k\in R$使得对任意的$n\in N$，有$n\leqslant k$，即对$\varepsilon=1>0$及$a=k>0$，对任意的$n\in N$有$n\varepsilon=n\leqslant a$，这与阿氏公理矛盾。

（2）⇒（3）。任意给定$\varepsilon>0$，由N的无界性可知，必存在$n_0\in N$，使$n_0>\dfrac{1}{\varepsilon}$，所以当$n>n_0$时，更有

$n>\frac{1}{\varepsilon}$，亦即$\frac{1}{n}<\varepsilon$， 故$\lim\frac{1}{n}=0$。

（3）⇒（1）。在R中， $n\varepsilon>a \Longleftrightarrow \frac{\varepsilon}{a}>\frac{1}{n}$，

对$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{a}>0$，由（3）可知存在$n_0$，当$n>n_0$时，$\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{a}$，

故$n\varepsilon>a$。

学过数学分析的人，对定理2中的（2）与（3）所表达的事实，认为是必然成立的。殊不知，它却不是有序域R的必然推论。下面我们将看到，甚至在有序域中，它也不是完备性和区间套原理的必然推论。然而，从定理 1 可以看出，它却是确界存在原理等（定理1除（一）、（七）外）八个命题的直接推论。

三、在有序域R中，完备性与连续性并不等价．有序域一定可以完备化，但不一定具有阿氏性

为了说明在R中完备性与连续性并不等价，我们先讨论有序域扩充的问题，首先引入下面定义和引理。

定义4 R中基本序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$称为等价的，如果$\lim(a_n-b_n)=0$，记为$\{a_n\}\sim\{b_n\}$。

容易验证，关系"～"满足等价关系的三个条件：

（1）$\{a_n\}\sim\{a_n\}$； （反身性）

（2）若$\{a_n\}\sim\{b_n\}$，则$\{b_n\}\sim\{a_n\}$； （对称性）

（3）若$\{a_n\}\sim\{b_n\}$，$\{b_n\}\sim\{c_n\}$，则$\{a_n\}\sim\{c_n\}$。 （传递性）

这样，我们可以把R中的所有基本序列按等价关系分成互不相交的等价类，即若$\{a_n\}\sim\{a_n'\}$，则$\{a_n\}$与$\{a_n'\}$归入

同一类。在同一等价类中选一个作为代表，例如$\{a_n\}$所在的类为α，α以$\{a_n\}$为代表，记作$\alpha=[\{a_n\}]$，在不产生混淆的情况下，也简记为$\alpha=[a_n]$。设$\alpha=[a_n]$与$\beta=[b_n]$为两个等价类，显然$\alpha=\beta \Longleftrightarrow \{a_n\}\sim\{b_n\}$。记以全体等价类为元素所构成的集合为$\Omega$，即

$$\Omega=\{\alpha=[a_n] \mid \{a_n\}\text{为R的基本序列}\}。$$

关于基本序列，还有以下性质：

引理 1　设$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{a_n'\}$、$\{b_n'\}$为基本序列，$\{a_n\}\sim\{a_n'\}$，$\{b_n\}\sim\{b_n'\}$，则

（1）$\{a_n+b_n\}$及$\{a_nb_n\}$亦为基本序列；

（2）$\{a_n+b_n\}\sim\{a_n'+b_n'\}$，$\{a_nb_n\}\sim\{a_n'b_n'\}$。

证　由不等式$|(a_n+b_n)-(a_m+b_m)|\leqslant|a_n-a_m|+|b_n-b_m|$及$|a_nb_n-a_mb_m|=|(a_nb_n-a_nb_m)+(a_nb_m-a_mb_m)|\leqslant|a_n||b_n-b_m|+|b_m||a_n-a_m|$和基本序列有界性，马上可得（1）的结论。

（2）的证明与（1）类似，从略。　　　　**[证毕]**

定义 5　$\{a_n\}$为R中的基本序列，如果存在$\varepsilon>0$及n_0，当$n>n_0$时，$a_n>\varepsilon$，则称$\{a_n\}$为正的。

引理 2　（1）设$\{a_n\}$为R中的基本序列，则（i）$\{a_n\}$为正，（ii）$\{-a_n\}$为正，（iii）$\lim a_n=0$三者必居且仅居其一；

（2）若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$为正，则$\{a_n+b_n\}$与$\{a_nb_n\}$为正；

（3）若$\{a_n\}$为正，$\{a_n\}\sim\{b_n\}$，则$\{b_n\}$亦为正。

证　（1）三者仅居其一是显然的，下面证明必居其一。

假设$\lim a_n = 0$不成立（若成立，则得证），则必存在$\varepsilon_0 > 0$和子列a_{n_i}使$|a_{n_i}| > \varepsilon_0$。由于$\{a_n\}$为基本序列，故$\{a_{n_i}\}$除了有限个元素外，或几乎全部的$a_{n_i} > \varepsilon_0$，或几乎全部的$a_{n_i} < -\varepsilon_0$。若属前者，又由于$\{a_n\}$为基本序列，故对$\frac{\varepsilon_0}{2} > 0$，存在m，当$l$，$n > m_n$时，有$|a - a_l| < \frac{\varepsilon_0}{2}$，即$a_l - \frac{\varepsilon_0}{2} < a_n < a_l + \frac{\varepsilon_0}{2}$。由于$a_{n_i}$的假定，必有$n_i > m$，故可取$n_i = l > m$。所以当$n > m$时，$a_n > a_l - \frac{\varepsilon_0}{2} = a_{n_i} - \frac{\varepsilon_0}{2} > \frac{\varepsilon_0}{2}$，从而$\{a_n\}$为正。若属后者，同理可证$\{-a_n\}$为正。故三者必居其一。

