[美] R. P. GILBERT 著

偏微分方程的函数论方法

侯宗义　李明忠　徐振远　译

陈传璋　校

高等教育出版社

偏微分方程的函数论方法

[美] R. P. Gilbert 著
侯宗义 李明忠 徐振远 译
陈传璋 校

高等教育出版社

出版前言

本书论述偏微分方程的解析理论，介绍了偏微分方程的函数论方法的近代发展，并介绍它们在数学物理中的某些应用。本书所采用的观点本质上是积分算子理论，从而不仅可确定出偏微分方程的解，而且把单复变和多复变函数的大多数定理移植到偏微分方程的理论上来。

中译本根据美国 Academic Press 1969 年出版的 R. P. Gilbert 著《Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations》译出。原书是 Academic Press 出版的《Mathematics in Science and Engineering》丛书中的第 54 卷。

偏微分方程的函数论方法

[美] R. P. Gilbert

侯宗义 李明忠 徐振远 译

陈传璋 校

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京顺义小店印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 11.625 字数 280,000

1983 年 6 月第 1 版 1985 年 1 月第 1 次印刷

印数 00,001—8,500

书号 13010·0892 定价 2.95 元

序

在数学物理偏微分方程的传统论述中，特别着重于求解边值问题和初值-边值问题. 这是因为在经典物理，也就是在流体力学，弹性力学，塑性力学以及电磁学的研究中，这些问题是自然的问题. 然而，在量子力学和量子场论中，通常不涉及到解边值问题，而是关心偏微分方程的解的解析性质的研究.

这本专著的目的是提出偏微分方程解析理论的一种论述，这种论述对于应用数学家、物理学家以及量子化学家都是可以接受的. 假定本书的读者已经具备了单复变函数论的知识，并且对古典的数学物理方程有所了解. 但是，并不假定读者有多复变函数论的任何知识. 为使本书自身完备，书中第一章介绍多复变的局部性理论. 读者若对此已有某些了解，可以跳过这一章，而在后面需要时查阅.

在这本专著中所采取的观点本质上是积分算子理论. 这样做不仅能使我们确定出偏微分方程的解，而且能把单复变和多复变的大多数定理移植到偏微分方程的理论上来.

在最后一章中，将我的"包络方法"应用到量子力学和量子场论的散射问题上，这个方法是 Hadamard 在他的奇性乘法定理的证明中所用过的思想的推广.

展现在本专著中的材料是以我在下述讨论班和讲座的讲稿为基础的，这些讨论班和讲座是在 Indiana 大学为适应数学物理教学计划和在 Maryland 大学的流体力学与应用数学研究所 (1961～1965)举办的. 我在这个时候要对 Alexander Weinstein 教授表示我的谢意，他提供了令人愉快而又兴奋的数学环境，这促进了

我在研究所的研究和学习.

当撰写此书时，空军科研办事处以 AFOSR 400-64 和 AFOSR 1206-67 奖金以及国家科学基金会以 NSF GP-3937 和 NSF GP-5023 奖金给了我经济上的部分帮助，我在此深致谢意.

我很感谢 Stefan Bergman 教授对手稿的校阅以及对某些节提的意见，他给了我写此书的鼓舞力量. 我也要感谢 Henry C. Howard 博士，他通读了手稿，且提出了很多有价值的建议. 我的学生 Te Lung Chang, Wilma Loudin, Edward Newberger 和 Thottathil Varughese 对清样进行了精心的校对.

最后，我对 Katherine Smith 夫人，Diane Boteler 夫人和 Judy Hupp 夫人表示谢意，她们胜任地打印和准备好了这份手稿.

