休姆斯題解叢書

1986

矩陣
原理及題解

方世杰譯

含340個問題及解答

曉園出版社
世界圖書出版公司

休姆斯題解叢書

1986

矩陣
原理及題解

方世杰 譯

含340個問題及解答

曉園出版社
世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安

矩阵原理及题解

F. 艾尔斯　原著

方世杰　译

*

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司　重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

1993 年 11 月第　一　版　　开本：787×1245 1/20

1993 年 11 月第一次印刷　　印张：15

印数：0001－900　　字数：23.7万字

ISBN: 7－5062－1637－X/O・76

定价：11.8元（W_B9304/7）

譯　　序

矩陣的使用，最初是為了方便解決某些數學和物理上的問題。最近發展的結果，不論在工程、生物、經濟或其他社會科學等等均紛紛採用矩陣的技巧作為研究分析的工具。更由於數量方法（quantity method）的普遍，與電腦處理大量資料能力的發達，致矩陣代數更被廣泛運用。

本書取材豐富，幾乎涵蓋全部基本矩陣代數之內容。每一章節除將各種原理、理論與定義（理）先作簡略之介紹外，本書最主要之特色厥為搜集大量的範例、題解使讀者不但能夠知其然，並且得以知其所以然。此外，每一章節最後的補充題可使讀者反覆的練習並廣加應用，以收「熟能生巧」之功。因此，本書不但適宜初學者按部就班的學習，亦可供已學過的人複習之用與各界人士參考。

方　世　杰

原　　序

基本矩陣代數目前已成爲各種不同領域諸如電機工程、化學、社會學與統計學及純數學等所需數學背景不可或缺的一部分。本書提供較基本的材料，主要設計作爲現行標準教科書極有用的補充讀物，以及需要矩陣理論知識的工作者使用的參考書。此外，由於本書對於理論與原理的陳述非常完整，故亦可作爲教本。

本書共分 26 章，由於作爲參考書之使用時，其各章節邏輯的安排順序無關緊要。與大多讀者較具關係的實矩陣可以與含複數之矩陣分別處理。每一章均包含相關之定義，原理與理論的陳述，並列完整之例子解說，其後接著有一組精選的題解和相當多的補充練習。

對於初學者而言將很快發現數字練習不如想像中的困難。惟一感到困難的是經常出現的定義、定理及證明。這種困難是一個缺乏數學素養必然之現象，因爲，一般學生以前學習數學時均只著重數字問題之解答而將比較精確的原理之陳述及原理之證明拖延至稍後之課程。如果讀者能夠將每一章從導論至題解均仔細耐心的研讀，則本書可使讀者對於這些材料得到相當程度的推理訓練。

題解部分除了提供諸定理的各種範例解說外，並包含大部分定理的較長與較短證明。而補充題則包括數字練習與證明兩種型態。其中有些定理的證明只需將以前曾經證明過的稍加修改即可得證，更重要的，很多定理的證明過程往往只須幾列式子即可。有些是屬於“很容易明白”的，有些則需相當的智巧。爲了獲取相當程度的數學素養，對於基本矩陣代數的初步課程絕不可予以輕忽。本書每一章所列的問題必須由從頭至尾練習，方能獲得實際效益，尤其是前面兩章更是如此。對於這些問題精通之後，讀者將對以後的課程深具信心。

目　　錄

第二十五章　一矩陣之最小多項式　263

第二十六章　相似下之典型形式　273

第一章
矩　　陣

1.1　矩陣排列的數字

將矩形排列的數字前後加以括號，如：

$$(a)\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad 和 \quad (b)\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

並且遵循某些如下所述之運算規則，稱之爲矩陣（matrix）。上例(a)可視爲齊次線性方程組 $\begin{cases} 2x+3y+7z=0 \\ x-y+5z=0 \end{cases}$ 之係數矩陣（coefficient matrix），或是非齊次線性方程組 $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-y=5 \end{cases}$ 的擴張矩陣（augmented matrix）。稍後，我們會說明如何利用矩陣求解這些方程組。矩陣(b)可作相似之解釋，或者可視爲它的每一列僅爲一般空間裡點（1，3，1），（2，1，4）和（4，7，6）的座標。這矩陣稍後將被用來解決這些方程組的三個點是否同在一個平面或者這三個點是否同在一條經過原點的線上等問題。

