# Banach空间中的非线性逼近理论

徐士英　李　冲　杨文善　著

科　学　出　版　社

# Banach空间中的非线性逼近理论

徐士英　李　冲　杨文善 著

国家自然科学基金资助项目



科学出版社

1997

# 内 容 简 介

本书在Banach空间中讨论非线性逼近问题的定性理论，全书七章. 第一章是基础，介绍了在研究非线性逼近问题所需要的Banach空间理论基础知识. 第二至第四章讨论非线性逼近论的基本问题，其中包括特征理论、存在性理论、唯一性理论. 最后三章讨论了非线性逼近理论方面的三个专题，即Chebyshev集的凸性、闭集的几乎Chebyshev性、非线性优化的定性理论. 本书基本上在每一章都给出了一般理论对具体空间中具体问题的应用.

本书可作为大学基础数学、应用数学、计算数学专业研究生的教材，也可供大学数学教师和数学研究人员参考.

**图书在版编目（CIP）数据**

Banach空间中的非线性逼近理论/徐士英等著. -北京：科学出版社，1997. 5

ISBN 7-03-005517-9

Ⅰ. B… Ⅱ. 徐… Ⅲ. 巴拿赫空间-非线性-函数逼近论 Ⅳ. 0174. 41

中国版本图书馆CIP数据核字（96）第12728号

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1997年5月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1997年5月第一次印刷 印张：8 3/4

印数：1—1 000 字数：230 000

定价：18.00元

# 前　言

在一门科学的发展进程中，它的主要结果与有价值的结论，或迟或早都将会有它们的归宿，这就是汇总和包含它们的专著的诞生．我们这本《Banach 空间中的非线性逼近理论》正是这样一种尝试，将它奉献给读者，承前启后，期望能推动我国的非线性逼近理论的进一步研究，同时也为希望了解和运用这方面有关知识的学者提供一本有益的参考书．

非线性逼近问题的最初研究可以追溯到上一世纪末的数学家 P. L. Chebyshev．他提出并讨论了有理函数的一致逼近问题，但在问题的处理方法上，仍趋同于多项式逼近．真正在本质上不同于线性逼近的非线性逼近问题的研究，几乎到本世纪 60 年代才有所突破，并以新姿向前迅速发展．

众所周知，逼近论的研究，由来已久，它的发展方式仍然遵循着“由具体到一般”的认识规律．开始，在具体的函数空间 $(C(\Omega), Lp(\Omega))$ 中，用具体的线性集（多项式或三角多项式等）来逼近特定的函数．后来又发展到用非线性集（如有理函数等）进行逼近．随着 Banach 空间理论、非线性分析和现代拓扑学等近代数学的发展和在逼近论上的应用，一般 Banach 空间中逼近问题的研究势在必行．内容的不断积累和丰富促成了 I. Singer 的专著“Best Approximation by Elements of Linear Subspaces in Linear Spaces”(Springer - Verlag，1974）的问世．该书系统地总结和讨论了一般空间中的线性逼近理论．尔后，Springer-Verlag 出版社在 1986 年出版的 D. Braess 的专著“Nonliner Approximation Theory”又总结了具体函数类（有理函数、自由结点样条函数和指数和函数等）的非线性逼近的研究成果，而一般 Banach 空间中的非线性问题的研究只稍加涉及．近 20 年来，一般 Banach 空间

非线性逼近问题的研究得到迅猛发展，无论在内容上还是问题的处理上同线性逼近都有着本质的区别. 但到目前为止，还没有一本专门系统地讨论这一课题的专著出版. 因此，我们认为，出版这样一本专著是有意义的.

本书将在一般的框架下讨论非线性逼近问题，总结了近 20 年来散见于各种重要期刊上的研究成果，其中也包括了作者自己的许多研究工作. 全书共分七章，第一章不加证明地罗列了 Banach 空间理论方面的基础知识. 第二到第四这三章分别讨论了非线性逼近理论的三个基本问题——特征、存在性和唯一性理论，其中也包括最近几年来在这方面的最新结果. 第五到第七这三章则介绍了近 10 多年来在逼近论界相当活跃的三个专题——Chebyshev 集的凸性、几乎 Chebyshev 子集和非线性优化问题. 基本上在每一章都给出了一般理论对具体空间中具体问题的应用.

