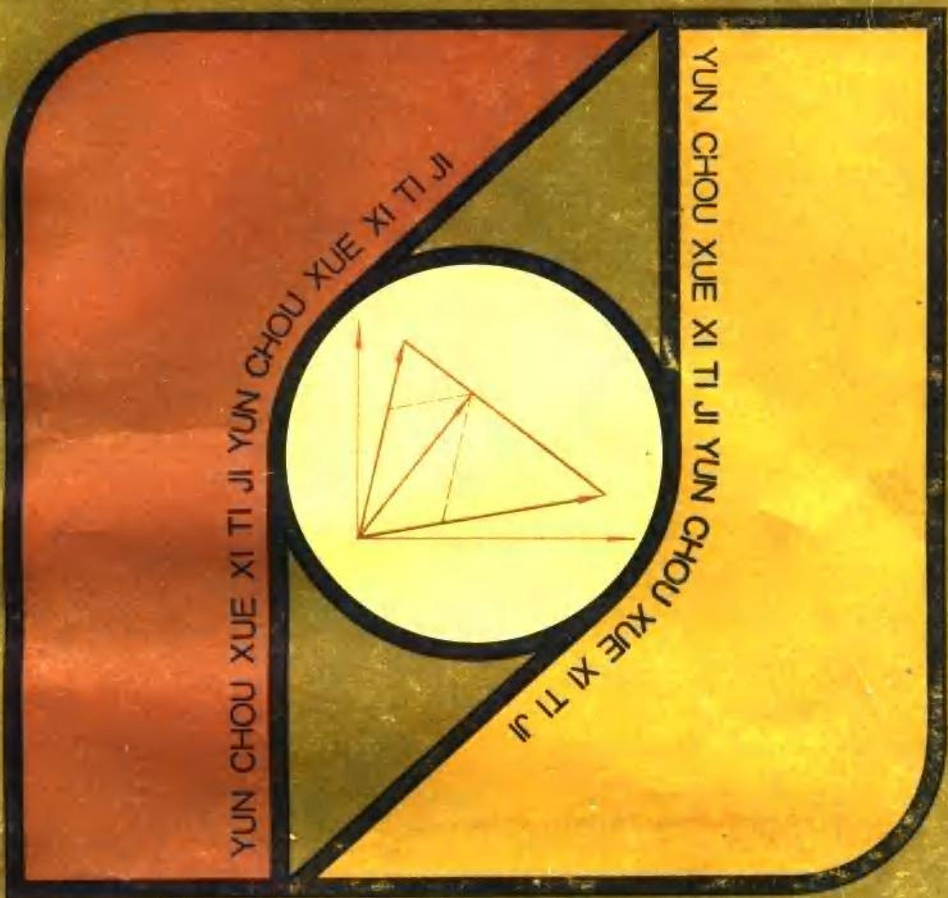
官世燊 等编



yun chou xue xi ti ji yun chou xue xi ti ji

运筹学习题集

同济大学出版社

运 筹 学 习 题 集

官世燊 等编

同济大学出版社

内 容 提 要

本书是管理类《运筹学》课程的教学参考书。全书分例题集(276题)、习题集(336题)和习题答案三部分。书中收集了线性规划、整数规划、非线性规划、动态规划、目标规划、网络分析、决策分析与对策、马尔科夫决策、存储论、排队论和模拟等方面的大量例题和习题。在选题叙述和顺序编排上尽量遵循类型多样、由浅入深、循序渐进的原则。

本书可作为工科和财经院校师生、管理干部培训(进修)班学员、管理干部和工程技术人员学习《运筹学》的参考书。

责任编辑　王　利
封面设计　徐　繁

运 筹 学 习 题 集
官世桑　等编
同济大学出版社出版
(上海四平路1239号)
新华书店上海发行所发行
武进县村前印刷厂印刷
开本787×1092　1/16　印张25.25　字数633千字
印数1—17000　科技新书目 117—230
统一书号13335.012　定价 4.15元

编 者 的 话

目前我国许多工科和财经院校的管理类专业都设有《运筹学》课程，不少管理干部培训班、进修班也设有普及性质的《运筹学》课程，而且编写、翻译或出版了不少《运筹学》教材。这种情况迫切要求出版一本适应性较强的习题集。此外，由于教材篇幅和教学时数的限制，在教材编写和讲课时不可能列举大量的例题，这在一定程度上影响了对《运筹学》内容的掌握和解决实际问题能力的培养。考虑到这两方面的因素，我们根据几年来使用不同教材进行教学的经验和一些国内外较有影响的《运筹学》著作，并参考其他资料写了这个《运筹学习题集》。

