地球物理中的复变函数

徐世浙 著

科学出版社

地球物理中的复变函数

徐世浙 著

科学出版社
1993

（京）新登字092号

内 容 简 介

本书介绍了复变函数的基本原理，其中包括复变函数的导数、积分、幂级数展开、留数定理及保角变换，并介绍复变函数在地球物理中的各种应用，如在位场延拓、变换、化极、重磁资料的傅里叶变换中的应用．本书特别介绍了保角变换在地球物理中的应用。

本书的读者对象是地球物理专业的大学生、研究生和科技人员．

地球物理中的复变函数

徐世[illegible] 著

责任编辑 [illegible]斌

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：007[illegible]7

上海译成印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1993年5月第一版　　开本：850×1168 1/32
1993年6月第一次印刷　　印张：7
印数：0001—1,000　　字数：180 000

ISBN 7—03—003614—X/P·686

定价：6.90元

前　言

复变函数在地球物理中有广泛的应用. 例如，二维位场的化直、向上延拓、变换、化极在复变函数中是同一性质的问题，可用复变函数的柯西积分公式给出完美的解答；磁场、重力场、电流场的共轭复场强是解析函数，用复变函数的方法推导某些二维模型的共轭复场强，具有运算简单、解答简洁的显著优点；重磁资料的傅里叶变换是广义积分，应用复变函数中的留数定理可大大简化广义积分的计算过程；特别是复变函数的保角变换法，它可以解决其他数学物理方法难以解决的二维位场问题. 例如，起伏地形上的位场延拓、直流电法的地形改正、复杂形体对电流场的畸变等.

数学中有许多介绍复变函数的书，但尚未见到紧密结合地球物理实际的复变函数的书. 作者在科研实践中，将复变函数应用于地球物理的许多方面. 本书将这方面的研究成果系统整理，并结合复变函数的基本理论著述而成，其中复变函数的基本理论和在地球物理中的应用各占一半左右. 作者希望本书的出版将为地球物理专业的大学生、研究生和科技人员提供学习复变函数的有益的参考书.

由于作者水平限制，缺点和错误在所难免，恳请大家批评指正.

作者

1992 年 10 月　于青岛

目　录

第一章　复　变　函　数

§1.1　复数及其代数运算

1. 复数及其表示法

复数的一般形式是

$$z = x + iy,$$

式中，x、y 是实数，$i = \sqrt{-1}$ 称为虚单位. 当 $y = 0$ 时，复数 z 变成实数；当 $x = 0$ 时，$z = iy$ 叫作纯虚数. 通常把 x、y 叫做复数的实部和虚部，记作：

$$x = \mathrm{Re}\, z, \qquad y = \mathrm{Im}\, z .$$

复数可以用平面上的点来表示. 在直角坐标系中，以横坐标为 x，纵坐标为 y 的点表示复数 $z = x + iy$. 图 1.1 中 ox 叫实轴，oy 叫虚轴. 例如 $z = -2 + i$ 用点 $(-2,1)$ 表示；复数 $z = 0$ 用原点表示；实数用 x 轴上的点表示；纯虚数用 y 轴上的点表示. 这种表示复数的点的 xy 平面叫作复平面或 Z 平面.

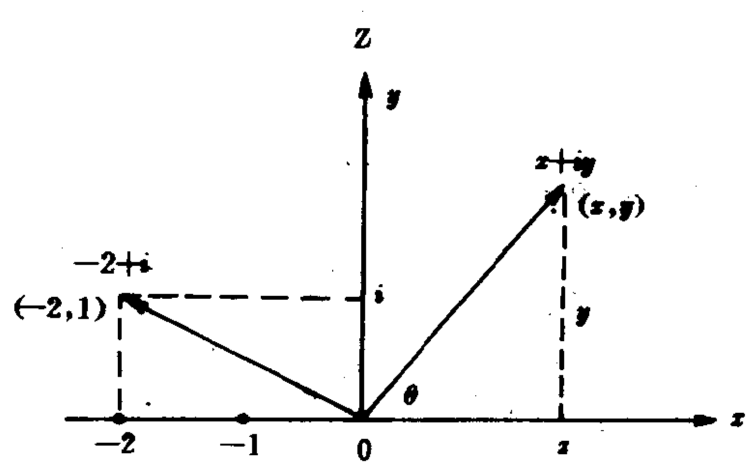

图　1.1

同时可以把复数看成从原点至点 (x,y) 的矢量，这样，我们又可以将一个复数对应一个矢量. 复数的点表示和矢量表示都是很有用的.