在矩陣裡

$$\begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \cdots\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\, a_{m2}\, a_{m3} \cdots\cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

各數字或函數 a_{ij} 稱爲該矩陣的元素（elements），每個元素有兩個下標，第一個下標代表列的位置；第二個下標代表行的位置。因此，第二列之元素，其第一個下標均爲 2，而第五行之元素，其第二個下標則均爲 5。一個矩陣若有 m 列和 n 行，則這個矩陣之階（order）爲 $m \times n$。

（表示一個矩陣的符號，有時候用小括號（ ）表示，有時候亦可用雙平行線 ‖ ‖，但本書從頭至尾採用中括號 [ ] 表示之）。

上述(1.1)式，常表示爲“ $m\times n$ 矩陣 $[a_{ij}]$ ”或“ $m\times n$ 矩陣 $A=[a_{ij}]$ ”。若該矩陣之階已示明，則可簡寫爲“矩陣 A ”。

1.2 方 陣

若 $m=n$ ，則(1.1)式爲方形，因而被稱爲 n 階方陣(square matrix)或 n 方陣。

於一方陣中，$a_{11}, a_{22}, \cdots\cdots, a_{nn}$ 諸元素稱爲**對角元素**(diagonal elements)，方陣 A 的這些對角元素的和稱爲 A 之跡(trace)。

1.3 相等矩陣

兩矩陣 $A=[a_{ij}]$ 和 $B=[b_{ij}]$ 相等(equal)，若且唯若它們有相同的階，而且相對應的元素都相等，亦即，若且唯若

$$a_{ij}=b_{ij}, \qquad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$$

因此，兩矩陣相等，若且唯若其中一個矩陣爲另一個矩陣的複製。

1.4 零矩陣

若一個矩陣裡之每一個元素均爲零，則該矩陣稱爲**零矩陣**(zero matrix)。當 A 爲零矩陣，且無階之混淆時，則可直接寫成 $A=0$ ，而不必表示爲零元素所組成之 $m\times n$ 矩陣。

1.5 矩陣之和

如果 $A=[a_{ij}]$ 和 $B=[b_{ij}]$ 爲兩個 $m\times n$ 矩陣，它們的和(差)，$A\pm B$ ，定義爲 $m\times n$ 矩陣 $C=[c_{ij}]$ ，其中 C 中每一元素爲 A ，B 兩矩陣相對應元素之和(差)。因此，$A\pm B=[a_{ij}\pm b_{ij}]$ 。

例題1.1

若 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\end{bmatrix}$ 且 $B=\begin{bmatrix}2&3&0\\-1&2&5\end{bmatrix}$ 則

$$A+B=\begin{bmatrix}1+2&2+3&3+0\\0+(-1)&1+2&4+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&5&3\\-1&3&9\end{bmatrix}$$

並且

$$A-B=\begin{bmatrix}1-2&2-3&3-0\\0-(-1)&1-2&4-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&3\\1&-1&-1\end{bmatrix}$$

兩同階矩陣稱爲適合於(conformable)相加或相減。不同階的兩矩陣則無法相加減。例如，上述矩陣(a)和(b)爲不適合相加減。

k 個矩陣 A 之和爲矩陣 A 之每一元素乘以 k。我們定義如下：若 k 爲任一純量（k 爲純量，不同於 $[k]$，因爲 $[k]$ 爲 1×1 之矩陣）則 $kA = Ak$，其意爲該矩陣的每一元素均乘以 k。

例題 1.2

若 $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，則

$$A+A+A = \begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -6\\ 6 & 9\end{bmatrix} = 3A = A\cdot 3$$

