普通物理学教程丛书

力 学

（下册）

郑永令 贾起民 编著

复旦大学出版社

内 容 提 要

本书是《普通物理学教程丛书》中的一种，是作者在给复旦大学物理系学生上课时所用的讲义基础上，经过多年实践不断修改而成的。全书十章分为五篇，分别讲述质点力学、质点系力学与守恒定律、刚体与流体、振动与波、相对论等。全书内容清新、层次分明，注意了力学的历史发展及力学同其他学科的联系，可读性和开拓性都很好。

全书分上、下两册出版。下册分刚体与流体、振动与波、相对论等三篇共五章。本书可供综合性大学或工科大学作为普通物理学的力学教科书或主要教学参考书。

力 学

（下册）

郑永令 贾起民 编著

复旦大学出版社出版

（上海国权路579号）

新华书店上海发行所发行 复旦大学印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 14.0625 字数 404,000

1990年9月第1版 1990年9月第1次印刷

印数 1—3,000

ISBN 7-309-00491-4/O·74

定价：3.55元

目　录

（下册）

第三篇　刚体与流体

第五篇 相 对 论

第三篇　刚体与流体

在前两篇中，我们讨论了质点与质点系运动的一般规律，本篇将讨论两种特殊的质点系：刚体与流体。作为质点系，它们当然遵循质点系力学的基本规律，即动量定理、功能定理、角动量定理和相应的守恒定律；将这些规律与这两种质点系本身所具有的特殊性质相结合，将呈现特殊的形式。因此，掌握基本规律的一般性和所讨论质点系的特殊性的关系，是学习本篇的关键。

第六章 刚体力学

§6.1 刚体运动概述

一、刚 体

所谓刚体，是指整体及其各部分的形状和大小均保持不变的物体，也就是各质点(或质元)间的距离均保持不变的质点系。刚体是实际物体(指固体)的一种抽象。实际物体在外力作用下，其形状和大小或多或少会有一些变化，但只要这种变化与物体的几何线度相比很小，对所讨论的问题的影响可以忽略，我们就可把这物体看成刚体。这里重要的是变化的相对线度和对所讨论问题的影响。两个钢球，当我们讨论它们碰撞瞬时的能量转换时，尽管形变很小，但必须把它们看成弹性体，因为碰撞时必有一部分能量以弹性势能的形式存在于球中；一根橡胶棒，当我们以一端为支点把它悬挂起来而讨论它的摆动时，却可以忽略其形变而把它看成刚体。

二、刚体的自由度

为了确定一个质点在空间的位置，需要三个独立的坐标变数，如直角坐标 x,y,z，或柱坐标 ρ,φ,z，球坐标 r,θ,φ。为了确定二个自由质点所组成的体系在空间的几何位形，就需要六个独立坐标变数。我们把确定一个力学体系在空间的几何位形所需的独立变数的个数称为自由度。一般而言，由 N 个自由质点组成的体系有 $3N$ 个自由度。但当质点的运动受到某种约束时，自由度就会减少。例如当一个质点限制在平面上运动时，只要二个独立坐标就可确定其位置，因而其自由度为 2。对于距离保持不变的二质点体系，由于两个质点间距离

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}=l$ 恒定不变，6 个坐标中只有 5 个是独立的，因而该体系只有 5 个自由度。这也可理解为：先用 3 个坐标确定第一个质点的位置，这时，第二个质点，可位于以第一个质点为球心、以 l 为半径的球面上的任一点，为确定它的位置，需用两个独立坐标确定它与第一个质点连线的方位，因而该体系只有 5 个自由度。对于彼此距离保持不变的 3 个不共线质点体系，由于有每两个质点间距离保持不变的 3 个约束联系，自由度从 9 个减为 6 个。这也可这样理解：当用 5 个独立变数确定两个质点的位置以后，与这两个质点距离一定的第三个质点可位于以这两个质点连线为轴的圆周上的任一点，这时只要用一个方位角就能确定其位置，故该 3 质点体系的自由度为 6。

刚体由无数个质点组成，但由于各质点间的距离保持不变，因而确定刚体几何位形的变数只要 6 个。这是因为，只要刚体上任意三个不共线的点的位置确定，整个刚体的位置也就确定，因而刚体的自由度与上述 3 质点系统的自由度相同。这 6 个变数当然也可理解为确定刚体上某一点（例如质心）位置的 3 个变数、确定刚体上过该点的一轴线的方位的 2 个变数及刚体绕该轴转动角度的 1 个变数。