本书在内容展开上，我们尽量采用近代数学工具来处理非线性逼近问题，同时也非常注重在具体空间中的实际应用，既有理论结果的严密推导，又有计算上的精细功夫. 这样，读者在阅读本书时，一方面获得这一课题的研究结果，同时对问题的背景和处理思想也有所了解，以便尽快地进入这一领域的研究前沿.

由于作者水平有限，错误和不当之处肯定不少，恳请专家和读者给予指正.

本书的初稿是在中国科学院数学研究所访问期间完成的。在此，我们感谢中国科学院数学研究所李炳仁研究员给我们提供这样的机会. 作者的研究工作得到中国科学院数学研究所开放基金和浙江省自然科学基金的部分资助.

作　者

1993 年 12 月

# 目　录

# 第一章 Banach 空间理论基础

在一般的 Banach 空间中非线性逼近问题同所在空间的结构有相当密切的关系，同时也是以线性逼近理论为基础. 因此，在研究非线性逼近问题的同时，必须对 Banach 空间有关性质及线性逼近理论的有关结果有所了解. 为此，我们在本章中介绍在以后各章中所必需的 Banach 空间理论的基本知识和线性逼近理论的最基本的结果. 有关它们的详细讨论可在所列的参考文献中找到.

## 第一节 弱拓扑与自反特征

设 $X$ 是实或复的赋范线性空间，$X^*$ 表示 $X$ 的共轭空间. 我们用 $B_X(x,r)$ 和 $S_X(x,r)$ 分别表示以 $x$ 为中心，$r$ 为半径的闭球和闭球面，而对应的 $X^*$ 的闭球和闭球面则记为 $B_X^*(x^*,r)$ 和 $S_X^*(x^*,r)$. 在不致于混淆的情况下，则省去下标 $X$. 特别地，当 $x=0$ 或 $r=1$ 时，则在记号中省去 $x$ 或 $r$. 这样，$B_X$ 和 $S_X$（或 $B$ 和 $S$）表示 $X$ 的闭单位球和闭单位球面. 而 $B_X^*$ 和 $S_X^*$（或 $B^*$ 和 $S^*$）则表示 $X^*$ 的闭单位球和闭单位球面.

对集合 $A\subset X$，令 $\mathring{A}$ 或 int $A$ 表示 $A$ 的内点全体，$\overline{A}$（$\overline{A^W}$，$\overline{A^*}$）表示 $A$ 闭（弱闭，弱$^*$闭）包. COA 表示 $A$ 的凸包.

### 一、Banach 空间中的弱拓扑

**定义1.1** 由 $X$ 上的范数诱导出来的拓扑，称为强拓扑或范数拓扑.

**定义1.2** 设 $x_0\in X$，$\varepsilon>0$，$f_1$，…，$f_n\in X^*$. 定义

$$V(x_0;\varepsilon;f_1,\cdots,f_n)$$

$$= \{x \in X : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon, i = 1, \cdots, n\}$$

则称 $V(x_0; \varepsilon; f_1, \cdots, f_n)$ 为 $x_0$ 的一个弱邻域. 由 $X$ 上的所有弱邻域诱导出来的拓扑称为 $X$ 的弱拓扑，记为 $\sigma(X, X^*)$.

**定义1.3** 设 $f_0 \in X^*$，$\varepsilon > 0$，$x_1$，…，$x_n \in X$，令

$$V(f_0; \varepsilon; x_1, \cdots, x_n)$$
$$= \{f \in X^* : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

则称 $V(f_0; \varepsilon; x_1, \cdots, x_n)$ 为 $f_0$ 的弱$^*$邻域. 由 $X^*$ 上的所有弱$^*$邻域诱导出来的拓扑，称为 $X^*$ 上的弱$^*$拓扑，记为 $\sigma(X^*, X)$.

