

高等学校试用教材

常微分方程与无穷级数

北京大学数学力学系
高等数学教材编写组

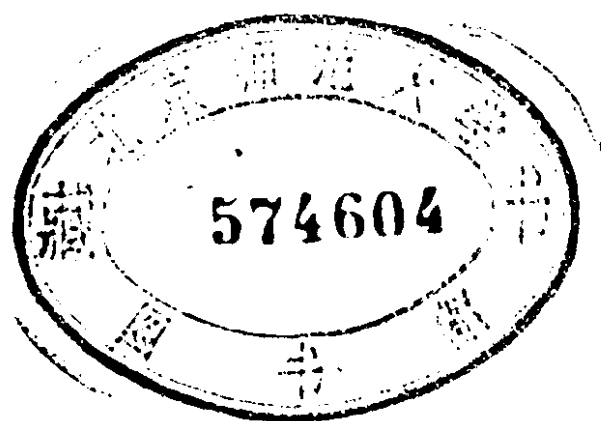
人民教育出版社

高等学校试用教材

常微分方程与无穷级数

北京大学数学力学系
高等数学教材编写组

JY11119/24



人民教育出版社

北京·1978

北京大学数学力学系高等数学教材编写组所编这套高等数学试用教材共分三册：《一元微积分》、《常微分方程与无穷级数》、《多元微积分》。在内容上三册是彼此衔接的。本书是中间一册，主要内容为常微分方程、无穷级数、富氏级数(包括富氏积分)。其中画*的章节可作为选学内容。

本书可作为物理类专业高等数学试用教材。

常微分方程与无穷级数

北京大学数学力学系
高等数学教材编写组

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北人民印刷厂印装

*

1978年4月第1版 1978年8月第1次印刷

书号 13012·0161 定价 0.63 元

目 录

第一章 常微分方程	1
引言	1
第一节 一般概念	2
什么是微分方程	2
常微分方程的解	4
常微分方程的积分曲线	9
小结	12
第二节 可分离变量的方程	13
可分离变量的微分方程及其解法	13
用微元分析法列方程	26
第三节 常系数齐次线性方程	26
概念与方法	26
二阶常系数齐次线性方程	29
*高阶常系数齐次线性方程	41
第四节 常系数非齐次线性方程	44
非齐次线性方程的通解结构	46
待定系数法求非齐次线性方程的特解	49
应用举例	59
第五节 常数变易法	69
一阶线性方程	70
二阶常系数非齐次线性方程的常数变易法	73
欧拉方程	78
第六节 微分方程组	80
第七节 微分方程的数值解法	84
欧拉折线法	85
龙格-库塔法	87
第二章 无穷级数	90
第一节 数值级数	90
等比级数	96



无穷级数的一般概念	93
无穷级数的收敛概念	94
*级数收敛概念的精确描述	99
收敛级数的简单性质	105
级数收敛的判别法	108
第二节 幂级数	119
幂级数的基本概念	119
幂级数的收敛半径	121
幂级数的微商和积分	124
函数的幂级数展开式: 泰勒级数	127
函数在任意点处的泰勒展开式	138
第三节 幂级数的应用	142
函数的多项式逼近	142
计算定积分的近似值	146
关于欧拉公式	147
微分方程的幂级数解法	148
*第四节 函数项级数的一致收敛性	153
一致收敛性概念	153
函数项级数的逐项微商与逐项积分	159
第三章 富氏级数	166
第一节 周期函数的富氏展开式	166
周期现象与周期函数	166
周期函数的富氏级数展式	171
奇、偶函数的富氏展式	182
函数的周期性开拓	186
第二节 复数形式的富氏级数	192
复数形式的富氏级数	193
频谱分析	198
第三节 富氏积分	202
*第四节 富氏变换	214

第一章 常微分方程

引 言

在实际工作中,我们经常遇到这样一类问题:已知物质在一定条件下运动、变化,要寻求它的运动、变化的规律。例如,某物体在重力作用下自由下落,要寻求下落距离随时间变化的规律;又如,火箭在发动机推动下在空间飞行,要寻求它飞行的轨道(是空间中的一条曲线)等等,都是这一类问题。物质运动、变化的规律在数学上是用函数关系来描述的,因此,上述问题从数学角度来看,就是要去寻求满足某些条件的一个或几个未知的函数。

早在初等代数中,我们就遇见寻求一个或几个未知量的问题。当时,我们是把所研究的问题中已知的量和未知的量(一般用 x , y , $\dots$ 等字母代表)之间的关系找出来,列出包含未知量的一个或多个代数方程式,然后设法解出这些方程式,获得未知量的值(即代数方程式的解)。