三、刚体运动的几种形式

由于受到不同的约束，刚体可以有各种运动形式，每种运动形式对应的自由度也不相同。

（1）平动　作平动时，刚体上每一点的运动情况完全相同，刚体的运动可用一质点来代表，因而这种运动的描述与质点相同。其自由度为 3。

（2）定轴转动　当刚体上（刚体外与刚体刚性固连的点可视为在刚体上）某两点固定时，刚体只能绕着过这两点的固定轴转动，这种运动称为刚体的*定轴转动*。显然，定轴转动只有一个自由度。

（3）平面平行运动　刚体在运动过程中，其上每一点都在与某固定平面相平行的平面内运动，这种运动称为刚体的*平面平行运动*。这时，刚体内任一与固定平面相垂直的直线上所有点的运动情况完全相

同，因而刚体的运动可用与固定平面相平行的任一截面的运动来代表，而该截面在通过自身平面内的运动可以看成其上任一点 A（称为基点）在平面上的移动与该截面绕过该点且垂直于平面的轴线的转动的组合（图 6.1-1）。在与基点相对静止的参照系上，刚体的运动成为绕过基点的固定轴的转动，即定轴转动。显然，平面平行运动的自由度为 3。

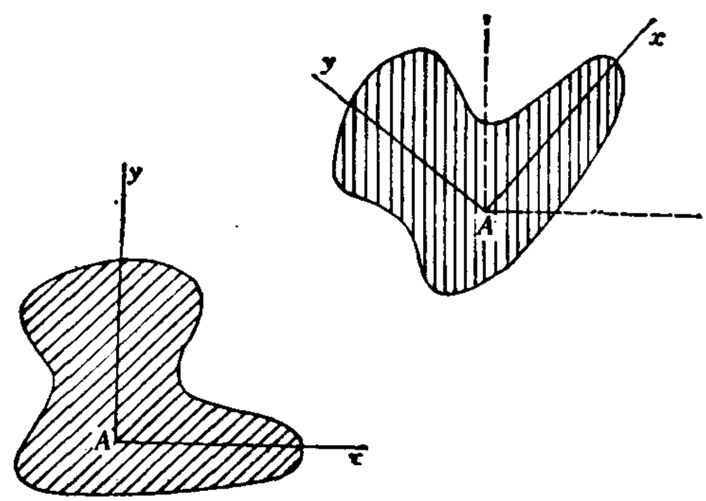

图 6.1-1　刚体的平面平行运动可看作其上一点 A 的平面运动与绕过 A 点轴线的定轴转动的组合

（4）定点转动　当刚体上某一点固定时，刚体只能绕这点转动，这种运动称为刚体的*定点转动*。可以证明，作定点转动的刚体，在任一瞬时，总可看成绕通过该定点的某一瞬时轴的转动（下一瞬时则为绕另一瞬时轴的转动）。不难看出，定点转动的自由度为 3。

（5）一般运动　刚体的一般运动可以看成随刚体上某一基点 A（例如质心）的移动和绕该点的转动的组合。在与基点相对静止的参照系上，绕该点的转动即为定点转动。因此，作一般运动的刚体的自由度为 6。

由以上分析可见，平动和定轴转动是刚体最基本的运动形式。平动与质点的运动相当，不必另加讨论。所以我们将在下节着重讨论刚体定轴转动的运动学描述。

四、作用在刚体上的力系及其简化

刚体的各种形式的运动，是与外力的作用密切相关的。刚体的

内力使刚体各质元之间保持刚性连结，在研究刚体的外观运动时不必考察其作用．不同运动形式下外力与运动的具体关系，将在各有关章节中讨论，这里先就作用在刚体上的力作些总的说明．

（1）作用在刚体上的力是滑移矢量．力有大小、方向、作用点三个要素．就它对物体所产生的效果而言，三者都起作用．因而，在一般情况下，即使保持大小和方向不变，力亦不能平移，因为这将造成作用点的变动，效果就将不同．这就是说，力不像速度、加速度那样是自由矢量．但由于刚体是一个刚性整体，当力沿着作用线在刚体上滑移时，对刚体的作用不变，因而称作用在刚体上的力为*滑移矢量*．

（2）合力存在的条件．刚体作为一个刚性整体，与一般质点系不同，作用其上的诸力的合力（即与诸个力作用完全等效的一个力）是有意义的．但合力只在诸分力属下列几种情况下存在：

1）共点力系　所有力的作用线（或其延长线）交于一点的力系称为*共点力系*．显然，这样的力系可以等效为大小和方向等于诸力矢量和、作用点就是该交点的一个力，这就是合力．