为简单起见，$X(X^*)$ 中的链 $x_\alpha(x_\alpha^*)$，若 $x_\alpha(x_\alpha^*)$ 按弱（弱$^*$）拓扑收敛于 $x_0(x_0^*)$，则记为

$$x_\alpha \xrightarrow{w} x_0 (x_\alpha^* \xrightarrow{w^*} x_0^*).$$

显然，$X$ 的强拓扑强于弱拓扑，而 $X^*$ 上的弱拓扑又强于弱$^*$拓扑。下面的定理给出了它们的等价条件和进一步的性质.

**定理1.1** $X$ 上的强拓扑与弱拓扑等价 $\Longleftrightarrow X$ 是有限维的.

**定理1.2** 设 $X$ 为 Banach 空间，则 $X^*$ 上的弱拓扑与弱$^*$拓扑等价 $\Longleftrightarrow X$ 是自反的.

**定理1.3** 设 $M$ 是 Banach 空间 $X$ 上的凸子集，则 $M$ 是强闭 $\Longleftrightarrow M$ 是弱闭的.

**定理1.4** i）若 $M$ 是 $X$ 的子集，则 $M$ 是范数有界 $\Longleftrightarrow M$ 在弱拓扑下有界；

ii）若 $M \subset X^*$，则 $M$ 在弱$^*$拓扑下有界 $\Longleftrightarrow M$ 是范数有界.

## 二、Banach 空间中的紧性

为给 Banach 空间中的紧性刻划，我们先介绍几种紧性定义.

**定义1.4** 设 $X$ 是一拓扑空间，$M$ 是 $X$ 中的子集，如果 $X$ 中任一覆盖 $M$ 的开集族皆含有覆盖 $M$ 的有限子集族，称 $M$ 为紧的；如果 $M$ 的闭包是紧的，称 $M$ 为相对紧的；如果 $M$ 中的任何序列皆有收敛于 $M$ 中点的子序列，称 $M$ 是序列紧的.

一般地，紧性与序列紧是不等价的，但当$X$是距离空间时，它们彼此等价. 关于$X$和$X^*$中的强拓扑、弱拓扑和弱$^*$拓扑的紧性，有下面的事实.

**定理1.5** $X$的闭单位球$B$是范数紧$\Longleftrightarrow X$是有限维的.

**定理1.6(Alaoglu 定理)** $X^*$的闭子集$M$是弱$^*$紧$\Longleftrightarrow M$是有界的弱$^*$闭子集.

特别地，$X^*$的闭单位球$B^*$是弱$^*$紧的.

**定理1.7(Eberlein - Smulian 定理)** Banach 空间$X$中的子集$M$是弱紧$\Longleftrightarrow M$是弱序列紧的.

一般地，定理1.7对弱$^*$拓扑不成立. 但当$X$可分时，则定理1.7对弱$^*$拓扑也对. 事实上，有下面的度量化定理.

**定理1.8** i) $X^*$的闭单位球$B^*$可度量化$\Longleftrightarrow X$是可分的.

ii) Banach 空间$X$的闭单位球$B$可度量化$\Longleftrightarrow X^*$是可分的.

## 三、自反 Banach 空间的特征

关于 Banach 空间的自反性，有下面著名的 James 定理.

**定理1.9** 设$X$是 Banach 空间，则下述论断等价：

i) $X$是自反的；

ii) $X$的任何有界闭凸集是弱紧的；

iii) $X$的闭单位球$B$在$X^{**}$中是弱$^*$闭的；

iv) $X$上的任何连续线性泛函在$B$上皆达到它的最大值.

对于一般的 Banach 空间，有下面著名的 Goldstine 和 Bishop - Phelps 定理.