R. P. Gilbert

Bloomington, Indiana

10 月，1968

目　　录

绪　言

这本专著论述偏微分方程的函数论方法的近代发展，以及论述这些思想对于数学物理中当前有兴趣的某些问题的应用．大多数近代发展所依赖的基础是由作者在其1958年的博士论文[G. 6]中首先证明过的那些结果；也参阅[G. 7, 8]．这些结果实质上是将Hadamard(1898[H. 1])在他的奇性乘法定理的证明中所使用过的思想推广到单复变和多复变函数的情形．由于这些结果对函数论方法的进展是有用的，所以，对一些涉及到的思想的历史进展和这方面所获得的成果作一个概括性的说明是有意义的．

1954年，Szegö [S. 7] 曾证明了论及带调和函数的下述很有趣味的定理：

设 $P_n(\cos\theta)$ 表示 n 次 Legendre 多项式，且设 $a_1, a_2, \cdots$ 为这样的实常数，使当 $n\to\infty$ 时 $\limsup|a_n|^{\frac{1}{n}}=1$. 又设 $u(r, \theta)$ 是由

$$u(r, \theta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta) \tag{0.1}$$

确定的调和函数，而解析函数 $f(z)$ 由

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{0.2}$$

定义，因此这两个函数对于 $r=|z|<1$ 都是正则的．那末，边界点 $(1, \theta)$ 是 $u(r, \theta)$ 的一个奇点，当且仅当边界点 $z=e^{i\theta}$ 是 $f(z)$ 的奇点．

Szegö 由此猜想同样的结果对复系数 $\{a_n\}$ 也可能成立；然而，Nehari[N. 6] 由于证明了一个包含 Szegö 结果为其特殊情形的更一般性定理，揭示出奇性之间的对应不一定是一对一的． Nehari

直接利用了原始的 Hadamard 思想(参阅第一章,第 3 节中对 Hadamard 思想的完整的讨论)来证明下面的定理:

设$\{a_n\}$是这样的常数列,使当$n\to\infty$时

$$\limsup|a_n|^{\frac{1}{n}}=\rho<1.$$

而且,设解析函数$g(t)$和$f(z)$由展开式

$$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(t),\quad |t+1|+|t-1|<\frac{1+\rho^2}{\rho},\tag{0.3}$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad |z|<\rho^{-1}\tag{0.4}$$

定义,它们在所标明的区域内收敛. 在这些假设下,沿着从点$t=1$出发的,要不然就避开$t=\pm1$两点的一条路径C_t而由解析延拓达到的一点$t=\tau$将是$g(t)$的奇点,当且仅当

$$\tau=\frac{1+\sigma^2}{2\sigma},\tag{0.5}$$

其中$z=\sigma$是$f(z)$的一个奇点,这个点是沿着从点$z=1$出发的,并且重合于C_t在保角映射

$$t=\frac{1+z^2}{2z}\tag{0.6}$$

下的两个象之一的一条路径C_z,由$f(z)$的解析延拓而达到的.

作者在他的博士论文中所做的工作,就是将 Szegö 和 Nehari 的结果推广到三个或更多个复自变量的调和函数的情形. 这个目标的达到,是由于发现了原始的 Hadamard 思想对于单复变及多复变函数的若干个推广,这些推广可以圆满地应用到调和函数的一般表达式上. 我们将作者对 Hadamard 思想的推广称作包络方法. 我们重新叙述上面提到的作者论文中第 8 页的定理(1.0)和第 19 页的定理(3.0).

定理(1.0) 设$f(X;\zeta)$为X及ζ的全纯函数,$X\in\mathbb{C}^3$,$\zeta\in\mathbb{C}^1$,且设$S(X;\zeta)=0$是$f(X;\zeta)$的奇性的一个整体表示式. 那末,积分

$$H(\boldsymbol{X})=\int_{\mathscr{L}} f(\boldsymbol{X};\zeta)d\zeta$$

对于所有不同时满足

$$S(\boldsymbol{X};\ \zeta)=0,\quad \frac{\partial S(\boldsymbol{X};\zeta)}{\partial\zeta}=0 \tag{0.7}$$

的点是正则的，这里 $\mathscr{L}$ 为一条闭围道.