2）平行力系　所有的力都互相平行的力系称为*平行力系*．这样的力系一般也存在合力．为简单起见，先考虑两个平行力的合力．如图6.1-2所示，平行力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 作用在刚体上的 A、B 两点．为求合力，设想在 A、B 上各施加一对沿 $\overline{AB}$ 的等值反向的力 $\boldsymbol{f}$ 和 $-\boldsymbol{f}$，由于力是滑移矢量，这一对力的作用与它们作用于同一点相同，因而对刚体运动不会有影响．$\boldsymbol{F}_1$ 与 $-\boldsymbol{f}$ 的合力 $\boldsymbol{F}_1'$、$\boldsymbol{F}_2$ 与 $\boldsymbol{f}$ 的合力 $\boldsymbol{F}_2'$ 两者互不平行，它们的作用线必交于某一点 D，它们的合力 $\boldsymbol{F}$ 也就是 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力，即 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$．$\boldsymbol{F}$ 的作用线交于 $\overline{AB}$ 上的 C，且有 $\overline{AC}/\overline{CB}=F_2/F_1$．用类似方法，可以求任意多个平行力的合力．如果诸力的矢量和为零，这样的平行力系就成为一个力偶．

由上面的讨论不难看出，当作用在各质元上的平行力的大小与质元质量成正比时，合力的作用线通过质心，因而通常说刚体重力的合力作用在质心上．此结果与一般质点系中重力对质心的总力矩为零相一致，尽管在质点系为非刚体情况下，合力并不存在．

3）共面力系　所有力的作用线位于同一平面的力系称*共面力系*．

若共面力系的诸力互相平行，则可按求平行力合力的方法求出合力。若诸力不平行，则必有交点，可直接依次求出合力。

(3) 一般力系可等效为一个力和一个力偶。以两个力为例，如果两个力不互相平行，又不共面，这两个力就不能等效为一个合力。比如图 6.1-3 中，作用于 A 点的力$\boldsymbol{F}_1$位于yz平面，作用于B点的力 $\boldsymbol{F}_2$ 位于