**定理1.10**(Goldstine 定理) Banach 空间$X$的闭单位球$B$在$X^{**}$的闭单位球$B^{**}$上是弱$^*$稠的.

**定理1.11**(Bishop - Phelps 定理) 设$A$是 Banach 空间$X$的任一有界闭凸集，则在$A$上达到最大值的有界线性泛函全体在$X^*$中稠.

# 第二节　凸性与光滑性

## 一、端点及其表示定理

在本节中，我们总设 $X$ 是局部凸的拓扑线性空间，特别地，若 $X$ 是赋范线性空间，则 $X$ 关于弱拓扑，$X^*$ 关于弱 $^*$ 拓扑皆为局部凸的 Hausdorff 拓扑线性空间.

**定义2.1**　设 $K$ 为 $X$ 的一个凸子集，$A$ 是 $K$ 的子集，若

$$x,y\in K, z=tx+(1-t)y\in A, t\in(0,1)\Rightarrow x,y\in A$$

则称 $A$ 为 $K$ 的端子集，若 $A$ 为单点集 $\{x\}$，则称 $x$ 为 $K$ 的端点. $K$ 的端点全体记为 $\mathrm{ext}K$ 或 $\varepsilon(K)$.

显然，$x\in\mathrm{ext}K\Longleftrightarrow$ 若存在 $y_1, y_2\in K$，使 $x=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$，则 $y_1=y_2=x$.

关于端子集与端点，有下面简单的性质.

**命题2.1**　i) 设 $K\subset X$ 是凸子集，$A\subset B\subset K$. 若 $A$ 是 $B$ 的端子集，$B$ 是 $K$ 的端子集，则 $A$ 是 $K$ 的端子集.

ii) 若 $A\subset K$ 是 $K$ 的端子集，则 $\mathrm{ext}A=(\mathrm{ext}K)\cap A$.

**定理2.1**(Krein－Milman 定理)　若 $K$ 是 $X$ 的紧凸子集，则 $K=\overline{\mathrm{CO}}(\mathrm{ext}K)$.

**定理2.2**　设 $X,Y$ 是两个局部凸拓扑线性空间，$T$ 是 $X$ 到 $Y$ 的连续线性映照，则对 $X$ 中的任何紧凸子集 $K$，有

$$\mathrm{ext}T(K)\subset T(\mathrm{ext}K).$$

## 二、凸性与光滑性的各种定义

本节中，均设 $X$ 是赋范线性空间.

**定义2.2**　若

$$\forall x,y\in S, x\neq y\Rightarrow\|x+y\|<2$$

则称 $X$ 是严格凸的.

**命题2.2** 下述论断等价：

i）$X$ 严格凸；

ii）$\mathrm{ext}B=S$；

iii）$\forall f\in X^*$，$f$ 在 $B$ 上至多在一点达到最大值；

iv）$\forall x, y\in X$，$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|\Longleftrightarrow$ 存在常数 $k$，使 $y=kx$ 或 $x=ky$.

**定义2.3** 若 $\forall x\in S$，$\forall \varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(x,\varepsilon)>0$，使对 $\forall y\in S_X$，$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|>1-\delta$ 时，有 $\|x-y\|<\varepsilon$，则称 $X$ 是局部一致凸(LUR).

**命题2.3** $X$ 局部一致凸 $\Longleftrightarrow \forall x\in X, x\neq 0, \{x_n\}\subset x$，$\|x_n\|\to\|x\|$，若 $\|x_n+x\|\to 2\|x\|$，则 $\|x_n-x\|\to 0$.

**定义2.4** $\forall \varepsilon>0$，定义

$$\delta x(\varepsilon)=\inf\left\{1-\frac{1}{2}\|x+y\| : x, y\in S, \|x-y\|\geqslant\varepsilon\right\}$$

则称 $\delta_X(\varepsilon)$ 为 $X$ 的凸性模.