全书共十四章，内容分三大部分，第一部分为例题集(共276题)，第二部分为习题集(共336题)，第三部分为习题集中计算题的答案(共278题)。例题集里的每个例题，基本上在习题集相应的章中配了一二道或多道习题，以便对照和掌握有关的知识与解题方法。为了使本书不仅适宜于讲授或学习管理类《运筹学》的师生使用，而且对自学的工程技术人员、管理干部和要求较高的研究生也能使用，本书的600多道例题与习题，具有内容较广、类型较多、有难有易的特点，顺序的编排注意了由浅入深、循序渐进等原则。我们力图通过这些例题与习题，使读者进一步掌握《运筹学》的基本概念、基本结论和计算方法，同时提高分析与解决实际问题的应用能力。

参加本书编写的有：刘国良(第一、六章)、刘绍亮(第二、七章)、张琳(第三、四章)、官世燊(第五、十、十三章)、叶弟豪(第八、九章)、孙昌言(第十一、十二章)、陆新(第十四章)和李刚(第十五章)等同志。全书由官世燊同志主编，由沈荣芳(主审)、吴立煦(主审)和王永安三同志审稿。

本书可作为工科和财经院校、管理干部培训班、进修班《运筹学》课程的配套教学参考书，也可作为管理干部、工程技术人员自学《运筹学》和解决实际问题的参考书。

由于编者的水平有限和时间仓促，定有不妥之处，恳请读者批评指正。

1984年10月

目　　录

第一部分　例题集

第二部分　习题集

第一部分

例　题　集

第一章　线性规划模型的建立

1—1　设用A_1、A_2、…、A_m种原料，可以生产B_1、B_2、…、B_n种产品。现有原料数、每单位产品所需原料数、每单位产品可得利润数如下表所示：

原料 \ 单位产品所需原料 \ 产品	B_1　B_2 ……… B_n	现有原料
A_1	a_{11}　a_{12} ……… a_{1n}	b_1
A_2	a_{21}　a_{22} ……… a_{2n}	b_2
⋮	⋮　⋮　⋮	⋮
A_m	a_{m1}　a_{m2} ……… a_{mn}	b_m
单位利润	c_1　c_2 ……… c_n	

问应如何组织生产才能获得最大利润？试建立此问题的线性规划模型。

解　设x_j为产品的B_j的计划产量($j=1, 2, \cdots, n$)，x_0为总利润，则模型为

$$\max\ x_0=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

约束于

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j \leqslant b \qquad i=1, 2, \cdots, m$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j=1, 2, \cdots, n$$

1—2　一家工厂制造三种产品，需要三种资源——技术服务、劳动力和行政管理。下表列出了三种单位产品对每种资源的需要量。

产品	资源（小时）			单位利润
	技术服务	劳动力	行政管理	(元)
1	1	10	2	10
2	1	4	2	6
3	1	5	6	4

今有100小时的技术服务，600小时的劳动力和300小时的行政管理时间可供使用。试确定能使总利润最大的产品生产量的线性规划模型。

解：设x_j为产品j的产量($j=1, 2, 3$)，x_0为总利润，则模型为

$$\max\ x_0=10x_1+6x_2+4x_3$$

约束于

$$x_1+x_2+x_3\leqslant 100 \quad (技术服务)$$
$$10x_1+4x_2+5x_3\leqslant 600 \quad (劳动力)$$
$$2x_1+2x_2+6x_3\leqslant 300 \quad (行政管理)$$
$$x_j\geqslant 0 \quad j=1,\ 2,\ 3$$

