上海师范大学数学系主编

大学本科函授教材

实变函数与泛函分析

华东地区省（市）属师范大学协编教材

上册

张一鸣 杨有锠 王晓斐 徐际宏 王纯洁 李贤瑜 编

上海科学技术出版社

大学本科函授教材

实变函数与泛函分析

上　册

上海师范大学数学系主编

张一鸣　杨有锟　王晓斐
徐际宏　王纯洁　李贤瑜　编

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是根据教育部1984年4月颁发的"中学教师进修高等师范数学专业本科实变函数论与泛函分析教学大纲"，参照现行高等师范院校同课程教学大纲编写而成的.

全书分上、下两册. 上册为实变函数论，内容包括集合、点集、测度论、可测函数、勒贝格积分、微分与积分. 下册为泛函分析，内容为距离空间(包括赋范线性空间)、有界线性算子与连续线性泛函、希尔伯特空间几何学初步. 全书共九章.

本书取材力求基本，叙述力求深入浅出，并尽可能做到直观易懂和严密处理相结合. 在例题与习题的编选方面，注意与基本内容紧密配合，并给出详尽的解答.

大学本科函授教材
实变函数与泛函分析
上 册
上海师范大学数学系主编
张一鸣 杨有错 王晓斐 徐际宏 王纯洁 李贤瑜 编
上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路 450 号)
新华书店上海发行所发行 无锡县人民印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 9 字数 199 000
1988年8月第1版 1988年8月第1次印刷
印数：1— 14,000

ISBN 7-5323-0432-9/O·33
定价：2.20 元

出 版 说 明

为了改变长期以来高等师范院校数学专业本科函授缺少合适教材的状况，提高函授教育的质量，华东地区七所师范大学：山东师范大学、上海师范大学、江西师范大学、安徽师范大学、南京师范大学、浙江师范大学及福建师范大学的数学系联合编写了高等师范院校数学专业本科函授教材．按照教育部颁发的数学专业本科函授教学大纲，结合函授教育的特点，我们首先编写了《数学分析选论》、《复变函数论》、《近世代数》、《微分几何》、《概率论与数理统计》、《常微分方程》、《实变函数与泛函分析》等七本教材．这套教材的内容系统性强，论证严谨，条理清晰，深入浅出，便于自学．每章章前有内容提要，章后有小结，每章均配有复习题，有助于学生通过练习加深理解．

这套教材也可以作为大专院校的在校本科生、业余大学学生的教材或教学参考书，也可供广大青年作自学参考之用．

华东地区七所师范大学
函授教材协作编写组

前　　言

本书是根据原教育部1984年4月颁发的“中学教师进修高等师范数学专业本科实变函数论与泛函分析教学大纲”，参照现行高等师范院校同课程教学大纲编写而成的．全书分上、下两册．上册为实变函数论，以一元实变函数的勒贝格测度和积分为中心内容；下册为泛函分析初步，以距离空间为重点，介绍泛函分析最初步的基础知识．

“实变函数与泛函分析”是大学数学系本科的一门重要的专业基础课，对于进一步学习近代数学理论、加深对数学分析及其它有关课程的理解有着至关重要的作用．本课程概念性强、内容抽象、推理严谨．考虑到本书主要对象是以自学为主的函授或业余进修的学员，我们在编写本书的过程中，注意到以下几点：

首先，在材料的取舍与安排上，力求抓住最基本的内容及主要发展线索，细致地论述，详尽地论证，引导读者把握基本概念、基本理论和基本方法．有些定理我们在证明前给出必要的分析，有些定理（如第一章伯恩斯坦定理、第四章鲁金定理和叶果洛夫定理、第六章定理2.5等）证明难度稍大，本书采用小字排印，教师可根据教学具体情况决定取舍．另外，还有些定理（如第六章勒贝格微分定理、第七章距离空间完备化定理、第八章巴拿赫逆算子定理等）证明繁冗，本书干脆叙而不证．此外，如不可测集、勒贝格积分的几种定义、霍尔德不

等式和闵可夫斯基不等式等内容，本书均作为附录，供读者自己参阅．对泛函分析部分，我们的重点是叙述距离空间（赋范线性空间作为其特殊的一类处理）的理论，而对有界线性算子与希尔伯特空间的内容只介绍其梗概．总之，通过不同方式的安排形成内容的不同层次，以突出中心，也便于教师和学员根据具体情况作出适当选择．