令 r,θ 是点 z 的极坐标(图 1.1)，则

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta .$$

于是复数可写成

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{1.1}$$

这称为复数的三角型，其中

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

称为 z 的模或绝对值，用 $|z| = r$ 表示；

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

称为 z 的幅角，用 $\operatorname{Arg} z = \theta$ 表示.

例如，复数 $2 + 2i$ 的模 $r = 2\sqrt{2}$，幅角 $\theta = \frac{\pi}{4}$. 所以

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

同理

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

任何一个复数 z 有无穷多个幅角，相差 2π 的整数倍：

$$\operatorname{Arg} z + 2k\pi,\qquad (k \text{ 为任意整数})$$

通常我们把满足 $-\pi < \theta \leqslant \pi$ 或 $0 \leqslant \theta < 2\pi$ 的 θ 称为 $\operatorname{Arg} z$ 的主值，记作

$$\theta = \arg z .$$

当 $z=0$ 时，幅角不确定.

在高等数学中，e^x 可展为马克劳林级数：

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

令 $x = i\theta$，并由 $i^2 = -1$，得

$$e^{i\theta} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right).$$

因为

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots,$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots,$$

所以有

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{1.2}$$

这就是有名的尤拉公式.用 $-\theta$ 代替 θ,得

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta.$$

与(1.2)相加或相减,得

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \tag{1.3}$$

这些把指数函数和三角函数联系起来的公式都是很重要的.

利用尤拉公式,我们可把复数的三角型写成指数型,即

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}. \tag{1.4}$$

例如

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}};$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

2. 复数的基本运算

如果复数

$$z_1 = x_1 + iy_1, \qquad z_2 = x_2 + iy_2,$$

的实部和虚部分别相等,即 $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$,我们就说 z_1 和 z_2 相等.

关于复数的运算,与普通实数完全相同,服从代数上的通常法则,只需加一条补充:$i^2 = -1$.

(1) 加法

两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ 的和由下式表示:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \tag{1.5}$$

由图 1.2 可见，z_1+z_2 可用 z_1 和 z_2 的矢量和表示(平行四边形法则)，因而有

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|.$$

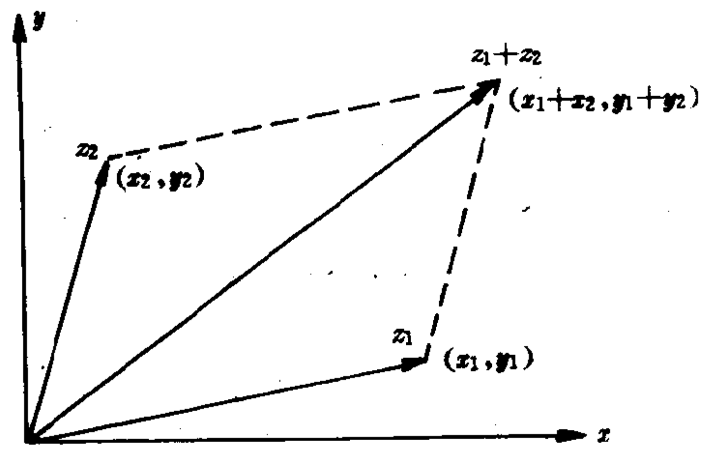

图 1.2

(2) 减法

两个复数之差由下式表示：

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i\,(y_1-y_2).$$

由图 1.3 可见，z_1-z_2 可用 z_2 到 z_1 的矢量表示，因而有

$$|z_1-z_2| \geqslant \big||z_1|-|z_2|\big|.$$

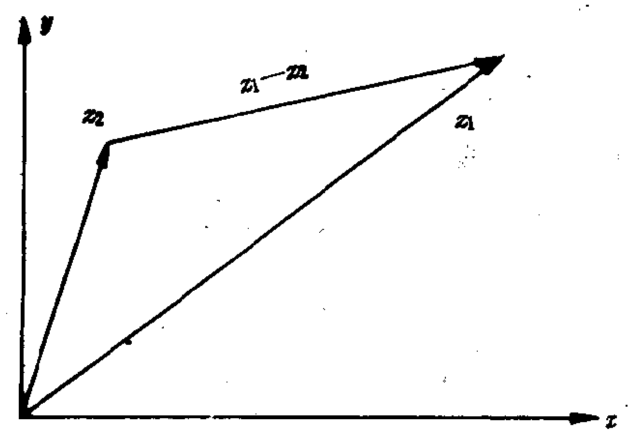

图 1.3

(3)乘法

两个复数之积由下式表示：

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= (x_1+i\,y_1)\cdot(x_2+i\,y_2) \\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+i\,(x_1y_2+x_2y_1). \end{aligned}$$

