函数逼近的理论与方法

徐利治　王仁宏　周蕴时　编著

上 海 科 学 技 术 出 版 社

函数逼近的理论与方法

徐利治　王仁宏　周蕴时　编著

上海科学技术出版社

函数逼近的理论与方法

徐利治　王仁宏　周蕴时　编著

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　无锡县人民印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 9.125　字数 200,000

1983 年 5 月第 1 版　1983 年 5 月第 1 次印刷

印数：1—13,600

统一书号：13119·1066　　定价：(科四) 0.86 元

序　言

函数逼近论有着悠久的历史。半个多世纪以来的不断发展，已经使它成为一个既富有深刻理论内容、又有着巨大应用价值的分析数学分支。特别，自从 1968 年国外创办逼近论杂志以来，这门数学的各种科研成果，犹如雨后春笋，美不胜收。近年来我们国内的逼近论研究工作者队伍也在日益成长发展着。

同国外的情况一样，国内办有计算数学专业的高等院校，近年来都开设了逼近论课程。本书作者们曾在吉林大学相继开设此课程达十余次。本书的基本题材内容，便是根据历年所用教材经过多次修改增订而成。

作为一本逼近论基础理论参考书或自学工具书，我们认为有必要较全面地向读者展示这门数学最基本最重要的知识内容，同时也必须尽可能帮助读者领会和掌握这门数学所独有的方法与技巧。正是采取这样的观点，所以在本书中，除了专章介绍十分有用的样条函数方法与非线性逼近方面的基础知识之外，特别还着重讲解了函数构造论等方面的古典理论成果与方法。此外，本书还介绍了一系列显式表示的逼近方法与逼近算子，因为这些方法与算子具有计算上的能行性，对希望应用逼近论工具的科技工作者说来，显然是最受欢迎的。

本书各章之末都附有难易不均的习题。这些习题仅供自学者参考练习之用。其中有一些个别难题，如果读者一时不能顺利地解出，那也不用气馁，因为那些命题原是往年人家论

文中的科研成果，作这样的习题就等于练习做科学研究。

由于我们把讲义教材发展成为书稿形式的时间过程较为仓促，再加上理论水平有限，所以书中难免会有缺点和错误，希望读者同志们批评指正。

徐利治　王仁宏　周蕴时

1980年6月于大连

目　录

第一章 插值方法

插值方法是数值分析很古老的一个分支。它有着悠久的历史。等距结点内插公式是由我国隋朝数学家刘焯(公元 544～610 年)首先提出的；而不等距结点内插公式是由唐朝数学家张遂（公元 683～727 年）提出的。这比西欧学者发表相应结果早一千多年。

插值方法在数值分析的许多分支(例如，数值积分，数值微分，微分方程数值解，曲线或曲面拟合，近似计算函数值，等等)均有应用。下面，我们仅以近似计算函数值为例来说明。

设已知某个函数关系 $y=f(x)$ 的列表函数值：

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

及 $\bar{x}\neq x_i(i=0, 1, \cdots, n)$，问应该如何估值 $\bar{y}=f(\bar{x})$。对于函数关系 $y=f(x)$，我们所知道的仅仅是上述的表列值。表列值是间接求得的，例如是由实验(观测)得来的，或者是从级数或微分方程求得的。

为了估值 $\bar{y}$，我们可以使用插值方法。插值方法的目的是寻求简单的连续函数 $\varphi(x)$，使它在 $n+1$ 个点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 处取给定值 $\varphi(x_i)=y_i=f(x_i)(i=0, 1, \cdots, n)$，而在别处希望它能近似地代表函数 $f(x)$。因为 $\varphi(x)$ 已是有解析表达式的简单函数，所以它在 $x=\bar{x}$ 处的值可以按表达式精确地计算出来。这样，我们就可以将 $\varphi(\bar{x})$ 看成 $\bar{y}=f(\bar{x})$ 的近似值了。

称给定点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为插值结点。称函数 $\varphi(x)$ 为函数 $f(x)$ 的关于结点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的插值函数。称 $y=f(x)$ 为被插函数。

严格地说，插值方法一词只用于 $\bar{x}$ 落在给定点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 之间的情形，所以也称它为内插法。如果 $\bar{x}$ 落在 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 之外，并且仍以插值函数 $\varphi(x)$ 在 $\bar{x}$ 处的值近似地代替 $f(\bar{x})$，则一般称这种近似计算函数值的方法为外推法。