1—3 某工厂生产A、B、C三种产品，每种产品的原料消耗量、机械台时消耗量、资源限量及单位产品利润如下表所示：

产　　品	材料单耗	机械台时单耗	单位产品利润（元）
A	1.0	2.0	10
B	1.5	1.2	14
C	4.0	1.0	12
资源限量	2000	1000	

根据客户订货，三种产品的最低月需要量分别为200、250和100件。

又据销售部门预测，三种产品的最大生产量应分别为250、280和120件，否则难以销售。

如何安排这三种产品的生产量，在满足各项要求的条件下，使该厂的利润最大。建立此问题的线性规划模型。

解 设x_1、x_2和x_3分别表示产品A、B和C的产量，x_0表示总利润，则模型为

$$\max\ x_0=10x_1+14x_2+12x_3$$

约束于

$$\begin{aligned}
x_1+1.5x_2+4x_3&\leqslant 2000\\
2x_1+1.2x_2+x_3&\leqslant 1000\\
x_1&\geqslant 200\\
x_2&\geqslant 250\\
x_3&\geqslant 100\\
x_1&\leqslant 250\\
x_2&\leqslant 280\\
x_3&\leqslant 120
\end{aligned}$$

1—4 某工厂想要把具有下列成份的几种现成合金混合起来，成为一种含铅百分之30，

成份＼合金	1	2	3	4	5
含铅百分比	30	10	50	10	50
含锌百分比	60	20	20	10	10
含锡百分比	10	70	30	80	40
费用(元/公斤)	8.5	6.0	8.9	5.7	8.8

锌百分之20及锡百分之50的新合金。目标是要确定应当按怎样的比例来混合这些合金，才能以最小的费用生产新合金。

试建立此问题的线性规划模型。

解 设x_j为混合成一公斤新合金时所需合金j的用量($j=1, 2, \cdots, 5$)，x_0为生产费用，则模型为

$$\min x_0 = 8.5x_1 + 6.0x_2 + 8.9x_3 + 5.7x_4 + 8.8x_5$$

约束于

$$\begin{aligned}
x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 + \quad x_4 + \quad x_5 &= 1 \\
0.3x_1 + 0.1x_2 + 0.5x_3 + 0.1x_4 + 0.5x_5 &= 0.3 \\
0.6x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 + 0.1x_4 + 0.1x_5 &= 0.2 \\
0.1x_1 + 0.7x_2 + 0.3x_3 + 0.8x_4 + 0.4x_5 &= 0.5 \\
x_j \geqslant 0 \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 &
\end{aligned}$$

(注意第一条约束是多余的，它是后三条约束之和)

1—5 某钢筋车间制作一批钢筋(直径相同)，长度为3米的90根，长度为4米的60根。已知所用的下料钢筋长度为10米，问怎样下料最省？

建立此问题的线性规划模型。

解 根据题意，可有如下三种下料方法：

(1) 截成3米的3根，余下残料为1米；

(2) 截成3米的2根，4米的一根，余下残料为0；

(3) 截成4米的2根，余下残料为2米。

设按第(1)种下料方法，下料x_1根；按第(2)、第(3)种下料方法，各下料x_2、x_3根。根据上述三种下料方法可列出下表：

要求截成长度(米)	各种下料方法所得的钢筋根数			要求配料根数
	x_1	x_2	x_3	
3	3	2	0	90
4	0	1	2	60
残料长度(米)	1	0	2	

此外还需考虑满足90、60根后的多余的根数s_1、s_2。设x_0为残料总长度，问题的线性规划模型为

$$\min x_0 = x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 3s_1 + 4s_2$$

约束于

$$\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - s_1 \quad &= 90 \\
x_2 + 2x_3 - s_2 &= 60 \\
x_1, x_2, x_3 \geqslant 0, \ s_1, s_2 \geqslant 0 &
\end{aligned}$$

1—6 一家昼夜服务的饭店，24小时中需要的服务员数如下表所示：

起迄时间	服务员的最少人数
2—6	4
6—10	8
10—14	10
14—18	7
18—22	12
22—2	4

每个服务员每天连续工作八小时，且在时段开始时上班。问题的目标是要求满足以上要求的最少上班人数，试把这个问题表示成一个线性规划模型。

解 设从2点开始为时段1，从6点开始为时段2，……，并且每时段为4小时。又设 x_j 是在第 j 个时段开始时上班工作的服务员人数，x_0 为服务员总人数，则模型为

$$\min \ x_0 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

约束于

$$\begin{aligned}
x_1 + \qquad\qquad\qquad\qquad x_6 &\geqslant 4\\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad &\geqslant 8\\
x_2 + x_3 \qquad\qquad &\geqslant 10\\
x_3 + x_4 \qquad &\geqslant 7\\
x_4 + x_5 &\geqslant 12\\
x_5 + x_6 &\geqslant 4\\
x_j \geqslant 0 \quad j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6&
\end{aligned}$$