其次，在内容的处理与论述上，力求简洁明快、深入浅出，注意有关概念的比较与联系．例如，我们从同黎曼积分有关内容的比较和联系中引出和阐明了勒贝格测度和积分．又如在叙述距离空间与希尔伯特空间的一些概念时，我们经常与欧几里得空间的相应概念进行对比．在重要论题的立论上，注意使抽象处理具体化，以利于读者接受并为读者留下开拓思维的余地．例如，本书第三章对于勒贝格测度的阐述，采用的是，先由开区间覆盖构造得到实直线上任一点集的外测度概念，再用卡拉皆屋铎利条件得到可测集类并在其上建立测度的方法．也就是说，采用将抽象测度建立与延拓过程具体化的方法．这样，篇幅较精简，也为学员进一步学习抽象测度理论提供了具体模型．在介绍和证明重要定理时，我们注意借助例子或附注来说明定理的作用和证明的关键，以培养读者逻辑推理的能力和缜密思维的习惯．另外，本书在叙述一些概念或概念之间的关系时，尽量利用几何直观，列出必要的图表．

为了帮助读者复习和掌握主要的内容和必要的证明技巧，本书在每章后面都有“复习与研究”，其中包括本章内容的系统小结，并对部分内容作了一些必要的引伸和发展．在实变函数部分有比较丰富的例题以供借鉴．

本书在例题与习题的编选上，力求与基本内容紧密配合，

注意基本方法的训练. 每节后面的习题都是比较基本的，每章还列有复习题. 复习题大多带有一定的综合性质，其中只有少数可能难度稍大，有的我们已给出必要的提示. 书末附有全部习题的解答，以供读者在独立解题之后参阅.

本书由上海师范大学主编，江西师范大学、山东师范大学、安徽师范大学协编. 其中第一、三章由王晓斐副教授编写；第二、四章由徐际宏副教授编写；第五、六章由杨有锠副教授编写；第七章由张一鸣副教授编写；第八章由王纯洁副教授编写；第九章由李贤瑜副教授编写. 上册（实变函数论）由杨有锠、王晓斐统稿，下册（泛函分析）由张一鸣统稿，并由张一鸣对全书作了统一处理.

本书由程其襄教授和应制夷教授审阅.

欢迎大家对本书提出意见与批评.

编者　1987年3月

目 录

第一章 集 合

集合论是实变函数论的基础. 自十九世纪末叶，德国著名数学家康托 (Georg Cantor 1845～1918) 对集合论作了奠基性工作以来，集合论已渗透到所有数学科目中(甚至在自然科学其它学科及社会科学中也被广泛应用)，成为学习现代数学不可缺少的工具. 它本身也成为数学的一个重要的分支. 实变函数论是在集合的理论渗透到数学分析的基础上产生的. 所以，在这一章内，我们将要介绍一些学习本课程所必须的最基本的集合论知识.

本章的基本内容有两部分：一、集合的概念及其运算；二、应用集的对等引入了集的基数的概念，它是有限集元素个数的推广. 随后我们具体介绍两种无限集的基数.

§1.1 集合及其运算

一、集合与元素

集合或集是数学中一个原始的概念，即它不能用别的，更简单的概念来定义它. 对通常所讨论的集可以用“具有某种特殊性质的对象的全体”加以描述. 例如，正整数集、整数集、有理数集、实数集、[0, 1]闭区间内的点构成的集合、整系数多项式全体构成的集合、定义在[0, 1]上连续函数的全体构成的集合等等，都是数学中常见的集合的例子. 集合中的每

一个对象称为这个集的**元素**.

我们常用大写字母 A、B、X、Y、… 表示集，而用小写字母 a、b、x、y、… 表示元素. 若 x 是集 A 的元素，我们说 x **属于** A，记作 $x\in A$. 若 x 不是集 A 的元素，我们说 x **不属于** A，记作 $x\notin A$. 应该指出，给定一个集 A 后，对任何一个对象 x，"x 属于 A"或"x 不属于 A"这两者必居且仅居其一. 也就是说，当我们使用集的概念时，哪些对象是这个集合中的元素必须是明确的. 例如，"相当大的正整数全体"并不构成一个集合，因为"相当大"的说法很模糊，界限不清楚，从而难以断言一个正整数是否在这个全体之中.