**定义2.5** 若 $\forall \varepsilon>0$，$\delta_X(\varepsilon)>0$，则称 $X$ 是一致凸的(UR).

**命题2.4** $X$ 是一致凸 $\Longleftrightarrow \forall \{x_n\}, \{y_n\}\subset X$，若 $\lim\|x_n\|=\lim\|y_n\|\neq 0$，$\lim\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\|=\lim\|x_n\|$，则 $\lim\|x_n-y_n\|=0$.

**定义2.6** 若 $\forall \varepsilon>0$，$z\in X\backslash\{0\}$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon, z)>0$，使当 $x, y\in S$，$x-y=\lambda z$，$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|>1-\delta$ 时，有 $\|x-y\|<\varepsilon$，则称 $X$ 是各向一致凸的(URED).

**定义2.7** 若 $\forall x_0\in S$，$\{x_n\}\subset S$，$\|x_n+x_0\|\to 2$，则 $\{x_n\}$ 有收敛的子列，那么 $X$ 称为紧局一致凸(CLUR).

**定义2.8** 若 $\forall x_1, \cdots, x_{k+1}\in S$，必有

$$\|x_1+\cdots+x_{k+1}\|<K+1$$

则称 $X$ 为 $k$ 严格凸（KR）.

**定义 2.9** 如果 $\forall \varepsilon>0$，$x\in S$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon,x)>0$，使得当

$x_1, \cdots, x_k \in S$，$\|x+x_1+\cdots+x_k\|>k+1-\delta$ 时，有

$$A(x,x_1,\cdots,x_k)<\varepsilon$$

则称 $X$ 是局部 $k$ 一致凸(LKUR)，其中

$$A(x_1,\cdots,x_{k+1})$$
$$=\sup\left\{\left|\begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_{k+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots \\ f_k(x_1) & f_k(x_2) & \cdots & f_k(x_{k+1}) \end{matrix}\right| : \begin{matrix} f_i \in B^* \\ i=1,2,\cdots,k \end{matrix}\right\}$$

**定义2.10** 如果$\forall\ \varepsilon>0$，存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得当$x_1,\cdots,x_{k+1}\in S$，$\|x_1+\cdots+x_{k+1}\|>k+1-\delta$ 时，有

$$A(x_1,\cdots,x_{k+1})<\varepsilon$$

则称 $X$ 是 $K$ 一致凸(KUR).

设 $x\in S$，$f\in S^*$，若 $f(x)=1$，则称 $f$ 是 $x$ 的支撑泛函.

**定义2.11** 设 $x\in S$，若在 $x$ 处有唯一的支撑泛函，则称 $x$ 为 $B$ 的光滑点. 若 $S$ 上的每一点皆为 $B$ 的光滑点，则称 $X$ 是光滑的.

**定义2.12** 如果$\forall\ \varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使当 $x$，$y\in X$，$x\in S$，$\|y\|<\delta$ 时，有

$$\|x+y\| + \|x-y\| < 2+\varepsilon\|y\|$$

则称 $X$ 是一致光滑的(US).

定义实函数

$$\rho_X(\tau)=\sup\left\{\frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|)-1:\ x\in S,\|y\|\leqslant\tau\right\}$$

则称 $\rho_X(\tau)$是 $X$ 的光滑模. 易见 $X$ 一致光滑$\Longleftrightarrow\rho_X(\tau)/\tau\to 0(\tau\to 0)$

**定义2.13** 若$\forall\ x_n\in S$，$x_0\in S$，$x_n\xrightarrow{w}x_0$，推出$\|x_n-x_0\|\to 0$，则称 $X$ 具有 $H$ 性质.

**定义2.14** 若$\forall\ x_0\in S$，$y\in S$，极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\|x_0+\lambda y\| - \|x_0\|}{\lambda}$$

存在，则称 $X$ 是 Gateaux 可微空间.

**定义2.15** 若$\forall\ x_0\in S$，极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\|x_0+\lambda y\|-\|x_0\|}{\lambda}$$

关于 $y\in S$ 一致成立，则称 $X$ 是 Frechet 可微空间.