即按通常乘法展开，并令 $i^2=-1$ 即可．如果用指数型表示：

$$z_1=r_1e^{i\theta_1},\quad z_2=r_2e^{i\theta_2}.$$

则其积为

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\,e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

可见复数相乘有清晰的几何意义，即它的模为两个复数模的乘积．它的幅角为两复数幅角之和．或者将 $z_1\cdot z_2$ 理解为矢量 z_1 旋转一个角度 $\arg z_2$．并伸长（或缩短）$|z_2|$ 倍（图 1.4）．

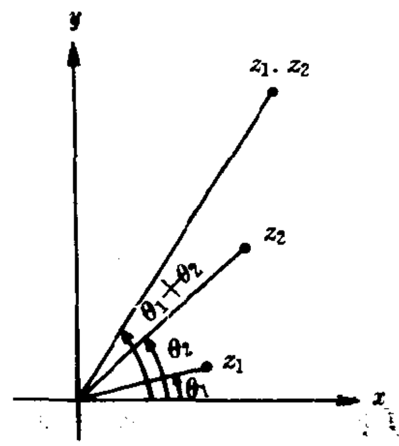

图 1.4

上面的结果用式表示，即

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|. \tag{1.6}$$

$$\arg(z_1\cdot z_2)=\arg z_1+\arg z_2. \tag{1.7}$$

对于几个复数相乘，有

$$z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_n\,e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}.$$

其中 $r_1,r_2,\cdots,r_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ 分别表示 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 的模和幅角．当 $z_1=z_2=\cdots=z_n=z$ 时，我们得到乘方的公式

$$z^n=r^ne^{in\theta}. \tag{1.8}$$

特别当 $|z|=1$，即 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ 时，有

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta,$$

这就是棣莫佛公式．

（4）除法

两个复数相除，当 $z_2\neq0$ 时，由下式表示：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

上式可用 x_2-iy_2 同乘分子、分母得到．用指数型表示除法则有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}. \tag{1.9}$$

由此可见，两个复数之商，它的模等于两复数模相除，它的幅角

等于两复数幅角相减，即

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2.$$

当 $z_1 = 1 = e^{i0}$ 时，有

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta},$$

而

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n}e^{-in\theta}. \qquad (1.10)$$

(5) 开方

复数 $z^{1/n}$ 表示 n 次方根，它表示某一复数 w，其 n 次幂为 z，即

$$w = z^{1/n}, \qquad \text{或} \qquad w^n = z\,.$$

设 $z = re^{i\theta}$，$w = \rho e^{i\varphi}$，代入上式，有

$$\rho^n e^{in\varphi} = r\, e^{i\theta}.$$

因为复数的幅角可以加减 2π 的整数倍，所以

$$\rho^n e^{in\varphi} = r\, e^{i(\theta+2k\pi)}. \qquad (k \text{ 为 任意整数})$$

于是

$$\rho^n = r, \qquad n\varphi = \theta + 2k\pi\,.$$

或

$$\rho = r^{1/n}, \qquad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}\,.$$

所以

$$w = z^{1/n} = r^{1/n}\, e^{i(\theta+2k\pi)/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right).$$

当 $k = 0, 1, \cdots, n-1$ 时，由上式得到 z 的 n 个不同的根. 在几何上，$z^{1/n}$ 的 n 个值就是以原点为中心，$r^{1/n}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点. 例如，因为

$$1 = \cos 0 + i\sin 0\,.$$

所以

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}, \quad (k = 0,1,2)$$

$$= \begin{cases} \cos 0 + i\sin 0 = 1; \\ \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

将乘幂和方根两个式子结合起来，则得

$$z^{m/n} = r^{m/n} e^{i\, m/n\, \theta}. \tag{1.11}$$

除了上述一些运算外，尚有所谓共轭复数的概念. 如果两个数，其实部相等，而虚部仅符号相异，如 $x + iy$ 与 $x - iy$，则它们互为共轭复数，用

$$z = x + iy, \qquad \bar{z} = x - iy$$

表示它们. 在图形上，它们对称于实轴，也可写成如下的指数型

$$z = re^{i\theta}, \qquad \bar{z} = re^{-i\theta}.$$

共轭复数有如下性质：

$$\left.\begin{aligned} &(1)\ \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2; \\ &(2)\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2; \\ &(3)\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}; \\ &(4)\ \bar{\bar{z}} = z; \\ &(5)\ z \cdot \bar{z} = |z|^2. \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

§.1.2 复变函数

与实数相似，复数也可分为常数和变数. 如果对于复变数 z 的每一个值，都能按照某个规律有复变数 w 与它对应，我们就说 w 是复数 z 的一个复变函数，用

$$w = f(z)$$

表示. 例如,

多项式 $w = a_n z_n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$,

指数函数 $w = e^z$,

对数函数 $w = \ln z$,

双曲正弦 $w = \operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$,

三角正弦 $w = \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

等都是复变函数的例子.