定理(3.0) 设 $f(\boldsymbol{X};\ \zeta)$ 是 $\boldsymbol{X}$ 及 ζ 的全纯函数，$\boldsymbol{X}\in\mathbb{C}^m$，$\zeta\in\mathbb{C}^n$，且设 $S(\boldsymbol{X};\ \zeta)=0$ 为 $f(\boldsymbol{X};\ \zeta)$ 的奇性的一个整体表示式．那末，积分

$$H(\boldsymbol{X})=\int_{D} f(\boldsymbol{X};\zeta)d\zeta$$

对于一切不同时适合

$$S(\boldsymbol{X};\ \zeta)=0,\ \frac{\partial S(\boldsymbol{X};\zeta)}{\partial\zeta_1}=0,\ \cdots,\ \frac{\partial S(\boldsymbol{X};\zeta)}{\partial\zeta_n}=0 \tag{0.8}$$

的点 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{C}^m$ 是正则的，其中

$$D=\mathscr{L}_1\times\mathscr{L}_2\times\cdots\times\mathscr{L}_n$$

是位在 $\zeta_1,\zeta_2,\ \cdots,\ \zeta_n$ 诸平面内的闭围道的笛卡儿乘积.

当定理(1.0)应用到调和函数的 Whittaker 表示式(第二章，第 2 节)时，我们得到 Szegö 和 Nehari 结果的一个推广．事实上，当我们考虑第二章定理 2.2.1 的特殊情形

$$f(u,\ \zeta)\equiv F(u)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n u^n$$

时，将再度出现 Szegö 和 Nehari 的定理．Szegö 和 Nehari 的定理的另一个推广是由作者稍微晚些时候 [G. 9] (也参阅 Henrici [H. 7]) 在关于广义轴对称位势理论(GASPT)† 方程

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{2\nu}{y}\frac{\partial\Psi}{\partial y}=0\quad(\mathrm{Re}\,\nu>0) \tag{0.9}$$

† 简略记号 GASPT 属于 Weinstein，他在位势理论中首先考虑了分数维空间，并且指出了这个思想在应用数学问题中的重要性 [W. 6～15].

的复解的研究中提供的，这些复解在原点正则，亦即这样一些解

$$\Psi(r,\ \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n C_n^{\nu}(\cos\theta), \tag{0.10}$$

而 $\limsup|a_n|^{\frac{1}{n}}=\rho<1$. 这里，$C_n^{\nu}(\cos\theta)$ 是指 Gegenbauer 函数或者超球调和函数．当 $\nu=\frac{1}{2}$ 时 $C_n^{\frac{1}{2}}(\cos\theta)\equiv P_n(\cos\theta)$. 可以证明，级数(0.10)的奇性恰好发生在如同级数(0.1)～(0.3)的同样位置上．在第四章中，定理 4.2.5，这个结果的准确叙述和证明是与这些定理进一步扩伸到更一般的方程

$$S_{\mu\nu}[\Psi]\equiv\Psi_{xx}+\frac{2\nu}{x}\Psi_x+\Psi_{yy}+\frac{2\mu}{y}\frac{\partial\Psi}{\partial y}$$
$$+\{k^2-V(r)\}\Psi=0 \tag{0.11}$$

以及方程

$$L_{(\lambda,s)}^{(n)}[\Psi]\equiv\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_n^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2}+\frac{s}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}+\lambda^2\Psi=0 \tag{0.12}$$

的解上一道给出的，其中 $\mu,\ \nu>0$, k 是实数，

$$rV(r)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n r^n\quad(v_0>0)$$

是整函数，而 $s>-1$, 且 $\lambda\neq0$ 是实数．

第二章和第四章包含有作者是怎样推广 Hadamard 思想的详细评述，在建立线性偏微分方程理论的函数论方法时，这是有用的[G. 6～18], [G. H. 1～4].