## 三、各种凸性与光滑性之间的关系

**命题2.5** i）一致凸$\Rightarrow K$ 一致凸$\Rightarrow K+1$ 一致凸$\Rightarrow X$ 自反；

ii）局一致凸$\Rightarrow$局 $K$ 一致凸$\Rightarrow$局 $K+1$ 一致凸；

iii）$K$ 一致凸$\Rightarrow$局 $K$ 一致凸$\Rightarrow K$ 严格凸；

iv）局一致凸$\Longleftrightarrow$严格凸且紧局一致凸.

**定理2.3** i）$X^*$严格凸$\Rightarrow X$ 光滑；

ii）$X^*$光滑$\Rightarrow X$ 严格凸.

**定理2.4** 若 $X$ 局 $K$ 一致凸，则 $X$ 有 $H$ 性质.

**定理2.5** $X$ 是光滑空间$\Longleftrightarrow X$ 是 Gateaux 可微空间.

**定理2.6** i）$X$ 一致光滑$\Longleftrightarrow X^*$一致凸；

ii）$X$ 一致凸$\Longleftrightarrow X^*$一致光滑.

## 四、具体空间的端点、凸性和光滑性

具体空间的端点．凸性和光滑性由表2.1给出.

**表2.1**

| | Banach 空间 $X$ | ext$B$ | 凸　性 | 光滑性 |
|---|---|---|---|---|
| 数列空间 | $l_\infty(w_0)=m=\{(x_n)_{n=1}^\infty: x_n\in\mathbb{R}\}\ \|x\|_\infty=\sup\limits_n\|x_n\|<+\infty\}$ | $x=(x_i)$，其中 $x_i=\pm1$ | 不严格凸 | 不光滑 |

续表

| | Banach 空间 $X$ | ext$B$ | 凸　性 | 光滑性 |
|---|---|---|---|---|
| 数列空间 | $c=c(w_0)=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}:x_n\in\mathbb{R}\}$，$\lim\limits_n x_n=a$，$\|x\|_\infty=\sup\limits_n\|x_n\|<+\infty\}$ | $x=(x_n)$，其中 $x_i=\pm1$，且从某项开始为 $+1$，或从某项开始为 $-1$ | 不严格凸 | 不光滑 |
| | $c_0=c_0(w_0)=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}:x_n\in\mathbb{R}\}\lim\limits_n x_n=0$，$\|x\|_\infty=\sup\limits_n\|x_n\|<+\infty\}$ | 无端点 | 不严格凸 | 不光滑 |
| | $l_1=l_1(w_0)=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}:x_n\in\mathbb{R}\}\ \|x\|_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<+\infty\}$ | $\pm e_i$，其中 $e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$，(第 $i$ 项为 1) | 不严格凸 | 不光滑 |
| | $l_p=l_p(w_0)=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}:x_n\in\mathbb{R}\}\ \|x\|_p=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p)^{1/p}<+\infty\}(1<p<+\infty)$ | $S$ | 一致凸 | 一致光滑 |
| 函数空间 | $\Omega$ 为紧 Hausdorff 拓扑空间 $C(\Omega)=\{f:f$ 是 $\Omega$ 上实值连续函数，$\|f\|_\infty=\max\limits_{w\in\Omega}\|f(w)\|\}$ | $f^2=1$ | 不严格凸 | 不光滑 |
| | $\Omega$ 为紧 Hausdorff 拓扑空间 $C(\Omega)^*$ | 符号点测度，即 $F\in C(\Omega)^*$，使得存在 $x\in\Omega$，使 $F(f)=f(x)$，或 $F(f)=-f(x)$，$\forall f\in C(\Omega)$ | 不严格凸 | 不光滑 |
| | $L_1[0,1]=\{f:f$ 是$[0,1]$上实值 Lebegue 可积函数 $\|f\|_1=\int_0^1\|f(x)\|dx<+\infty\}$ | 无端点 | 不严格凸 | 不光滑 |
| | $L_\infty[0,1]=\{f:f$ 是$[0,1]$上实值本性有界函数，$\|f\|_\infty=\mathrm{Varisup}\|f(x)\|<+\infty\}$ | $f^2=1$ a. e. | 不严格凸 | 不光滑 |