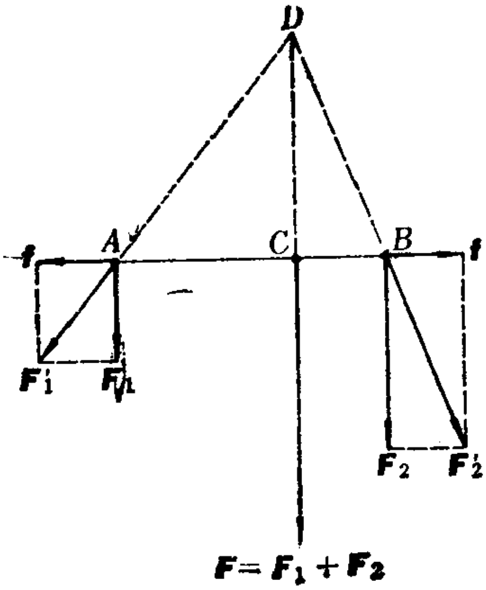

图 6.1-2　求平行力的合力

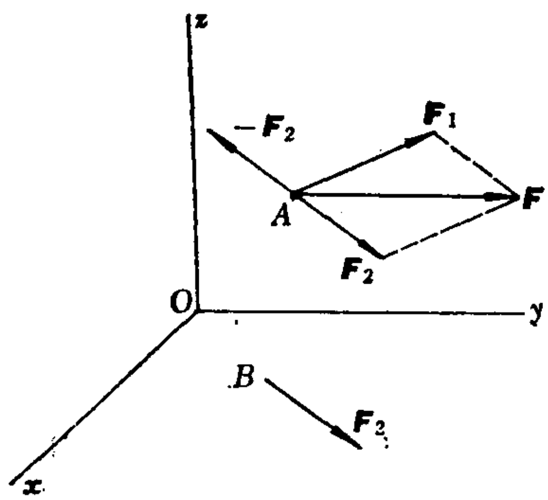

图 6.1-3　两个异面力可等效为一个合力和一个力偶

xy 平面，这样的两个异面力就属这种情形。但我们可设想在 A 点作用一对力 $\boldsymbol{F}_2$、$-\boldsymbol{F}_2$，这不会影响刚体的运动。于是，作用在 A 点的力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 构成一个合力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$，而剩下的作用在 B 点的力 $\boldsymbol{F}_2$ 和作用在 A 点的力 $-\boldsymbol{F}_2$ 则构成一个力偶，其力偶矩就是 $\boldsymbol{F}_2$ 对于 A 点的力矩。不难看出，$\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$ 也可等效为作用在其他任一点 C 的一个力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$ 和一个力偶，其力偶矩就是 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 对 C 点的力矩的矢量和。这样，当作用于刚体上某一点的力平移到另一点时，必须同时伴随一个力偶，因此任意个力组成的力系可等效为作用于刚体上某一点 C 的单个力 $\boldsymbol{F}$ 和一力偶矩 $\boldsymbol{\tau}$，其中 $\boldsymbol{F}=\sum\limits_i \boldsymbol{F}_i$ 为外力的矢量和，$\boldsymbol{\tau}=\sum\limits_i \boldsymbol{\tau}_i$ 为外力对点 C 的力矩的矢量和。点 C 称为简化中心。简化中心虽可任意选取，但当 C 改变位置时，$\boldsymbol{\tau}$ 也随之改变。因力偶的作用只与力偶的矩有关，所以我们可以在刚体上相当自由地选择具有确

定力偶矩的一对力的大小、方向和作用点。对于方向与力 $\boldsymbol{F}$ 垂直的力偶矩，可看成一对与力 $\boldsymbol{F}$ 共面的力，而这 3 个力又可重新构成一个新的合力；对于方向与力 $\boldsymbol{F}$ 构成任意角度的力偶矩，可将其分解为两个方向相互垂直的力偶矩，一个力偶矩与力 $\boldsymbol{F}$ 平行，另一个力偶矩与力 $\boldsymbol{F}$ 垂直，后者与力 $\boldsymbol{F}$ 可构成一个新的合力。综上所述，作用在刚体上的任何力系，最终可以等效为一个作用于刚体上某一点的力和一个力偶矩方向与之平行的力偶。这样的一组力和力偶称为偶力组或力螺旋（图 6.1-4）。当力偶矩为零时，力系等效为一个合力。

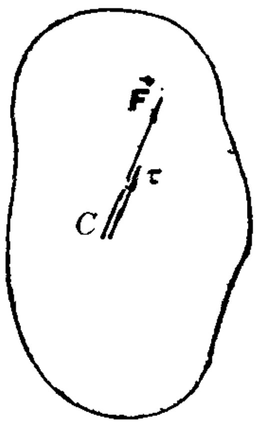

图 6.1-4　作用在刚体上的任意力系可等效为一组力螺旋

由此可见，作用在刚体上的力系一般总可等效为一个作用于某一点 C 的力 $\boldsymbol{F}$ 和方向与之平行的力偶矩 $\boldsymbol{\tau}$ 的组合，即力螺旋。只有在相应力偶矩 $\boldsymbol{\tau}=0$ 的情况下，力系才可等效为一个合力。力系是否可等效为一个合力是有条件的。

§ 6.2　刚体的定轴转动

一、角位移、角速度和角加速度

当刚体绕固定轴转动时，刚体上各点将沿不同半径的圆周运动，这些圆的圆心都在固定轴上，圆周所在的平面都与轴线垂直。这时，刚体内各点的位移、速度和加速度都不相同，但是刚体上各点到转轴的垂直线在同样的时间内所转过的角度 $\Delta\varphi$ 都相同，适当选择 φ 的零点，就可用转角 $\varphi(t)$ 描写刚体的定轴转动。在 Δt 时间内刚体所转过的角度 $\Delta\varphi$ 叫角位移（图 6.2-1）。

在 t 到 $t+\Delta t$ 时间内的角位移 $\Delta\varphi$ 与 Δt 之比称为刚体的平均角速度，用 $\overline{\omega}$ 表示：

$$\overline{\omega}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，平均角速度的极限称为瞬时角速度，简称角速度，用 ω 表示：

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{d\varphi}{dt} \tag{6.2-1}$$

刚体的定轴转动有两种不同的转动方向，当我们顺着转轴观察时，刚体可以按顺时针方向转动，也可以按逆时针方向转动。如果把一种转向的角速度取为正的，另一种转向的角速度取为负的，则角速度的大小反映了定轴转动的快慢，角速度的正负描写了定轴转动的方向。角速度的单位是弧度/秒。