且

$$-5A = \begin{bmatrix}-5(1) & -5(-2)\\ -5(2) & -5(3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5 & 10\\ -10 & -15\end{bmatrix}$$

應該特別注意的是，$-A$ 稱爲負(negative)的 A 矩陣，其意爲 A 矩陣中的每一元素均乘以 -1，或者是把 A 中的每一元素均變動其正負符號。對於每一個 A，可得 $A+(-A)=0$，其中 0 表示與 A 同階的零矩陣。

假設 A，B，C 爲適合相加的矩陣，則我們有：

(a) $A+B = B+A$ （交換律）

(b) $A+(B+C) = (A+B)+C$ （結合律）

(c) $k(A+B) = kA+kB = (A+B)k$ k 爲一純量。

(d) 一定存在一矩陣 D 使得 $A+D=B$。

這些定律是由數或多項式之基本代數的加法定律而得之結果，此外，它們表示：可加矩陣與這些矩陣元素均遵循相同的加法定律。

1.6 乘 法

兩矩陣 A、B 之乘積爲 AB，其中 $A=[a_{11}a_{12}\cdots\cdots a_{1m}]$ 爲 $1\times m$ 矩陣，$B=\begin{bmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ b_{31}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ b_{m1}\end{bmatrix}$

爲$m \times 1$矩陣，則$AB = C = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1m}b_{m1}]$ 爲1×1矩陣。亦即

$$[a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1m}] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{m1} \end{bmatrix} = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1m}b_{m1}] = \left[\sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{k1}\right].$$

注意：該運算是列乘以行；列中每一元素與行中相對應的元素相乘，然後把這些乘積加總。

例題 1.3

(a) $[2\ 3\ 4]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [2(1)+3(-1)+4(2)] = [7]$

(b) $[3\ -1\ 4]\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = [-6-6+12] = 0$

$m \times p$矩陣$A = [a_{ij}]$和$p \times n$矩陣$B = [b_{ij}]$之乘積AB爲$m \times n$矩陣$C = [c_{ij}]$，其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}, \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

如果我們把A矩陣視由m列所構成，而B矩陣由n行構成，則兩者乘積$C = AB$爲A的每一列與B的每一行相乘。矩陣C的元素c_{ij}爲A的第i列和B的第j行之乘積。

例題 1.4

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C_{11} & \qquad\qquad C_{12} \end{array} \\ C_{21} & \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & C_{22}\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + c_{32}b_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

只有當矩陣A之行的數目與矩陣B之列的數目相等時，乘積AB才有意義，或者說A才適合乘以B。當A適合乘以B（乘積AB有意義時），B並不一定能適合乘以A（即BA可能並不存在）。

假設A，B，C三個矩陣適合相加與相乘，則可得

(e) $A(B + C) = AB + AC$ （第一分配律）

(f) $(A+B)C = AC+BC$ （第二分配律）

(g) $A(BC) = (AB)C$ （結合律）

然而

(h) $AB \neq BA$，通常如此，

(i) $AB=0$ 不必然隱含 $A=0$ 或 $B=0$，

(j) $AB=AC$ 不必然隱含 $B=C$。

（見問題1.3～1.8）

1.7 分割乘積法

令 $A=[a_{ij}]$ 之階爲 $m\times p$ 而 $B=[b_{ij}]$ 之階爲 $p\times n$，於形成乘積 AB 時，實際上將 A 矩陣分割爲 m 個 $1\times p$ 階的矩陣，而將 B 矩陣分割爲 n 個 $p\times 1$ 階矩陣，當然另有其他之分割法。例如，令 A 和 B 用虛線分割如下列之形式：

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} (m_1\times p_1) & (m_1\times p_2) & (m_1\times p_3) \\ \hline (m_2\times p_1) & (m_2\times p_2) & (m_2\times p_3) \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} (p_1\times n_1) & (p_1\times n_2) \\ \hline (p_2\times n_1) & (p_2\times n_2) \\ \hline (p_3\times n_1) & (p_3\times n_2) \end{array}\right]$$