1—7 有A、B两种产品，都需要经过前后两道化学反应过程。每一个单元的产品A需要前道过程2小时和后道过程3小时。每一个单元的产品B需要前道过程3小时和后道过程4小时。可供利用的前道过程时间有16小时，后道过程时间有24小时。

每生产一个单位的产品B的同时，会产生两个单位的副产品C，且不需外加任何费用。副产品C一部分可以出售赢利，其余的只能加以销毁。

出售产品A每单位能赢利4元，产品B每单位赢利10元。副产品C每卖出一单位能赢利3元，但是如果卖不出去，那么每单位的销毁费用是2元。预测表明，最多可售出5个单位的副产品C。

要求决定使利润达最大的A和B的产量，试建立此问题的线性规划模型。

解 设 x_1 为产品A的产量，x_2 为产品B的产量，x_3 为副产品C的销售量，x_4 为副产品C的销毁量，x_0 为总利润，则此问题的模型为

$$\max \ x_0 = 4x_1 + 10x_2 + 3x_3 - 2x_4$$

约束于

$$\begin{aligned}
-2x_2 + x_3 + x_4 &= 0\\
x_3 &\leqslant 5\\
2x_1 + 3x_2 &\leqslant 16\\
3x_1 + 4x_2 &\leqslant 24\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geqslant 0
\end{aligned}$$

1—8　某种产品包括三个部件，它们是由4个不同的部门生产的，而每个部门有一个有限的生产时数，下表中给出三个部件的生产率，现在要确定每一部门分配给每一部件的工作时数，使得完成产品的件数最多。试建立这个问题的线性规划模型。

部　门	能　力	生产率（件数/小时）		
		部件 1	部件 2	部件 3
1	100	10	15	5
2	150	15	10	5
3	80	20	5	10
4	200	10	15	20

解　设x_{ij}为第i个部门分配给第j个部件的小时数，x_0为完成产品的件数，c_{ij}为题中给出的相应的生产率。问题的目标函数为

$$\max x_0=\min\{\sum_i c_{i1}x_{i1},\ \sum_i c_{i2}x_{i2},\ \sum_i c_{i3}x_{i3}\}$$

设

$$y=\min\{\sum_i c_{i1}x_{i1},\ \sum_i c_{i2}x_{i2},\ \sum_i c_{i3}x_{i3}\}$$

则

$$\sum_i c_{i1}x_{i1}\geqslant y,\ \sum_i c_{i2}x_{i2}\geqslant y,\ \sum_i c_{i3}x_{i3}\geqslant y$$

考虑资源约束和非负约束后可得下面的线性规划模型：

$$\max\quad x_0=y$$

约束于

$$\begin{aligned}
10x_{11}+15x_{21}+20x_{31}+10x_{41}-y&\geqslant 0\\
15x_{12}+10x_{22}+5x_{32}+15x_{42}-y&\geqslant 0\\
5x_{13}+5x_{23}+10x_{33}+20x_{43}-y&\geqslant 0\\
x_{11}+x_{12}+x_{13}&\leqslant 100\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}&\leqslant 150\\
x_{31}+x_{32}+x_{33}&\leqslant 80\\
x_{41}+x_{42}+x_{43}&\leqslant 200\\
x_{ij}\geqslant 0\quad i=1,2,3,4,&\quad j=1,2,3
\end{aligned}$$

1—9　某车间在未来五天所需要的某种刀具的统计资料如下：

日　期	1	2	3	4	5
刀具数	120	85	160	145	300

每一把刀具成本0.6元。用过的刀具送到机修车间研磨，每把需要花费0.20元(考虑内部核算)。刀具每天用过后，如果立即送去磨，两天后可以磨好送回，供当天的需要。第五天后，刀具应全换新的。每期开始时，该车间没有任何刀具。问这个车间需要多少刀具才能应付需要，而成本又最低？建立此问题的线性规划模型。

解 设x_i为第i天使用新的刀具数，s_i为第i天用过送去研磨的刀具数，x_0为总成本。因送磨刀具要隔两天才能取回，所以第 i 天取回第 $i-2$ 天送去的刀具。此问题的线性规划模型为

$$\min\ x_0 = 0.6(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+0.2(s_1+s_2+s_3)$$