现在我们所碰到的问题复杂多了。因为现在未知的不是一个或几个固定不变的数值,而是一个或几个未知的函数。但是上面所说的基本思想却仍然是适用的。这就是说,我们把所研究的问题中已知函数和未知函数之间的关系找出来,列出包含未知函数的一个或多个方程式,然后设法解出这些方程式,获得未知函数的表达式。

由于物质运动的规律是跟它运动的速率(即函数的导数)密切相关的,因而根据实际问题所列出的方程中就常常包含有未知函数的导数,这类方程就是本章所要研究的微分方程。根据实际问

题中的条件列出微分方程;设法解出微分方程;研究微分方程的解(是一个或多个函数关系式)的性质,这就是微分方程理论中的三项基本任务。

在本章中,我们向读者介绍微分方程中的一些最基本的概念和一些简单微分方程的解法。

第一节 一般概念

什么是微分方程

为了使读者了解什么是微分方程以及在生产实践和科学实验中如何提出微分方程的问题,我们先来讲述下面几个实例。

例1 我们假设:已知在真空中,自由落体的速度与时间成正比。试根据这一点确定出自由落体的运动规律。

解 设 $s(t)$ 为自由落体运动的路程随时间变化的函数关系式,现在它是未知函数。自由落体运动的速度可写为 $\frac{ds(t)}{dt}$, 这是一个未知函数的导数,它与时间 t 成正比,比例常数记为 g , 就有:

$$\frac{ds}{dt} = gt \quad (1)$$

这里出现的是一个包含未知函数的导数的方程式,这就是微分方程。

例2 放射性元素的质量随着时间的推移而逐渐减少,这种现象称为衰变。实验告诉我们,每一时刻铀的衰变率与该时刻铀的质量成正比。试确定铀的衰变规律。

解 若铀在时刻 t 的质量是 $N=N(t)$, 则铀的衰变率就是 $\frac{dN}{dt}$, 因而

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (2)$$

其中 λ 是比例常数, 由实验测定; 取负号是因为衰变率总是小于零的。

从(2)式中解出 $N=N(t)$ 就可得到铀的衰变规律。

例 3 在力 F 的作用下, 物体做直线运动, 设它运动的路程为 $s(t)$, 根据牛顿第二定律有

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F \quad (3)$$

若已知作用力 F , 就可以从这个式子中解出 $s(t)$ 来。

作用力可以有各种各样的力, 如

1) 重力, 即 $F=mg$, (3)式变为 $m \frac{d^2 s}{dt^2} = mg$;

2) 阻力, 设阻力与速度成正比, 则 $F=-kv=-k \frac{ds}{dt}$, (3)式变为 $m \frac{d^2 s}{dt^2} = -k \frac{ds}{dt}$;

3) 弹性恢复力, 通常弹性恢复力是和位移成正比的, $F=-ks$, (3)式变为 $m \frac{d^2 s}{dt^2} = -ks$;

4) 简谐力, 即 $F=A \sin \omega t$, (3)式变为 $m \frac{d^2 s}{dt^2} = A \sin \omega t$ 。

有时物体同时受到几个力的作用, 这时(3)式就会出现更复杂的形式。

以上诸例有一个共同点, 就是运动规律是未知的(用某一个未知函数代表它), 但是我们利用物理学的一些规律, 可以列出一个包含有未知函数及其导数的方程式来, 从而为解决问题提供了基础。以后我们只要集中精力研究所列出的方程式, 设法解出其中所包含的未知函数就可以了。

定义 含有未知函数的导数的方程式称为微分方程。未知函数是一元函数的微分方程称为常微分方程。

上面列出的方程(1)、(2)、(3)是常微分方程的简单例子。

在一个微分方程中未知函数的导数的最高阶数称为该微分方程的阶。例1和例2中列出的是一阶常微分方程，例3列出的是二阶常微分方程。如果一个微分方程中未知函数的导数的最高阶数为 n ，就称为 n 阶微分方程。例如

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots \\ + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) = f(x)$$

其中 $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, $\cdots$, $a_1(x)$, $a_0(x)$, $f(x)$ 是已知函数, 且 $a_n(x) \neq 0$, 这就是未知函数 y 的一个 n 阶方程。

常微分方程的解

研究微分方程的一个主要任务是设法把它的解找出来。那么, 什么叫做微分方程的解呢?