在这一章，我们只研究多项式插值，亦即 $\varphi(x)$ 是 x 的多项式。这不仅仅因为多项式是最简单的函数，而且因为在许多场合函数 $f(x)$ 容易用多项式近似地表示出来。此外，用多项式作插值函数可使我们满意地解决一系列有实际应用价值的重要问题，其中特别注目的就是数值积分与数值微分的问题。

在这一章我们没有谈及三角插值法。其实，只要理解了代数多项式插值方法的实质，读者就不难自行导出关于三角多项式插值方法的一系列平行于代数多项式插值方法的理论结果。

§1. Lagrange 插值公式

设 $y=f(x)$ 是实变量 x 的单值函数。又设已知 $f(x)$ 在 $n+1$ 个不同的点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 处的值为 $y_0, y_1, \cdots, y_n$，亦即 $y_i=f(x_i)$ $(i=0, 1, \cdots, n)$。于 1795 年 Lagrange 证明了下面的定理。

定理 1 有唯一的 n 次多项式 $P_n(x)$ 满足条件：

$$P_n(x_i)=y_i \quad (i=0, 1, \cdots, n)。 \tag{1.1}$$

【证】 令 $l_i(x)(i=0, 1, \cdots, n)$ 表 n 次多项式，考虑形如

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) \tag{1.2}$$

的 n 次多项式。若 $l_i(x)$ 满足条件:

$$l_i(x_j)=\begin{cases}0, & j\neq i,\\ 1, & j=i,\end{cases} \tag{1.3}$$

则由(1.2)式确定的 n 次多项式满足条件(1.1)。因此，问题归结为构造满足条件(1.3)的 n 次多项式 $l_i(x)$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$。

依条件(1.3)，$l_i(x)$应有 n 个零点 $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_n$。因为 $l_i(x)$ 是 n 次多项式,所以必有

$$l_i(x)=A_i(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n),$$

其中 A_i 是一常数。此常数可以依条件 $l_i(x_i)=1$ 确定:

$$A_i=1/(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)。$$

从而,

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}。$$

引进记号 $\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$，则

$$l_i(x)=\frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}, \tag{1.4}$$

其中 $\omega'(x_i)=\left[\frac{d\omega}{dx}\right]_{x=x_i}$。

综上所述,当 n 次多项式 $l_i(x)$ 由(1.4)式确定时，n 次多项式(1.2)满足条件(1.1)。现在我们证明，这样的多项式是唯一的。换言之,若还有一 m 次多项式 $\widetilde{P}_m(x)$ $(m\leqslant n)$满足条件(1.1),则必有 $\widetilde{P}_m(x)\equiv P_n(x)$。考虑差函数

$$R_n(x)=P_n(x)-\widetilde{P}_m(x)。$$

显然 $R_n(x)$ 是次数不超过 n 的多项式，并且由于 $P_n(x)$ 与 $\widetilde{P}_m(x)$ 都满足条件(1.1),故有

$$R_n(x_i)=0 \quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)。$$

依代数学基本定理可知 $R_n(x)\equiv0$，从而 $P_n(x)\equiv\widetilde{P}_m(x)$。证

毕。

通常称条件(1.1)为插值条件；称 $l_i(x)$ $(i=0, 1, \cdots, n)$ 为 Lagrange 因子；称多项式(1.2)为 Lagrange 插值多项式。定理 1 也可以描述性地叙述为，有且仅有一个 n 次多项式 $P_n(x)$ 与已知函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个不同点上取相同的数值。定理 1 的几何意义是，有且仅有一条 n 次的代数曲线通过平面上预先给定的 $n+1$ 个点 (x_i, y_i) $(i=0, 1, \cdots, n$; 当 $i\neq j$ 时，$x_i\neq x_j)$。

Lagrange 插值公式(1.2)结构紧凑、思想清晰，所以至今在理论分析上仍有重要价值。

例 1 已知 $f(-1)=2$, $f(1)=1$, $f(2)=1$。求 $f(x)$ 的 Lagrange 插值多项式。

【解】 依(1.4)，有 $(x_0=-1,\ x_1=1,\ x_2=2)$

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)\ (x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{1}{6}(x^2-3x+2),$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)\ (x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=-\frac{1}{2}(x^2-x-2),$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)\ (x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{1}{3}(x^2-1)。$$