约束于

$$\begin{aligned}
&x_1 = 120\\
&x_2 = 85\\
&x_3+s_1 = 160\\
&x_4+s_2 = 145\\
&x_5+s_3 = 300\\
&s_1 \leqslant 120 && \text{(第1天送磨数)}\\
&s_2 \leqslant 120-s_1+85 && \text{(第2天送磨数)}\\
&s_3 \leqslant (120-s_1+85)-s_2+160 && \text{(第3天送磨数)}\\
&\quad x_i \geqslant 0 \quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\\
&\quad s_i \geqslant 0 \quad i=1,\ 2,\ 3
\end{aligned}$$

1—10 设有下面四个投资的机会：

甲：在三年内，投资人应在每年的年初投资，每年每元投资可获利息 0.2 元，每年取息后可重新将本息投入生息。

乙：在三年内，投资人应在第一年年初投资，每两年每元投资可获利息0.5元。两年后取息，可重新将本息投入生息。这种投资最多不得超过20,000元。

丙：在三年内，投资人应在第二年年初投资，两年后每元可获利息0.6元，这种投资最多不得超过15,000元。

丁：在三年内，投资人应在第三年年初投资，一年内每元投资可获利息0.4元，这种投资不得超过10,000元。

假定在这三年为一期的投资中，每期的开始有30,000元可供投资，投资人应怎样决定投资计划，才能在第三年年底获得最高的收益。建立此问题的线性规划模型。

解 设x_{ij}为第j年把资金作第i项投资的资金数($i=1,\ 2,\ 3,4$分别对应投资机会甲、乙、丙、丁；$j=1,\ 2,\ 3$)，x_0为第三年年底的总获利数，则据题意可得线性规划模型：

$$\max\ x_0 = 0.2x_{11}+0.2x_{12}+0.2x_{13}+0.5x_{21}+0.6x_{22}+0.4x_{43}$$

约束于

$$\begin{aligned}
&x_{11}+x_{21} \leqslant 30000\\
&x_{12}+x_{32} \leqslant 30000-x_{21}+0.2x_{11}\ ①\\
&x_{13}+x_{43} \leqslant 30000+0.2x_{11}+0.2x_{12}+0.5x_{21}\ ②\\
&\quad x_{21} \leqslant 20000\\
&\quad x_{32} \leqslant 15000\\
&\quad x_{43} \leqslant 10000\\
&x_{ij} \geqslant 0 \quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4;\quad j=1,\ 2,\ 3
\end{aligned}$$

①第二年开始可供投资的金额30000元，并应加上x_{11}的20%的利息，同时应减去已经投入x_{21}而未到期的金额。

②第三年开始可供投资的金额也是30000元，但应加上x_{11}和x_{12}的各20%的利息，以及x_{21}的50%的利息。

1—11 某厂生产产品Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ。每种产品要经过A、B两道工序加工。该厂有两种规格的设备能完成A工序，分别以A_1，A_2表示，有三种规格的设备能完成B工序，分别以B_1，B_2，B_3表示。产品Ⅰ可在工序A和B任一种规格的设备上加工；产品Ⅱ可以在工序A的任何规格的设备上加工，但在完成工序B时，只能在B_1设备上加工；产品Ⅲ只能在A_2与B_2设备上加工。假定产品Ⅰ的销售量不超过800单位。已知三种产品在各设备上加工时，单位产品耗用的工时数（单位工时），原材料费，产品销售价格，各种设备有效台时以及满负荷操作时设备使用费如下：

设　备	产　品			设备有效台时	满负荷时的设备使用费用（元）
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ		
A_1	5	10	—	6,000	300
A_2	7	9	12	10,000	320
B_1	6	8	—	4,000	250
B_2	4	—	11	7,000	783
B_3	7	—	—	4,000	200
原料费（元/件）	0.25	0.35	0.50		
单　价（元/件）	1.25	2.00	2.80		