在作者的广义 Hadamard 引理（包络方法）发现以前，偏微分方程的解的奇性的研究是被限制于积分表示式的相当特殊的形式. Bergman [B. 22, 54～57 页; B. 3～10, 13, 24～27] 透彻地研究了调和函数的奇性，此调和函数的 B_3 相伴是 u 和 ζ 的有理函数，也就是具有积分表示式

$$\Pi(\boldsymbol{X})=B_3 f\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} f(u,\ \zeta)d\zeta,$$

$$f(u,\ \zeta)\equiv\frac{p_1(u,\ \zeta)}{p_2(u,\ \zeta)} \tag{0.13}$$

的调和函数，其中

$$\boldsymbol{X}\equiv(x_1,\ x_2,\ x_3),\ u=(x_1+ix_2)\frac{\zeta}{2}+x_3-(x_1-ix_2)\frac{1}{2\zeta},$$

而 $p_1(u,\ \zeta)$, $p_2(u,\ \zeta)$是 u 和 ζ 的多项式. 作者的定理 (1.0) 允许人们利用 Whittaker 表示式来研究更一般类型的调和函数的奇性. 例如, 在 $p_1(u,\ \zeta)$ 和 $p_2(u,\ \zeta)$ 是两个复变量的完全任意的整函数情形,现在可以第一次被人们讨论了.

定理(2.0)和(3.0)[G. 6] 在现代物理的某些问题中也是非常有用的,例如,研究 Feynman 积分的奇性以及研究在量子力学和量子场论中的散射振幅的奇性(第五章).

实际上,定理(3.0)曾被物理学家 Landau 在有关量子场论的两篇文章(1959[L. 4, 5])中猜测过; 也参阅 Bjorken[B. 37]. 直到 1960 年, Polkinghorne 和 Screaton [P. S. 2] 才在物理学文献中, 发表了这个定理的证明, 这个证明是他们互相独立获得的. 尽管有如此巧合, 但在那个时候, 在偏微分方程的研究中, 函数论方法,正如人们可从[B. 22] 所看到的,完全是从量子场论,特别是从 Feynman 积分中分离出来的. 直到 1964 年,作者才意识到这两个领域的某些基本方面的相似数学结构. 此后不久, 发表了有关 Hadamard 思想的推广一文的概要以及这些结果对弹性西积分的奇性的研究的应用一文,这两篇文章是作者和他的同事 Howard 以及 Aks 合作的[G. H. A. 1], [A. G. H. 1]; 这些结果分别在第一章和第五章中予以讨论. (参阅第 10 页加在校样中的注解.)

这本关于偏微分方程中的函数论方法的专著是这样规划的, 以使人们在阅读时可以不依赖于这个领域内的其他书籍. 然而,

要设想接触这个主题的读者具备单复变解析理论以及偏微分方程古典理论的某些知识. 考虑到这一点，且欲使本书自身完备，开头一章包括了有关多复变函数的基本内容. 第一章包含有 Weierstrass 全纯函数和 Cauchy-Reimann 全纯函数的定义，对于多复变的 Cauchy 公式的推广，Osgood 引理，Hartogs 定理，Weierstrass 预备定理，隐函数定理，关于多复变的 Schwarz 引理，以及对多复变整函数的增长估计. 此外，第一章还包含了作者把 Hadamard 思想扩伸到单复变和多复变这两者的完整的介绍，以及作者[G. 28]和 Bergman[B. 27]关于从多复变函数的级数展开的信息以确定其奇性位置的准则的某些新定理. 简单地讲，第一章包含着多复变函数局部性理论的简明介绍，而这些对于本专著来说，是足够的了. 至于偏微分方程的复解析理论的代数拓扑方法，不在本书的范围内. 对学习这种方法感兴趣的读者，可直接阅读 Leray 的文章[L. 8, 9]；但是，为此必须了解多复变的整体理论.（例如，参阅 Bers 的注记[B. 35]，或者 Fuks [F. 45]，Gunning 和 Rossi[G. R. 1]或 Hormander[H. 11]的书.）