令 $z = x + i\,y$, $w = u + i\,v$, 这里 x, y, u 和 v 都是实变数. 如果 w 是 z 的函数,则

$$u + i\,v = f(x + i\,y).$$

每对实变数 u 与 v 都是由一对实变数 x 与 y 来决定的. 所以 w 与 z 之间的关系 $w = f(z)$ 相当于两个二元实变函数.

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y).$$

例如 $w = z^2$,则 $u + i\,v = x^2 - y^2 + i\,2xy$,于是 $w = z^2$ 对应于两个二元实函数

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy.$$

就复变函数的几何意义而言,可作如下表示. 即用两个平面,一个是 Z 平面(即 xy 平面),一个是 W 平面(即 uv 平面),表示它们的关系. 在 $w = f(z)$ 中给 z 以定值 z_0,就可得出 $w_0 = f(z_0)$ 的值. 分别在 W 和 Z 平面上画出 w_0 与 z_0,我们说函数 $w = f(z)$ 将 Z 平面上的点 z_0 变换(或映射)为 W 平面上的 w_0 点,同时称 w_0 是 z_0 的像,而 z_0 是 w_0 的原像(图 1.5). 当 z 沿某一条曲线 s 在 Z 平面上 移动时,由 $f(z)$ 定义的 w 也相应地沿 W 平面上某一条曲线 t 移动,于是我们说, $w = f(z)$ 把 Z 平面的曲线 s 变换成 W 平面上的曲线 t, t 也称为 s 的像. 一般来说,如果曲线 s 围成某一区域 F,则曲线 t 通常也相应地围成一区域 G,于是我们说 $w = f(z)$ 把 Z 平面上的区域 F 变换成 W 平面上的区域 G,称 G 为 F 的像.

例如 $w = z + 1$,将 Z 平面上的点 i 变换成 W 平面上的点 $1 + i$,把 Z 平面上以原点为圆心的单位圆变换成 W 平面上以 $u =$

$1, v = 0$ 为圆心的单位圆(图 1.5). 又如,函数 $w = z^2 = r^2 e^{i2\theta}$ 将

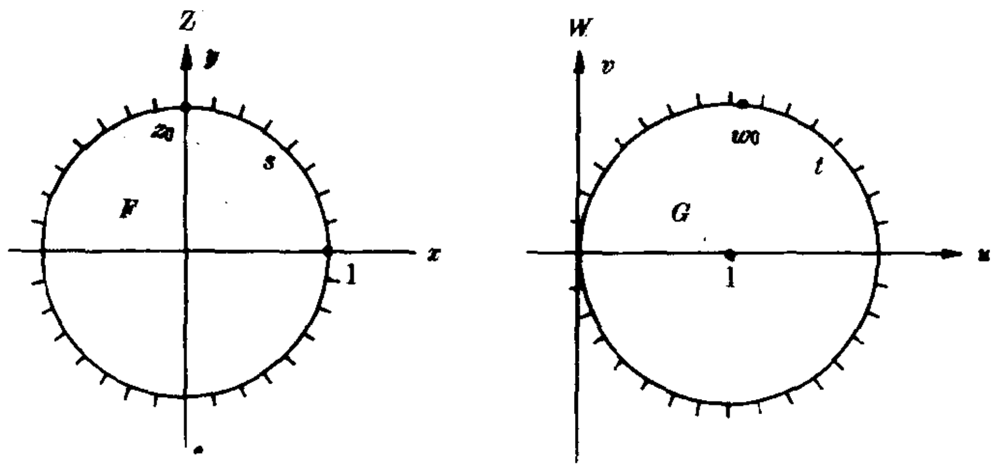

图 1.5

z 的幅角放大一倍,因此,Z 平面上与实轴交角为 α 的角形域被变换成 w 平面上与实轴交角为 2α 的角形域,如图 1.6 所示.