续表

| | Banach 空间 $X$ | ext$B$ | 凸 性 | 光滑性 |
|---|---|---|---|---|
| 函数空间 | $L_p[0,1]=\{f: f$ 是$[0,1]$上实值 Lebesgue 可积函数 $\|f\|_p=\left(\int_0^1 \|f(x)\|^p dx\right)^{1/p}<+\infty\}(1<p<+\infty)$ | $S$ | 一致凸 | 一致光滑 |

# 第三节　向量值函数空间

## 一、连续向量值函数空间

设 $\Omega$ 是紧 Hausdorff 拓扑空间，$X$ 是赋范线性空间. 令 $C(\Omega,X)$表示定义在 $\Omega$ 上，取值为 $X$ 中元的所有连续函数全体. 在 $C(\Omega,X)$上定义范数

$$\|f\| = \max_{t\in\Omega}\|f(t)\|_X, \qquad \forall f\in C(\Omega,X)$$

则易知，$C(\Omega,X)$是赋范线性空间，且当 $X$ 是 Banach 空间时，$C(\Omega,X)$也是 Banach 空间. 特别地，当 $X$ 是复数域时，$C(\Omega,X)$则简记为 $C(\Omega)$. 当 $X$ 是实数域时，$C(\Omega,X)$记为 $C_R(\Omega)$.

**定理3.1**　设 $E=C(\Omega,X)$，则 $L\in\text{ext}B_E^*\Longleftrightarrow$存在 $t\in\Omega$，$x^*\in\text{ext}B_X^*$，使

$$L(f)=x^*[f(t)], \qquad \forall f\in C(\Omega,X)$$

## 二、Bochner 可积函数空间

设$(\Omega,\Sigma,\mu)$表示完备的有限非负测度空间，$X$ 是赋范线性空间.

**定义3.1**　设 $f:\Omega\to X$ 是向量值函数，若存在定义在 $\Omega$ 上，取值为 $X$ 中元的可数值可测函数列$\{f_n\}$，使

$$\| f_n(t) - f(t) \|_X \to 0 \qquad \mu\text{-a.e. 于 } \Omega$$

则称 $f$ 是 $\mu$-可测函数.

**注** 可数值可测函数是指

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \chi_{E_i}$$

其中 $E_i \in \Sigma$，$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \Omega$，$E_i \cap E_j = \Phi \ (i \neq j)$，$\{x_i\} \subset X$.

**定义3.2** 设可数值可测函数

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \chi_{E_i}$$

若

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \| x_i \| < \infty$$

则称 $f$ 是 Bochner 可积的，且对 $\forall E \in \Sigma$，定义

$$\int_E f(t) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \cap E) x_i$$

**定义3.3** 设 $f$ 是可测函数，若存在 Bochner 可积的可数值可测函数列 $\{f_n\}$，使

$$\int_\Omega \| f(t) - f_n(t) \|_X d\mu \to 0$$

则称 $f$ 是 Bochner 可积的，且对 $\forall E \in \Sigma$，定义

$$\int_E f(t) d\mu = \lim_n \int_E f_n(t) d\mu$$

对 $1 \leqslant p < \infty$，定义

$$L_p(\mu, X) = \left\{ f: \Omega \to X: \begin{array}{l} f \text{ 是 Bochner 可积，且} \\ \int_\Omega \| f(t) \|_X^p d\mu < \infty \end{array} \right\}$$

在 $L_p(\mu, X)$ 上定义范数

$$\| f \|_p = \left\{ \int_\Omega \| f(t) \|_X^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in L_p(\mu, X)$$

对 $p = \infty$，$L_\infty(\mu, X)$ 表示定义在 $\Omega$ 上，取值于 $X$ 中元的，$\mu$ 可测的，本性有界的函数全体，且定义范数为