在初等代数中, 我们已经知道: 如果让未知量 x 取某个特定值(即令 $x=a$)代入代数方程后, 使该代数方程转化为恒等式, 那么这个特定的值就称为这个代数方程的解。微分方程解的含义与此类似。不过我们要注意: 在微分方程中未知的是一个函数, 因此, 它的解也应当是一个函数, 而不是一个固定的数值。随之而来的, 还有一系列新的较为复杂的问题, 我们下面分别来阐述这些问题。

一、微分方程解的定义

定义 如果把某一个函数代入一个微分方程后, 使该方程转化为一个恒等式, 那么这个函数称为该微分方程的一个解。

例 4 在微分方程

$$\frac{dy}{dx} = xe^{2x}$$

中, 如果令 $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x}$, 代入方程左边, 得

$$\begin{aligned}\text{左边} &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) e^{2x} \right] = \frac{1}{2} e^{2x} + \left(x - \frac{1}{2} \right) e^{2x} \\ &= xe^{2x} = \text{右边}\end{aligned}$$

故 $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x}$ 是原微分方程的一个解。

因为任意常数 C 的导数为零, 所以, 函数

$$y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} + C$$

也都是原微分方程的解。

由此可知, 微分方程的解并不是唯一的, 而是存在着无穷多个函数同时都是它的解。所以, 一个微分方程的全部解构成一个函数族。

例 4 是一种最简单的常微分方程。它的一般形式是

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (4)$$

其中 $f(x)$ 是一个已知函数。这种类型的方程称为 可直接积分的方程。这是因为从 (4) 式可知 y 应是 $f(x)$ 的原函数, 故

$$y = \int f(x) dx + C \quad (5)$$

即 $f(x)$ 的不定积分就是方程 (4) 的全部解。在一元微积分中我们所学习的不定积分, 实际上就是求解最简单的一类微分方程。有些微分方程虽然不象 (4) 这样简单, 但经过化简, 可以变成 (4) 的形式, 这些方程也可看作可直接积分的方程。

例5 在微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

中, 令 $y=x^2$, 代入方程, 得

$$\text{左边} = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x = \frac{2x^2}{x} = \text{右边}$$

故 $y=x^2$ 是原微分方程的一个解。

读者试验证: 对任意一个常数 C , 函数

$$y=Cx^2$$

也是此微分方程的解。由此知该微分方程的解也有无穷多, 它们构成了一个函数族。

但是要注意, 函数

$$y=x^2+C \quad (C \neq 0)$$

已经不再是原微分方程的解了。所以, 不要误认为微分方程的解简单地加上一个任意常数后还是解。这在一般情况下是不对的。

寻求一个微分方程的解的过程称为解微分方程, 又称积分微分方程。

二、微分方程的特解与通解

下面我们来研究微分方程解的一些较为复杂的问题。

先以自由落体运动方程(1)为例:

$$\frac{ds}{dt} = gt$$

这是一个可直接积分的方程, 它的解是

$$s(t) = \int gt dt = \frac{1}{2}gt^2 + C \quad (6)$$

其中包含一个任意常数 C 。它代表着一族函数, 还不是一个完全确定的函数, 因而还不能满足实际工作的需要。

为什么解还不能完全确定呢？我们结合实际问题来分析一下。在自由落体问题中，如果只知道速度与时间成正比，那还是不能完全知道路程随时间变化的情况的。因为，比如一块石头从五楼上掉下来，一秒钟后落到四楼，而从三楼掉下来的石头，一秒钟后就是落到二楼了。所以，不知道石头一开始处在什么位置，就无法确定它一秒钟后落到什么地方。为了要得到自由落体运动路程随时间变化的关系式，就必须对方程(1)再附加一定的条件，比如说，附加上： $t=0$ 时物体的位置 $s(0)=s_0$ (或者写成 $s(t)\Big|_{t=0}=s_0$)，即已知物体的初位移，将它代入(6)式：

$$s(0)=C=s_0$$

确定出任意常数 C 的值，于是就可以得到自由落体运动规律的完全确定的解答：

$$y=\frac{1}{2}gt^2+s_0 \quad (7)$$

上面的例子告诉我们，为了获得符合实际工作需要的完全确定的解，还必须对微分方程附加一定的条件，这些条件称为定解条件。附加了定解条件的微分方程求解问题称为定解问题。

定义 一个常微分方程的满足定解条件的解称为它的特解。

比如，关于自由落体运动方程的定解问题应当是这样表述的：

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt}=gt \\ s\Big|_{t=0}=s_0 \end{cases} \quad (8)$$

满足上述定解问题的特解就是(7)式。

在定解条件中，比较常见的一种，就是已知物体在运动的某一瞬间($t=t_0$)所处的状态。比如已知初位移、初速度等等，这类定解条件称为初始条件。附加了初始条件的定解问题称为初值问