或者

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \\ \hline B_{31} & B_{32} \end{array}\right]$$

無論以何種方式分割，A 的行和 B 的列必須以相同的方式分割；然而 m_1，m_2，n_1，n_2 可爲任意非負之整數（包含 0 在內），並且使得 $m_1+m_2=m$ 且 $n_1+n_2=n$，則

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}+A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}+A_{13}B_{32} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}+A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}+A_{23}B_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = C$$

例題 1.5

已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 計算 AB。

將 A，B 分別分割如下

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad 與 \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

可得

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

（見問題 1.9 ）

令 A, B, C, ……均爲 n 階方陣。且將 A 分割如

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} (p_1 \times p_1) & (p_1 \times p_2) & \cdots & (p_1 \times p_s) \\ \hline (p_2 \times p_1) & (p_2 \times p_2) & \cdots & (p_2 \times p_s) \\ \hline \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \hline (p_s \times p_1) & (p_s \times p_2) & \cdots & (p_s \times p_s) \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{bmatrix}$$

並令 B，C，……均以相同之方式分割，則它們之和、差與乘積可由 A_{11}，A_{12}，……；B_{11}，B_{12}，……；C_{11}，C_{12}，……等矩陣表達之。

習題與解答

1.1 (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+(-4) & -1+1 & 0+2 \\ 4+1 & 0+5 & 2+0 & 1+3 \\ 2+2 & -5+(-2) & 1+3 & 2+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & -7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & 2+4 & -1-1 & 0-2 \\ 4-1 & 0-5 & 2-0 & 1-3 \\ 2-2 & -5+2 & 1-3 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 & -2 \\ 3 & -5 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $3\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & 0 \\ 12 & 0 & 6 & 3 \\ 6 & -15 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

(d) $-\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

1.2 若 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$ 且 $B=\begin{bmatrix}-3&-2\\1&-5\\4&3\end{bmatrix}$，求 $D=\begin{bmatrix}p&q\\r&s\\t&u\end{bmatrix}$ 使得 $A+B-D=0$

圖 若 $A+B-D=\begin{bmatrix}1-3-p & 2-2-q\\3+1-r & 4-5-s\\5+4-t & 6+3-u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2-p & -q\\4-r & -1-s\\9-t & 9-u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$，$-2-p=0$ 即 $p=-2$，$4-r=0$

即 $r=4$，…… 因此 $D=\begin{bmatrix}-2&0\\4&-1\\9&9\end{bmatrix}=A+B$.

1.3 (a) $\begin{bmatrix}4&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4(2)+5(3)+6(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(4)&2(5)&2(6)\\3(4)&3(5)&3(6)\\-1(4)&-1(5)&-1(6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&10&12\\12&15&18\\-4&-5&-6\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-6&9&6\\0&-7&10&7\\5&8&-11&-8\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1(4)+2(0)+3(5) & 1(-6)+2(-7)+3(8) & 1(9)+2(10)+3(-11) & 1(6)+2(7)+3(-8)\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}19&4&-4&-4\end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix}2&3&4\\1&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(1)+3(2)+4(3)\\1(1)+5(2)+6(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\29\end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix}1&2&1\\4&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-4\\1&5\\-2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1(3)+2(1)+1(-2) & 1(-4)+2(5)+1(2)\\4(3)+0(1)+2(-2) & 4(-4)+0(5)+2(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&8\\8&-12\end{bmatrix}$

1.4 令 $A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}$，則

$A^2=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-3&1\\2&1&4\\3&-1&2\end{bmatrix}$ 且 $A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}5&-3&1\\2&1&4\\3&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&-8&0\\8&-1&8\\8&-4&3\end{bmatrix}$

讀者可由此證明 $A^3=A\cdot A^2$ 且 $A^2\cdot A^3=A^3\cdot A^2$ 。

1.5 證明

(a) $\sum_{k=1}^{2} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{2} a_{ik}c_{kj}$.