对正整数集、有理数集、整数集、实数集，我们通常分别用记号 $\mathbb{N}$、$\mathbb{Q}$，$\mathbb{Z}$、$\mathbb{R}$ 来表示它们. 一般地，若一个集需要明确指出它的元素所具有的某种性质 $p(x)$ 时，可用描述法记为

$$\{x; p(x)\},$$

即这个集由这样一些元素 x 所组成：这些 x 满足条件 $p(x)$. 另外，当集合中所有的元素能一一写出时，也可采用列举在大括号内的罗列法，如

$$\{a, b, c\},$$
$$\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$$

等等来表示.

举几个例子. 方程 $x^2-5x+6=0$ 的根的全体所成之集可用 $\{x; x^2-5x+6=0\}$ 来表示，也可用 $\{2, 3\}$ 来表示. 实轴上左端点为 0 的开区间全体所成之集可用 $\{(0, a); a>0\}$ 来表示，但不能用罗列法了. 若 $f(x)$ 是定义在集 E 上的实函数，则集 E 中使 $f(x)$ 的值不小于 c 的元素 x 所成的集合可用

$$\{x\in E; f(x)\geqslant c\}$$

表示，也可简记为

$$E\{x; f(x)\geqslant c\}\text{或 }E\{f\geqslant c\}.$$

必须注意，在使用罗列法时，$\{a, b\}$与$\{b, a\}$表示同一集. 即罗列法并不考虑集合中元素排列的次序. 又$\{a, a, a\}$并不是三个元素 a 组成的集合，它只有一个元素 a，可记作$\{a\}$. 今后约定，集合中各个元素应是互不相同的. 另外，a 与 $\{a\}$ 的含义是不同的，前者是一个元素，后者是仅由一个元素组成的集合，常称为**单元集**.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 例如，$\{x; |x|<0\}$就是空集.

若集合中的元素只有有限个，则称之为**有限集**(我们约定把空集也归为有限集)，不是有限集的集合称为**无限集**.

二、集合的包含关系

设 A、B 是两个集合，若 A 的元素都属于 B，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A. 于是，断言 A 不是 B 的子集，即不是 A 的所有元素都属于 B，当且仅当"存在 $x\in A$ 而 $x\notin B$". 这时可记 $A\not\subset B$ 或 $B\not\supset A$. 例如，

$$\{a\}\subset\{a, b\},$$

$$\{a, b\}\subset\{a, b\},$$

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R},$$

对任意正整数 n，有

$$\left\{x; x>\frac{1}{n}\right\}\subset\{x; x>0\},$$

若 $R[a, b]$、$C[a, b]$分别表示在$[a, b]$上黎曼可积函数全体及$[a, b]$上连续函数全体，则

$$C[a, b]\subset R[a, b].$$

对区间 $A=(a, b]$, $B=[a, b)(a<b)$来说，有 $A\not\subset B$ 且 $B\not\subset A$.

显然，$\varnothing$ 是任何集的子集，因为若 $\varnothing$ 不是某集 A 的子集，就要有一个元素属于 $\varnothing$ 而不属于 A，但这是不可能的.

设 A、B 是两个集，若 $A\subset B$ 及 $B\subset A$ 同时成立，则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$. 这时 A、B 的元素完全相同. 例如

$$\{a, b\}=\{b, a\},$$

$$\{x;\ |x|\leqslant 0\}=\{x;\ |x|=0\}=\{0\},$$

$$\mathbb{N}=\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}.$$

若 $A\subset B$，但 $A\neq B$(这时一定有 $B\not\subset A$)，则称 A 是 B 的**真子集**，也可说成 A **真包含于** B 或 B **真包含** A，记作 $A\subsetneqq B$. 于是，断言 A 是 B 的真子集，当且仅当"A 的元素都属于 B，且存在 $x\in B$，有 $x\notin A$". 例如，

$$\{a\}\subsetneqq\{a, b\},$$

$$\mathbb{Q}\subsetneqq\mathbb{R},$$

$$C[a, b]\subsetneqq R[a, b].$$

下述定理叙述了集合包含关系的基本性质. 其结论是明显的.

定理 1.1 对任何集合 A、B、C，恒有

(1) $A\subset A$.

(2) 若 $A\subset B$, $B\subset C$，则 $A\subset C$.