从而，

$$P_2(x)=\frac{1}{6}[2(x^2-3x+2)-3(x^2-x-2)+2(x^2-1)]$$
$$=\frac{1}{6}(x^2-3x+8)。$$

例 2 设 $f(x)=e^x$，则

$f(-1)=0.36787$, $f(1)=2.71828$, $f(2)=7.38906$。

依 Lagrange 插值公式有

$$e^x\approx P_2(x)=1.16519x^2+1.17520x+0.37788。$$

§2. Newton 插值公式

Lagrange 插值公式的缺点是，当插值结点的个数有所变动时（例如，为了提高精度，有时需要增加插值结点的个数），Lagrange 因子 $l_i(x)\,(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 就要随之发生变化，从而整个公式的结构也要发生变化，这在计算实践中是不方便的。为了克服它的上述缺点，在这一节中我们引进 Newton 型的插值公式。

显然，$n+1$ 个结点 $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n$ 上的 n 次 Lagrange 插值多项式也可以写成下列形式：

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})。$$

下面，我们来确定上式中的 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$。

令 $P_{n-1}(x)$ 表示 n 个结点 $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{n-1}$ 上的 $(n-1)$ 次 Lagrange 插值多项式。由于

$$P_n(x_i)=P_{n-1}(x_i)=y_i \quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1),$$

所以

$$P_n(x)-P_{n-1}(x)=c(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})。$$

此处 c 为常数，由条件 $P_n(x_n)=y_n$ 可以定出

$$c=\frac{y_n-P_{n-1}(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}。$$

又因为

$$P_{n-1}(x_n)=\sum_{i=0}^{n-1} y_i l_i(x_n),$$

故又有

$$\begin{aligned} c=&\frac{y_n}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}\\ &+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{y_i}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}\\ =&\sum_{i=0}^{n} y_i\left\{\prod_{\substack{l=0\\ l\neq i}}^{n}(x_i-x_l)\right\}^{-1}。\end{aligned}$$

取记号

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_n)=c=\sum_{i=0}^{n} y_i \left\{\prod_{\substack{l=0\\l\neq i}}^{n}(x_i-x_l)\right\}^{-1}, \quad (2.1)$$

得 $P_n(x)$ 与 $P_{n-1}(x)$ 之间的关系式:

$$P_n(x)=P_{n-1}(x) +f(x_0, x_1, \cdots, x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})。$$

同理,

$$P_{n-1}(x)=P_{n-2}(x) +f(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})。$$

继续下去,最终得到

$$P_n(x)=f(x_0)+f(x_0, x_1)(x-x_0)+\cdots +f(x_0, x_1, \cdots, x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})。\quad (2.2)$$

公式(2.2)就是 Newton 型的插值公式。系数 $f(x_0)$, $f(x_0, x_1)$, $\cdots$, $f(x_0, x_1, \cdots, x_n)$由(2.1)式确定 *)。

Newton 插值公式的系数很不好记,因此有必要另寻方法确定它们。为此,我们引进差商的概念,并指出 Newton 插值公式中各系数 $f(x_0, x_1, \cdots, x_i)$ $(i=1, \cdots, n)$ 即是 $f(x)$ 的 i 阶差商。设已知不同的自变量 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的函数值 $f(x_i)$ $(i=0, 1, \cdots, n)$,我们称

$$f(x_i, x_j)=\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j} \quad (i\neq j)$$

为 $f(x)$ 的一阶差商(或均差)。一阶差商的一阶差商

$$f(x_i, x_j, x_k)=\frac{f(x_i, x_j)-f(x_j, x_k)}{x_i-x_k} \quad (i\neq k)$$

叫做 $f(x)$ 的二阶差商。一般说来,我们称 $(n-1)$ 阶差商的一

*) 我们规定,当 $n=0$ 时, $\left\{\prod_{\substack{l=0\\l\neq i}}^{n}(x_i-x_l)\right\}=1$。

阶差商

$$f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0) = \frac{f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1) - f(x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_0)}{x_n - x_0}$$