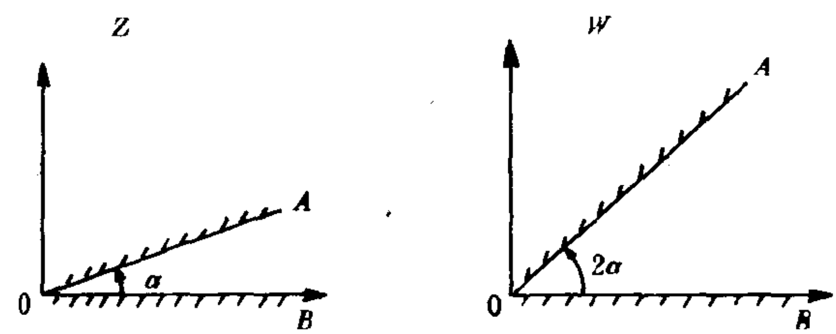

图 1.6

和实变函数一样,复变函数也有多值函数,例如对于同一个 z:

$$z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2k\pi)}, \ (k \text{ 为任意整数})$$

函数 $w = z^{1/n}$ 有 n 个值

$$w = r^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}. \qquad (k = 0,1,2,\cdots,n-1)$$

这类复变函数叫作多值函数. 如果我们限定 z 的幅角只能取 $0 \leqslant \theta < 2\pi$,于是多值函数 w 只能取一个值,它就变为单值函数. 如果我们遇到多值函数,通常要将它变为单值的.

复变函数中也有反函数的概念. 假定函数 $w = f(z)$ 将 Z 平面上的区域 F(或点、线) 变换成 W 平面上的区域 G(或点、线).

那么我们也可以反过来看，存在着这样的函数 $z = g(w)$，它将 W 平面上的 G 变换成 Z 平面上的 F. 将 $z = g(w)$ 中的 w、z 互换位置，称 $w = g(z)$ 为 $w = f(z)$ 的反函数.

例如，$w = z^2$ 的反函数是 $w = z^{1/2}$；$w = e^z$ 的反函数是 $w = \ln z$.

§1.3 复变函数的极限和连续

1. 极限

在实变函数中，极限的定义是：当 x 趋向 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋向一确定的值 a（实数），则称 a 为 $f(x)$ 当 x 趋向 x_0 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a .$$

与实变函数类似，复变函数的极限定义是：当 z 趋向 z_0 时，函数 $f(z)$ 趋向一确定的值 w_0（复数），则称 w_0 为 $f(z)$ 当 z 趋向 z_0 时的极限，记作

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0. \tag{1.13}$$

但是应当注意，在实变函数中，$x \to x_0$ 只能在 x 轴上进行，但在复变函数中，z 是平面上的点，$z \to z_0$ 的方向是任意的.

令 $z - z_0 = \Delta z$，则 $z \to z_0$ 意味着 $\Delta z \to 0$. (1.13)可改写为

$$\lim_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = w_0. \tag{1.14}$$

将复变函数 $f(z)$，z_0，w_0 写成实部和虚部：$f(z) = f(x + i\,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$，$z_0 = x_0 + i\,y_0$，$w_0 = u_0 + i\,v_0$，(1.13)可写成

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} [u(x,y) + i\,v(x,y)] = u_0 + i\,v_0.$$

于是

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0.$$

这就是说，复变函数的极限归结为一对二元实变函数的极限. 因此，实变函数中的许多定理、公式，可直接移用到复变函数中. 例如，若

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0,\quad \lim_{z\to z_0} g(z) = W_0,$$

则

$$\lim_{z\to z_0}[f(z) \pm g(z)] = w_0 \pm W_0;$$

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)] = w_0 \cdot W_0;$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_0}{W_0} \quad (W_0 \neq 0).$$

2. 连续

在复变函数中，连续的定义也与实变函数中类似. 如果函数 $f(z)$ 在点 z_0 的极限值与 z_0 的函数值相等，即

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{\Delta z\to 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0), \tag{1.15}$$

我们说函数 $f(z)$ 在 z_0 点连续. 如果函数在区域 G 上处处连续，则我们称 $f(z)$ 在区域 G 上连续.

将 $f(z)$，z_0，w_0 写成实、虚部，可得出

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u(x_0,y_0),\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v(x_0,y_0).$$

即 $f(z)$ 在 z_0 的连续归结为一对二元实变函数 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的连续. 例如，函数

$$f(z) = \bar{z} = x - iy$$

的 $u(x,y) = x$，$v(x,y) = -y$ 在全平面连续，所以 $f(z)$ 在全平面连续. 函数 $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ 也是在全平面连续；而函数 $f(z) = \ln(x^2 + y^2) + ixy$ 在点 $z = 0$ 不连续；因为 $\ln(x^2 + y^2)$ 在 $x = 0, y = 0$ 处不连续.

连续函数的和、差、积和商(分母不为零)仍为连续函数. 连续函数的复合函数也为连续函数.