（2）显然，证明从略。

（3）由不等式$b_n = a_n - (a_n - b_n) \geqslant a_n - |a_n - b_n|$，$\{a_n\}$为正及$\lim|a_n - b_n| = 0$可得。 [证毕]

在基本列的等价类的集Ω中，我们定义加法、乘法，与正元素如下：

加法：$[a_n] + [b_n] = [a_n + b_n]$；

乘法：$[a_n][b_n] = [a_n b_n]$；

正元素：如果基本序列$\{a_n\}$为正，则$[a_n]$为正。

由引理1、2知道，这样的定义是合理的，并且可以验证，Ω构成有序域。根据有序域中绝对值的定义，可以验证$|\alpha| = |[a_n]| = [|a_n|]$。

由常元数列$a_n = a(a \in R)$为代表的等价类$[\{a\}]$记为$\bar{a}$，即$\bar{a} = [\{a\}]$。令$\Omega_1 = \{\bar{a} | a \in R\}$，则$\Omega_1 \subset \Omega$，且R到$\Omega_1$的一一对应$\varphi$：$R \leftrightarrow \Omega_1$，$\varphi(a) = \bar{a}$，是R与$\Omega_1$之间的保序同

构对应，因而Ω是R的有序扩域，并且R在Ω中保序。

为了进一步证明Ω是完备的，先证

引理3 若$\alpha=[a_n]$，则$\lim\bar{a}_n=\alpha$。

证 因为$\bar{a}_n-\alpha=[\{a_n-a_1,\ a_n-a_2,\ \cdots\}]$，

和 $$|\bar{a}_n-\alpha|=[\{|a_n-a_1|,\ |a_n-a_2|,\ \cdots\}]。$$

对任意给定的$\varepsilon=[\varepsilon_n]>0$，由$\varepsilon$为正的定义，必存在$\delta>0$（$\delta\in R$）及m，当$n>m$时，有$\varepsilon_n>\delta$，从而$\varepsilon_n-\frac{\delta}{2}>\frac{\delta}{2}>0$，所以$\overline{\left(\frac{\delta}{2}\right)}=\bar{\delta}_1<\varepsilon$。

对$\delta_1>0$，因为$\{a_n\}$为基本序列，故存在m_2，当$n,l>m_2$时，有$|a_n-a_l|<\frac{\delta_1}{2}$.由此可知

$$\delta_1-|a_n-a_l|>\frac{\delta_1}{2}$$

固定n，对任意的$l>m_2$，上式表示

$$\bar{\delta}_1-|\bar{a}_n-\alpha|>0,$$

即 $$|\bar{a}_n-\alpha|<\bar{\delta}_1<\varepsilon \qquad (n>m_2)$$

所以 $\lim\bar{a}_n=\alpha$。 **[证毕]**

利用引理3，可以证明Ω是完备的。

设$\{\alpha_n\}$为Ω中的基本序列，要么它含有无穷多个相同的元素，这时$\{\alpha_n\}$显然收敛；要么只有有限个相同而有无穷多个相异的元素，这时，不妨设对任意的n，$\alpha_n\neq\alpha_{n+1}$，令$\varepsilon_n=|\alpha_n-\alpha_{n+1}|$，则$\varepsilon_n>0$且$\varepsilon_n\to0$。

又设$\alpha_n=\left[a_p^{(n)}\right]\left(\left\{a_p^{(n)}\,\middle|\,p=1,\ 2,\ \cdots\right\}\right.$为R中的

基本序列），由引理3，$\lim\limits_{p\to x}\overline{a_p^{(n)}}=\alpha_n$。故对$\varepsilon_n>0$，存在$\overline{a}^{(n)}_{p(n)}$（简记为$\overline{a_n}$）使得

$$\left|\overline{a_n}-\alpha_n\right|<\varepsilon_n \tag{1}$$

因为$\{\alpha_n\}$为基本序列，所以对任给的$\varepsilon>0$，存在m_1，当n，$l>m_1$时，有

$$|\alpha_n-\alpha_l|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

由于$\varepsilon_n\to 0$，所以对$\frac{\varepsilon}{3}>0$，存在m_2，当$n>m_2$时，有

$$\varepsilon_n<\frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

故当$n,l>m_3=\max\{m_1,m_2\}$时，由（1）、（2）、（3）式有

$$\begin{aligned}|\overline{a}_n-\overline{a}_l|&\leqslant|\overline{a}_n-\alpha_n|+|\alpha_n-\alpha_l|+|\alpha_l-\overline{a}_l|\\&\leqslant\varepsilon_n+\frac{\varepsilon}{3}+\varepsilon_l<\varepsilon\end{aligned}$$

可见，$\{\overline{a}_n\}$为Ω中的基本序列。

记$\alpha=[a_n]$，由引理3，$\overline{a_n}\to\alpha$，再利用不等式

$$|\alpha_n-\alpha|\leqslant|\alpha_n-\overline{a_n}|+|\overline{a_n}-\alpha|$$

并注意到（1）及（3）式，马上可得$\alpha_n\to\alpha$。所以基本序列$\{\alpha_n\}$收敛。

综合以上讨论，我们得

定理3　任一有序域R都有一个满足完备公理的有序扩域Ω存在，而且R在Ω中保序。

（顺便指出，如果R是有理数有序域，则用上述方法得