为函数 $f(x)$ 的 n 阶差商。

差商有以下诸性质:

1. 若 $F(x)=cf(x)$, c 为常数,则

$$F(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0)=cf(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0)。$$

2. 若 $F(x)=f(x)+g(x)$, 则

$$F(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0) = f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0)+g(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0)。$$

3. 若 $f(x)=x^m$, m 为自然数,则

$$f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0)=\begin{cases} 0, & n>m, \\ 1, & n=m, \\ \text{诸 } x_i \text{ 的 } m-n \text{ 次的齐次函数}, & n<m。\end{cases}$$

4. 差商 $f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0)$ 是 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的对称函数,亦即当任意调换 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的位置时,差商的值不变。例如

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_n)=f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0) = f(x_n, x_0, \cdots, x_{n-1})。$$

5. 差商可以表示成两行列式之商

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}。$$

性质 1 和 2 是很简单的，由定义直接可以推出。现在我们证明性质 3。x^m 的一阶差商可根据定义直接计算出来：

$$f(x_1, x_0)=\frac{x_1^m-x_0^m}{x_1-x_0}=x_1^{m-1}+x_1^{m-2}x_0+\cdots+x_0^{m-1}。$$

如所见，它是 x_1, x_0 的 $m-1$ 次齐次函数。

相继作出各阶差商并依完全归纳法，可证实下列公式：

$$f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0)=\sum x_0^{r_0}x_1^{r_1}\cdots x_n^{r_n},$$

$$r_n+r_{n-1}+\cdots+r_0=m-n。$$

此处求和运算遍及所有可能的形如 $x_n^{r_n}x_{n-1}^{r_{n-1}}\cdots x_0^{r_0}$ 的 x_n, x_{n-1}, $\cdots$, x_0 的 $m-n$ 次齐次项。这样便证明了性质 3。

次之，证明性质 4。作出相继的各阶差商后，不难看出它们是由形如 $f(x_i)/\prod\limits_{\substack{l=0\\ l\neq i}}^{n}(x_i-x_l)$ 的 $(n+1)$ 个项的和表出的。由完全归纳法，易求得 $f(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 可由 (2.1) 式的右端表出。使用前面的记号 $\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$，也可将它写成

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_n)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)},$$

如此便证实了性质 4。

最后，用完全归纳法同样可以证明性质 5。证明过程中要用到 Vandermonde 行列式的概念与性质，可参考本章习题 1。

为了做数值计算，常利用形式如下的差商表：

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
x_0	$\underline{f(x_0)}$			
x_1	$f(x_1)$	$\underline{f(x_0, x_1)}$		
		$f(x_1, x_2)$	$\underline{f(x_0, x_1, x_2)}$	
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1, x_2, x_3)$	$\underline{f(x_0,x_1,x_2,x_3)}$
		$f(x_2, x_3)$		
x_3	$f(x_3)$			

由性质4得知 Newton 插值公式 (2.2) 中的系数 $f(x_0)$, $f(x_0, x_1)$, …, $f(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 恰好就是已知函数 $f(x)$ 的 0阶, 1阶, …, n 阶差商的值(在差商表中已分别用横线将它们标出)。因此,当已知 $y_i=f(x_i)$ $(i=0, 1, \cdots, n)$时,利用差商表可以很容易地算出 $f(x)$ 各阶差商的值,而不必去记忆公式(2.1)。

因为在$(n+1)$个不同的点 x_0, x_1, …, x_n 上取给定值的次数不超过 n 的多项式是唯一的,所以次数相同的 Newton 插值多项式与 Lagrange 插值多项式是恒等的, 它们的差异仅是书写形式不同而已。但是, 这种差异为计算实践带来了很大的方便。实际上,对于 Newton 插值公式来说,当需要增加一个插值结点时,只需在原插值多项式的后面再添加一个新项就可以了。

例 1 已知列表函数:

x	2	3	5	6
y	5	2	3	4

求这个函数的插值多项式。

【解】 先造好下列的差商表:

x	y	一阶差商	二阶差商	三阶差商
2	$\underline{5}$			
		$\underline{-3}$		
3	2		$\underline{\frac{7}{6}}$	
		$\frac{1}{2}$		$\underline{-\frac{1}{4}}$
5	3		$\frac{1}{6}$	
		1		
6	4			