题。(8)式是关于自由落体运动的初值问题。

我们再看例2。(2)式是任意一块铀的衰变规律 $N(t)$ 所满足的微分方程。要求出质量为 N_0 的铀的衰变规律 $N(t)$ 的确定解答,还必需对方程(2)附加上初始条件

$$N(t)|_{t=0} = N_0$$

求出满足这个初始条件的特解。因此,关于铀的衰变规律应提出如下的初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -\lambda N \\ N|_{t=0} = N_0 \end{cases}$$

这个初值问题的解法放到下一节中去讲。

上面举出的例子都是一阶方程。一阶方程只需要一个定解条件,而高阶方程就需要多个定解条件。一般说,一个 n 阶方程,应有 n 个定解条件。特别地,一个 n 阶方程的初值问题应当附有 n 个初始条件。即:如果 $y(x)$ 是某个 n 阶常微分方程的初值问题的解,则要求它满足如下条件

$$y \Big|_{x=x_0} = a_1, \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} = a_2, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \Big|_{x=x_0} = a_n \quad (9)$$

其中 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是预先给定的常数。

上面我们已经求得自由落体运动的初值问题的解,所使用的办法是:先求出微分方程(1)的带有任意常数 C 的解,然后把初始条件代进去,确定出 C 的值,从而获得所需要的特解。这个办法具有代表性。一般说来,一个初值问题的求解过程应当分为两步:第一步,先求出该微分方程的带有一个或多个任意常数的解的表达式;第二步,把初始条件代入,确定出其中任意常数的值,求得特解。显然,关键是第一步,只要能求得解的一般表达式,那么,进一步确定特解就较为容易了。

定义 一个 n 阶常微分方程的解的表达式中, 如果包含有若干个任意常数, 使对在一定范围内任意指定的初始条件(9), 我们都能适当选定这些任意常数的值, 而获得该初值问题的特解, 那么就称这个解的表达式为该微分方程的通解。

例如, 表达式(6)是自由落体运动方程(1)的通解。对于任意指定的初始条件

$$s|_{t=t_0} = s_0$$

我们都能确定出任意常数 C 的值, 从而得到满足这一初始条件的特解(请读者自己计算一下)。

一个 n 阶常微分方程的初值问题中包含有 n 个初始条件, 所以, 它的通解表达式中, 也应当相应地包含有 n 个任意常数, 而且这 n 个任意常数还应当是不能相互合并(即相互独立)的。

常微分方程的积分曲线

一个常微分方程的每一个解都是一个一元函数 $y=y(x)$, 在平面直角坐标系中把这个函数的图象作出来, 得到一条平面曲线, 称为该常微分方程的一条积分曲线。已经知道: 一个常微分方程的解有无穷多个, 它对应于平面上无穷多条积分曲线, 称为该微分方程的积分曲线族。如果我们求得某常微分方程的通解, 那么, 只要让其中的任意常数取确定的数值, 就可以画出一条积分曲线。让任意常数取所有可能的值, 就得到这个微分方程的积分曲线族。下面举两个例子。

例6 求作常微分方程

$$\frac{dy}{dx} = xe^{2x}$$

的积分曲线族。

解 这是一个可直接积分的方程, 其通解为

$$y = \int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) e^{2x} + C$$

让任意常数 $C=0$ ，得到一个解

$$y = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) e^{2x},$$

首先来作出它所对应的积分曲线。

我们乘这个机会把函数作图法复习一下。

1) 求一阶导数，确定函数的升、降和极值。

$y' = x e^{2x}$ ，利用它可判断出函数的升、降区域和极值点，列表如下：

自变量的值	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
导数 y' 的值	< 0	$= 0$	> 0
曲线性状	下降	取极小值 $y(0) = -\frac{1}{4}$	上升