(b) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} a_{ij}$.

(c) $\sum_{k=1}^{2} a_{ik}\left(\sum_{h=1}^{3} b_{kh}c_{hj}\right) = \sum_{h=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kh}\right)c_{hj}$.

圏

(a) $\sum_{k=1}^{2} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = a_{i1}(b_{1j}+c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j}+c_{2j}) = (a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}) + (a_{i1}c_{1j}+a_{i2}c_{2j})$

$$= \sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{2} a_{ik}c_{kj}.$$

(b) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{i=1}^{2}(a_{i1}+a_{i2}+a_{i3}) = (a_{11}+a_{12}+a_{13}) + (a_{21}+a_{22}+a_{23})$

$$= (a_{11}+a_{21}) + (a_{12}+a_{22}) + (a_{13}+a_{23})$$

$$= \sum_{i=1}^{2} a_{i1} + \sum_{i=1}^{2} a_{i2} + \sum_{i=1}^{2} a_{i3} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} a_{ij}.$$

上述證明指出，矩陣所有元素的加總，可以先由各列的元素相加或先由各行的元素相加而得。

(c) $\sum_{k=1}^{2} a_{ik}\left(\sum_{h=1}^{3} b_{kh}c_{hj}\right) = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}(b_{k1}c_{1j} + b_{k2}c_{2j} + b_{k3}c_{3j})$

$$= a_{i1}(b_{11}c_{1j}+b_{12}c_{2j}+b_{13}c_{3j}) + a_{i2}(b_{21}c_{1j}+b_{22}c_{2j}+b_{23}c_{3j})$$

$$= (a_{i1}b_{11}+a_{i2}b_{21})c_{1j} + (a_{i1}b_{12}+a_{i2}b_{22})c_{2j} + (a_{i1}b_{13}+a_{i2}b_{23})c_{3j}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{k1}\right)c_{1j} + \left(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{k2}\right)c_{2j} + \left(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{k3}\right)c_{3j}$$

$$= \sum_{h=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kh}\right)c_{hj}.$$

1.6 證明：若$A=[a_{ij}]$其階爲$m\times n$並且$B=[b_{ij}]$，$C=[c_{ij}]$均爲 $n\times p$矩陣，則$A(B+C)=AB+AC$。

圏 A的第i列元素爲$a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots, a_{in}$，而$B+C$的第$j$行元素爲$b_{1j}+c_{1j}$，$b_{2j}+c_{2j}$，$\cdots\cdots$，$b_{nj}+c_{nj}$，故$A(B+C)$的第$i$列第$j$行之元素爲

$$a_{i1}(b_{1j}+c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j}+c_{2j}) + \dots + a_{in}(b_{nj}+c_{nj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}$$

即爲AB與AC之第i列第j行元素之和。

1.7 證明：若$A=[a_{ij}]$爲$m\times n$階，$B=[b_{ij}]$爲$n\times p$階，且$C=[c_{ij}]$爲$p\times q$階，則$A(BC)=(AB)C$。

圏 A的第i列元素爲$a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots, a_{in}$，$BC$的第$j$行元素爲 $\sum_{h=1}^{p} b_{1h}c_{hj}$，$\sum_{h=1}^{p} b_{2h}c_{hj}, \dots, \sum_{h=1}^{p} b_{nh}c_{hj}$；因此$A(BC)$的第$i$列第$j$行元素爲

$$a_{i1}\sum_{h=1}^{p} b_{1h}c_{hj} + a_{i2}\sum_{h=1}^{p} b_{2h}c_{hj} + \dots + a_{in}\sum_{h=1}^{p} b_{nh}c_{hj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{h=1}^{p} b_{kh}c_{hj}\right)$$

$$= \sum_{h=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kh}\right)c_{hj} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1}\right)c_{1j} + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k2}\right)c_{2j} + \dots + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kp}\right)c_{pj}$$

此亦爲$(AB)C$之第i列第j行元素；因此$A(BC)=(AB)C$。