要求安排最优的生产计划，使该厂利润最大。

建立此问题的线性规划模型。

解 产品Ⅰ可采用六种不同方式进行生产，即以下列不同的两种设备组合进行产品加工：(A_1, B_1)，(A_1, B_2)，(A_1, B_3)，(A_2, B_1)，(A_2, B_2)，(A_2, B_3)；以x_1，x_2，…，x_6分别代表产品Ⅰ用这六种方式加工的产品数量。产品Ⅱ可用下列两种设备组合进行加工：(A_1, B_1)，(A_2, B_1)；以x_7，x_8代表之，产品Ⅲ只能用一种设备组合加工：(A_2, B_2)；以x_9代表之。

用各种设备组合生产的产品，利润各不相同。以设备组合(A_1, B_2)生产产品Ⅰ为例，A每生产1单位产品Ⅰ的成本为$(5/6000)(300)=0.25$；B_1每生产1单位产品Ⅰ的成本为$(6/4000)(250)=0.375$。产品Ⅰ每生产1单位所需的原料费为0.25。因此，产品Ⅰ每生产1单位共需成本0.875元。产品Ⅰ的销售价格为1.25元，单位利润则为$1.25-0.875=0.375$元。

类此可算出其他组合方式生产的产品利润，并设x_0为产品总利润。这样就可写出以下线性规划模型：

$$\max\ x_0 = 0.375x_1 + 0.300x_2 + 0.400x_3 + 0.400x_4 + 0.325x_5 + 0.425x_6 + 0.650x_7 + 0.861x_8 + 0.672x_9$$

约束于

$$\begin{aligned}
&5x_1 + 5x_2 + 10x_7 \leqslant 6000\\
&7x_4 + 7x_5 + 7x_6 + 9x_8 + 12x_9 \leqslant 10000\\
&6x_1 + 6x_4 + 8x_7 + 8x_8 \leqslant 4000\\
&4x_2 + 4x_5 + 11x_9 \leqslant 7000
\end{aligned}$$

$$7x_3 + \quad 7x_6 \quad \leqslant 4000$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \quad \leqslant 800$$

$$x_i \geqslant 0 \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 9$$

1—12 某木材公司有三处木材来源及五个需要供应的市场。木材来源处A、B、C的每年供应量分别为10，20及15万m³。市场1，2，3，4及5每年可销售木材的数量分别为7，12，9，10及8万m³。

过去该公司一直用火车装运木材。因为现在火车运费上涨，所以考虑改用船舶来装运，但将要求公司对所用船舶进行投资。除了这些投资费用外，经由铁路及(可行时)经由水路，按每万m³万元计的每条途径的单位运费如下表：

来源 \ 市场	铁路运输单位费用					船运单位费用				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
A	24.1	28.5	17.7	22.0	26.3	12.2	14.8	9.5	—	14.0
B	27.4	30.8	23.6	19.5	22.4	14.4	17.2	10.9	9.3	12.2
C	23.5	26.4	25.0	24.2	18.5	—	13.2	14.3	12.5	10.4

沿每条途径每年船运每万m³需要的船舶基本投资额(万元)是：

来源 \ 市场	船舶投资额				
	1	2	3	4	5
A	110	121	95	—	114
B	117	127	108	100	106
C	—	113	110	107	96

该公司只能拨出250万元投资于船舶。目标是要确定在满足此投资预算及市场销售需求的同时使总费用达到最小的全面运输计划。

试建立此问题的线性规划模型。

解 设x_{ijk}为从第i个来源以第k种方法供应第j个市场的木材数量；$k=1$，2分别代表铁路运输和船舶运输；x_0为总费用。

因为供小于需，所以虚设一个来源4，从虚设来源运出的木材的运价都为零。

设c_{ijk}为表中所给的运输单位费用，并设$c_{4jk}=0$(对于所有的j和k)。

设v_{ij}为表中所给的投资于船舶的基本投资额，并设$v_{4j}=0$(对于所有的j)。

此线性规划模型是：

$$\min x_0 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij1}x_{ij1} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}(c_{ij2}+v_{ij})x_{ij2}$$

约束于

$$\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{2} x_{ijk} = \begin{cases} 10 & i=1 \\ 20 & i=2 \\ 15 & i=3 \\ 1 & i=4 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{2} x_{ijk} = \begin{cases} 7 & j=1 \\ 12 & j=2 \\ 9 & j=3 \\ 10 & j=4 \\ 8 & j=5 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} v_{ij}\, x_{ij2} \leqslant 250$$

$$x_{ijk} \geqslant 0 \qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4; \quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5; \quad k=1,\ 2.$$