2) 求几个特殊点的函数值。

零点： $x = \frac{1}{2}$ 时， $y = 0$ 。

无穷远点：

当 $x \rightarrow -\infty$ 时， $y \rightarrow 0$ ，故曲线以横轴负方向为渐近线；

当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $y \rightarrow +\infty$ 。

根据以上两点，可以把曲线的大致形状描出来。如果要进一

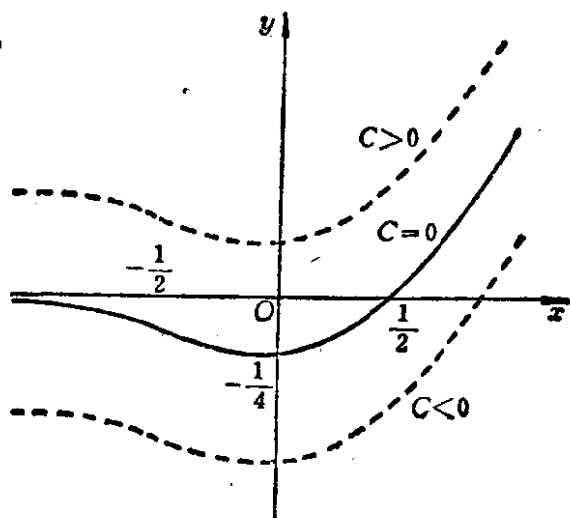


图 1-1

步把曲线的性状搞得更清楚，就需要考虑二阶导数。

3) 求二阶导数，判断曲线的凹凸性与扭转点。

$y'' = (2x + 1)e^{2x}$ 。同样列表如下：

自变量的值	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, +\infty)$
二阶导数 y'' 的值	<0	$=0$	>0
曲线性状	凸	转折点	凹

所作出的积分曲线如图 1-1 中实线所示。把这条积分曲线沿 y 轴方向上、下平移 $|C|$ 个单位 (C 为任意一个常数), 就得到原微分方程的积分曲线族 (参看图 1-1 中的虚线)。

请读者仿照上面的办法, 自己作出例 1 中自由落体运动方程的积分曲线族。

例 7 试验证 $u_0 = Ge^{-\frac{1}{RC}t}$ (G 是任意常数) 是微分方程

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_0 = 0$$

的通解, 并画出积分曲线族。

解 把 $u_0 = Ge^{-\frac{1}{RC}t}$ 代入方程, 得

$$\begin{aligned} \text{左边} &= RC \frac{d}{dt} (Ge^{-\frac{1}{RC}t}) + Ge^{-\frac{1}{RC}t} \\ &= RC \cdot G \cdot \left(-\frac{1}{RC}\right) e^{-\frac{1}{RC}t} + Ge^{-\frac{1}{RC}t} \\ &= 0 = \text{右边} \end{aligned}$$

故 $u_0 = Ge^{-\frac{1}{RC}t}$ 是原微分方程的解, 其中包含有一个任意常数 G , 而原微分方程是一阶的, 所以它就是通解。

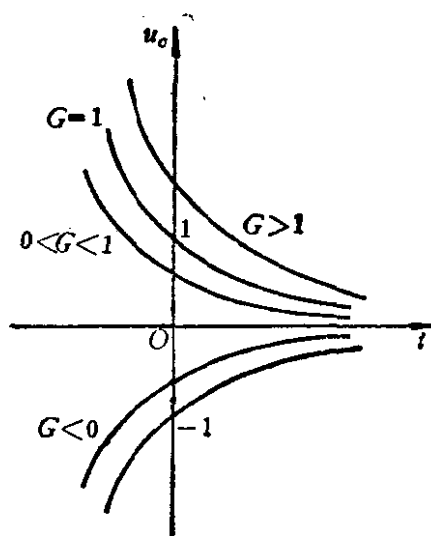


图 1-2

应用函数作图法不难作出此常微分方程的积分曲线族 (参看图 1-2), 读者自己练习作一下。

小 结

现在将本节中讲到的微分方程的一些基本概念作一简单的小结:

1. 微分方程和初等数学中的代数方程既有共同点,又有根本性的差异。

共同点是:在所研究的问题中都包含有一些未知的量,我们找出已知的量和未知的量之间的关系,列出一个或几个包含未知量的等式,然后从这些等式出发来确定未知的量。正因为它们有这一共同点,所以两者都称为方程。

不同点是:代数方程,从其总体来说,处理的是相对静止中的量,其中涉及的已知量或未知量一般讲都是固定不变的;而微分方程处理的是变化中的量,描述的是客观物质的运动过程,其中处理的已知量和未知量是函数。因此,代数方程的解是一个或几个特定的数值,而微分方程的解是函数关系式。这是两者的根本区别。

2. 微分方程的解有无穷多。一个 n 阶常微分方程的解中如果恰好包含 n 个独立的(即不能互相合并的)任意常数,这个解的表达式就是方程的通解;在通解中让任意常数取确定的值之后,就得到特解。一个特解对应于一条积分曲线,通解对应于积分曲线族。

3. 为了确定出一个常微分方程的合乎实际工作需要的特解,必须对它再附加一定的条件(例如初始条件),微分方程是几阶的,就应附加上几个条件。如果附加的条件都是初始条件,就称为初值问题。

习 题 一

1. 什么叫微分方程?指出下列式子,哪些是微分方程?哪些是微分恒