我们有时也会遇到以集为元素的集. 例如区间$(0, 1)$是一个集，它是实数集的一个子集，而$\{(0, a);\ a>0\}$就是以实数集的一些子集为元素的集合. 通常我们都在一个事先确定的集合上来研究和讨论一些问题，这个集合就称为**基本集**. 在本书中，如不加说明，可认为基本集是实数集 $\mathbb{R}$，或者有关命题对任何基本集都成立. 以某个基本集的一些子集为元素

的集合也可称为**族**(或类).

三、集合的运算

下面我们介绍四种集合的运算“并”、“交”、“余”、“差”. 从一些给定的集合出发(它们通常是同一基本集的一些子集),通过这些运算,可得到一些新的集合(也是同一基本集的子集). 为了更直观地说明问题,在引进运算的同时,我们用矩形内部的点集表示基本集 X,用位于矩形内的圆内部的点集表示 X 的子集,来给出各种运算的几何表示,这种图称为**文氏(VENN)图**.

定义 设 A、B 是任意两个集合,$\{x; x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的**并集**,简称为**并**,记作 $A\cup B$.

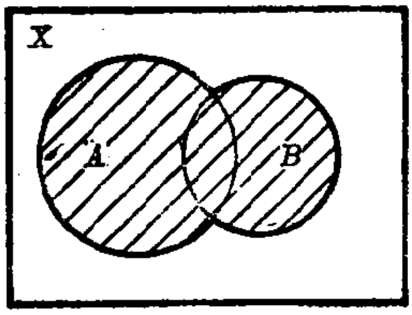

图 1-1

两个集 A、B 的并集是一个新的集合,它由这样一些元素组成:它们或属于 A 或属于 B. 例如

$$\{a, b, c\}\cup\{b, c, d\}=\{a, b, c, d\},$$

$$(0, 2)\cup(1, 3)=(0, 3).$$

由定义可得

1° $A\cup A=A$.

2° $A\cup X=X$, $A\cup\varnothing=A$.

3° $A\cup B=B\cup A$,即并运算满足交换律.

4° $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,即并运算满足结合律. 今后不妨用 $A\cup B\cup C$ 表示该等式左、右两边的集.

5° $A\cup B\supset A$, $A\cup B\supset B$.

定义 设 A、B 是任意两个集合,$\{x; x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的**交集**,简称为**交**,记作 $A\cap B$.

两个集 A、B 的交集是一个新的集合,它由这样一些元素

组成：它们同时属于 A 与 B. 例如，

$$\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} = \{b, c\},$$

$$(0, 2) \cap (1, 3) = (1, 2).$$

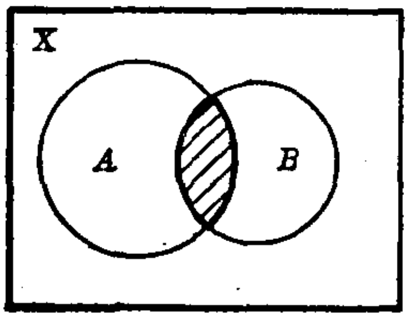

图 1-2

由定义可得

1° $A \cap A = A$.

2° $A \cap X = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

3° $A \cap B = B \cap A$. 即交运算满足交换律.

4° $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$. 即交运算满足结合律.

5° $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$.

并与交的运算可推广到一族集合上去.

设 A_1、A_2、…、A_n 是 n 个集合，不妨记为 $\{A_i;\ i \in \{1, 2, \cdots, n\}\}$，称集 $\{x;$ 存在 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$，使 $x \in A_i\}$ 为这组集的并. 记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. 设 A_1、A_2、…、A_n、… 是一列集合，不妨记为 $\{A_i;\ i \in \mathbb{N}\}$，称集 $\{x;$ 存在 $i \in \mathbb{N}$，使 $x \in A_i\}$ 为这列集的并，记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. 一般地，设 $\{A_i;\ i \in I\}$ 是一族集，这儿 I 是指标集，比如 I 可为 $\{1, 2\}$，$\{1, 2, \cdots, n\}$ 或 $\mathbb{N}$，甚至也可为 $[0, 1]$ 等等，i 在 I 中取值，称集

$$\{x;\ \text{存在 } i \in I, \text{使 } x \in A_i\}$$

为这族集的并，记作 $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$. 它是由这样一些元素所组成：它们至少属于这族集中的某一个. 于是，断言 $x \notin \bigcup\limits_{i \in I} A_i$，当且仅当"$x$ 不属于这族集中的任一个"，即"对任意 $i \in I$，有 $x \notin A_i$".