第二章论述$(p+2)$个变量的调和函数的解析性质. 引进这个素材是为了使偏微分方程的传统论述和函数论方法连接起来. 讨论了下面一些题目：三个变量的调和函数，Whittaker 表示式的求导，利用包络方法以确定三个变量的调和函数的奇性位置，Bergman-Whittaker 算子 $\boldsymbol{B}_3$，对于 $\boldsymbol{B}_3$ 的逆算子，生成调和函数的其他一些算子，算子 $\boldsymbol{B}_3$ 到高维情形的推广，包络方法对多于三个变量情形的应用，关于调和函数在 $\mathbb{R}^3$ 中是奇异的必要条件，奇性分类的射影几何方法，研究调和函数表示式的代数几何方法，以及对有关的椭圆型偏微分方程

$$\boldsymbol{T}_{p+2}[\boldsymbol{\Psi}]\equiv\sum_{\mu=1}^{p+2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\Psi}}{\partial x_\mu^2}+A(r^2)r\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial r}+C(r^2)\boldsymbol{\Psi}=0 \quad (0.14)$$

的解的研究.

第三章是在区域 $\mathfrak{S}\subset\mathbb{C}^1$ 内研究线性偏微分方程

$$\mathbf{e}[u]\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x, y)u=0, \tag{0.15}$$

其中系数 $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ 都是 $\mathscr{C}^{(\infty)}$ 的,并且更进一步,允许通过变量 $z=x+iy$, $z^*=x-iy$ 解析延拓到积空间 $\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}^*$. 这个思想曾被 Bergman [B. 22] 和 Vekua [V. 1～3] 用来导出 (0.15) 的解的表达式. 给出了 Bergman 有关这个课题的工作的一个相当完全的介绍,包括对他的 E-函数的存在性证明,以及 E-函数同特殊的初值问题的解的关系的讨论. 也指出了什么是 E-函数方法, Diaz 和 Ludford 方法 [D. L. 1～5], 以及 Vekua 的函数论方法 [V. 3] 之间的联系. 这里最后提到的方法不要同 Vekua 在 [V. 4～6] 中论述过的广义解析函数方法, 或者同在 [C. H. 1, 卷 II] 和 [B. 30～35] 中论述过的 Bers 的伪解析函数相混淆.

Vekua 的函数论方法涉及到要得出形式上的双曲型方程的 Reimann 函数的类似物,这个形式上的双曲型方程是从 (0.15) 由引进变量 z, z^* 而得到的,也就是这样的方程

$$\boldsymbol{E}[U]\equiv U_{zz^*}+A(z, z^*)U_z+B(z, z^*)U_{z^*}+C(z, z^*)U=0, \tag{0.16}$$

其中新的诸系数都与原先方程的各系数以简单的方式相联系(第三章,第 1 节). 为了得出 (0.16) 的 Reimann 函数,就必须研究多重 Volterra 积分方程,并且要证明其解在 $\mathbb{C}^4$ 中的一个适当积空间内是全纯的(第三章, 第 4 节). 在这一章里包含了上述理论的完整论述以及利用某些泛函分析方法作出的若干个推广 [A. B. 1], [A. G. 2], [A. G. H. 2], [S. 8]. 在引进适当的 Banach 空

间以及利用不动点定理后，可以得到(0.15)在大范围内存在这样唯一解的充分条件，这个解在解析曲线 $\mathscr{C}_i(i=1, 2)$上满足广义 Goursat 条件

$$\alpha_{i1}u_x+\alpha_{i2}u_y+\alpha_{i0}=f_i, \tag{0.17}$$

而

$$\mathscr{C}_1\cap\mathscr{C}_2\equiv\{(0, 0)\}, u(0, 0)=u_0.$$

对于问题的正确提法的条件，包含着系数 α_{ij} 不能都是实的，并且进一步，它们的模必须满足某些不等式. 这个方法推广到正规化非线性椭圆型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x, y, u, u_x, u_y), \tag{0.18}$$

在小范围内允许成立存在性定理和唯一性定理(第 5 节).