类似地，设 $\{A_i;\ i \in I\}$ 是一族集，称集

$$\{x;\ \text{任意 } i \in I, \text{有 } x \in A_i\}$$

为这族集的交，记作 $\bigcap\limits_{i\in I}A_i$. 它是由这样一些元素所组成：它们同时属于这族集中的每一个. 特别地，当 I 为 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 或 $\mathbb{N}$ 时，交集可记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. 于是，断言 $x\notin\bigcap\limits_{i\in I}A_i$，当且仅当"$x$ 不属于这族集中的某一个"，即"存在 $i\in I$，使 $x\notin A_i$".

在指标集 I 明确的情况下，$\bigcup\limits_{i\in I}A_i$ 与 $\bigcup\limits_{i\in I}A_i$ 也可写为 $\bigcup\limits_{i}A_i$ 与 $\bigcap\limits_{i}A_i$.

由一族集的并与交的定义可得

1° 对任意 $i\in I$，有 $\bigcup\limits_{i\in I}A_i\supset A_i\supset\bigcap\limits_{i\in I}A_i$.

2° 若对任意 $i\in I$，有 $A_i\subset C$，则 $\bigcup\limits_{i\in I}A_i\subset C$. 事实上，若 $x\in\bigcup\limits_{i\in I}A_i$，则存在 $i\in I$，使得 $x\in A_i$，因 $A_i\subset C$，即得 $x\in C$.

3° 若对任意 $i\in I$，有 $A_i\supset C$，则 $\bigcap\limits_{i\in I}A_i\supset C$. 事实上，若 $x\in C$，对任意 $i\in I$，因 $C\subset A_i$，故 $x\in A_i$，从而 $x\in\bigcap\limits_{i\in I}A_i$.

这些基本的性质在下面的例子及今后都会经常用到.

例 1 设 $A_i=(i-1, i]$，$i=1, 2, \cdots$，则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=(0, +\infty),\ \bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\varnothing.$$

证 先证第一式. 因对任意 $i\in\mathbb{N}$，有 $A_i=(i-1, i]\subset(0, +\infty)$，故 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\subset(0, +\infty)$. 反之，设 $x\in(0, +\infty)$，则必存在 $k\in\mathbb{N}$，使 $k-1<x\leqslant k$，即 $x\in(k-1, k]=A_k$，于是 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. 这就说明 $(0, +\infty)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

由上所证，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=(0, +\infty)$.

再证第二式. 因 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subset A_1$, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subset A_2$, 故

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \subset A_1 \cap A_2 = \varnothing,$$

所以, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$.

注意到对这族集 $\{A_i; i\in\mathbb{N}\}$ 中的任意两个集 A_i、$A_j(i\neq j)$ 来说, 有 $A_i \cap A_j = \varnothing$, 我们称这族集是**两两不相交的**或**互不相交的**. 两两不相交的一族集的交必为空集, 反之不定.

例 2 设 $A_i = (i, i+2)$, $i=1, 2, \cdots$, 则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (1, +\infty), \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing.$$

其证明类似于例 1, 建议读者自己作出. 本例中的这族集并不是两两不相交的.

例 3 设 $A_i = \left[0, 2-\dfrac{1}{i}\right]$, $i=1, 2, \cdots$, 则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = [0, 2), \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = [0, 1].$$

证 先证第一式. 因对任意 $i\in\mathbb{N}$, 有 $A_i = \left[0, 2-\dfrac{1}{i}\right] \subset [0, 2)$, 故 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subset [0, 2)$. 反之, 设 $x\in[0, 2)$, 即 $0\leqslant x<2$, 则必存在 $i\in\mathbb{N}$, 使 $0\leqslant x\leqslant 2-\dfrac{1}{i}<2$, 即 $x\in A_i$, 故 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, 这就说明 $[0, 2)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

由上所证, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = [0, 2)$.

再证第二式. 因 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subset A_1$, 而 $A_1 = [0, 1]$, 故 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subset [0, 1]$. 反之, 对任意 $i\in\mathbb{N}$, 有 $A_i \supset [0, 1]$, 故 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \supset [0, 1]$.

由上所证, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = [0, 1]$.