在 Vekua 方法的论述中，我们也包括进了 Henrici [H. 6, 8] 的有趣的贡献，Henrici 利用 Vekua 公式来讨论方程(0.15)带有 Cauchy 数据的问题. 这个特殊的问题不是在第三章里，而是在第四章的第 4 节中出现，那儿，我们也包括了若干个新的积分表达式，这些表达式是 Henrici(利用这些结果)为解奇异偏微分方程

$$\boldsymbol{h}_{\mu\nu}[u]\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2\mu}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2\nu}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+k^2u=0 \tag{0.19}$$

而得到的[H. 4, 8]，这里的 μ, $\nu>0$，且 k 是实数.

第四章是专心致力于研究两个或多个自变量的奇异椭圆型偏微分方程. 讨论的第一个偏微分方程就是 GASPT(0.9). 利用我们的方法，这个方程是最容易处理的一个，因而，对这种情况已发展成更完整的理论 [G. 22]. 除了对 GASPT 所发展的函数论以外，也要介绍近似理论. 函数论方法还可应用到更一般的奇异微分方程(0.11)和(0.12)上. 在这两种情形，得到了关于全部解的奇性位置以及增长条件的定理.

作为第四章的结束，我们给出了应用 Weinstein 函数论方法于 GASPT 算子和 EPD 算子以及方程(4.8.1), (4.8.2)的简明论述. Weinstein 方法与本专著中所采用的方法本质上是不同的；但是，他的结果在简化边值问题为较简单形式时是重要的[W. 6, 8]，并且能够结合其它的函数论方法来得出新的表示公式(4.8.5). 与方程(4.8.8)的解有关的 Weinstein 公式对为得出新的积分算子——这个算子保存古典函数论的各种性质——而言不是全部被利用了的.

这本专著的最后一章涉及到阐述在量子力学和量子场论的散射问题中如何应用函数论方法. 第一节介绍位势散射初步以及对于散射振幅的相移公式的标准求导. 散射振幅得出为形如

$$A(k^2,\ \xi)=\sum_{l=0}^{\infty} a_l(k^2)P_l(\xi);\quad (k,\ \xi)\in\mathbb{C}^2$$

的 Legendre 级数，对于一些物理上有关的散射位势其解析性质已被研究过了. 利用关于(0.12)的解所得到的知识，位势散射问题可推广到与方程

$$\boldsymbol{L}_{\lambda,s}^{(n)}[\Psi]=V(r)\Psi,\qquad r^2=x_1^2+\cdots+x_n^2+\rho^2$$

以及当 $r\to\infty$ 时的广义放射条件

$$\Psi(\boldsymbol{X})\approx e^{i(\mathbf{K},\mathbf{X})}+\frac{f(k;\theta)}{r^{\frac{1}{2}(n+s)}}e^{ikr}+O(r^{-\frac{1}{2}(n+s)-1})$$

有关的高阶分数维问题. 利用由 Newton[N. 12, 13]对旋转质点的散射所给出的公式，以及也利用他的无伸缩性多重通道散射的公式[N. 9, 12]，就显现出函数论方法如何有效地能应用于这些一般的情形. 也给出了借助于 Newton[N. 11, 13]和 Sabatier[S. 1, 2]方法，关于逆散射问题的简洁的论述.

对于相对论散射的情形，我们利用 Mandelstam 假设以及弹性酉积分来研究散射振幅的解析性质. 这里所用的方法，由于引

进了积分算子以及由 Gilbert 等人所采用的方法 [G. H. A. 1], [A. G. H. 1], 是一种改进了的型式.

加在校样中的注解: S. Abhyankar 和 C. Risk 在他们的文章"代数曲线理论和包络曲线"(待发表, 数学物理中的分析方法专题讨论会会刊, Indiana 大学出版社, 1969)中, 增加了关于多变量积分的 Hadamard-Gilbert 分析的某些评论.

积分算子方法对经典物理问题, 即流体动力学, 电磁学以及弹性力学的有趣的应用, 能够在 von Krzywoblocki 的工作 [V. K. 1~8] 中找到.