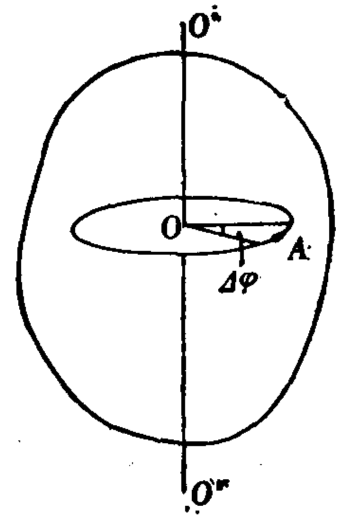

图 6.2-1 定轴转动刚体的角位移

在 Δt 时间内，角速度的改变 $\Delta\omega$ 与 Δt 之比称为该段时间内的平均角加速度，用 $\overline{\beta}$ 表示：

$$\overline{\beta}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，平均角加速度的极限称为瞬时角加速度，简称角加速度，用 β 表示：

$$\beta=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt} \tag{6.2-2}$$

当 ω 与 β 同号时表示转动逐渐加快，ω 与 β 异号时表示转动逐渐减慢。角加速度的单位是弧度/秒²。

由以上讨论可知，刚体的定轴转动与质点的直线运动相似，都属一个自由度的运动，只要在描写质点直线运动各物理量（位移、速度、加速度）前加一个“角”字，就成了描写刚体定轴转动的各相应物理量（角位移、角速度、角加速度），两者的运动学关系亦完全相似：

定轴转动	直线运动
$\omega=\frac{d\varphi}{dt}$,	$v=\frac{dx}{dt}$;

$$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}, \qquad a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t};$$

$$\omega-\omega_0=\int_0^t \beta\,\mathrm{d}t, \qquad v-v_0=\int_0^t a\,\mathrm{d}t;$$

$$\varphi-\varphi_0=\int_0^t \omega\,\mathrm{d}t, \qquad x-x_0=\int_0^t v\,\mathrm{d}t.$$

二、角量与线量的关系

刚体定轴转动的角位移、角速度和角加速度确定后，刚体内任一点的位移、速度和加速度也就完全确定。若某点至转轴的距离为 ρ，则该点的线速度为

$$v=\omega\rho \tag{6.2-3}$$

而切向加速度和法向加速度分别为

$$a_\tau=\beta\rho \tag{6.2-4}$$

$$a_n=\omega^2\rho \tag{6.2-5}$$

由此可见，尽管刚体是一个复杂的质点系，但引入角量后，刚体定轴转动的描写就显得十分简单。

在质点的圆周运动中，我们曾把圆周运动的角速度看作矢量，其方向沿垂直圆周平面的轴线，指向满足右手定则。在刚体的定轴转动中，我们也可以把角速度看成矢量，角速度矢量的方向沿转轴，指向仍满足右手定则。引入角速度矢量后，定轴转动刚体上各点的速度、加速度与角速度的关系可以写成更简洁、明了的形式，而且可以同时把这些线量的大小和方向表示出来。在转轴上任取一点作为坐标原点，则刚体上任一点的位置可用位矢 $\boldsymbol{r}$ 表示。由图 6.2-2 不难看出，位矢为 $\boldsymbol{r}$ 的点 P 的速度为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{6.2-6}$$

切向加速度为

$$\boldsymbol{a}_\tau=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r} \tag{6.2-7}$$

法向加速度为

$$\boldsymbol{a}_n=\omega^2 r\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{n}}$$

$$= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \qquad (6.2\text{-}8)$$

所以

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \qquad (6.2\text{-}9)$$

三、角速度矢量

把角速度看作矢量后，定轴转动中线量与角量之间的关系可表示成非常简洁的形式．但是这样规定的角速度矢量是否具有矢量的性质，乃是一个值得深究的问题．尽管在定轴转动中，我们规定了角速度的大小和方向，但有大小、有方向的量不一定是矢量．矢量的重要特征是应满足平行四边形相加法则．角速度矢量是否满足这一法则？这只有在刚体同时参与绕两个轴的转动时才能判定．例如在图 6.2-3 中，

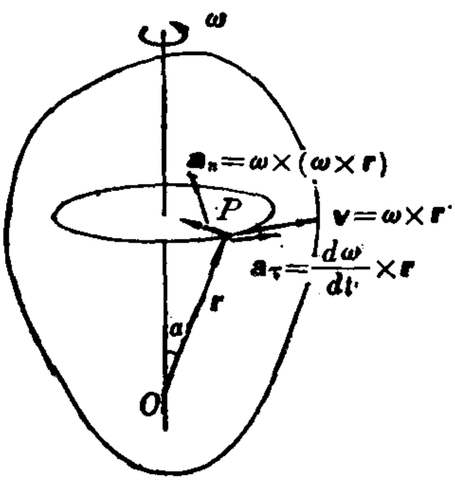

图 6.2-2　定轴转动刚体上任一点 P 的速度、加速度与角速度的矢量关系

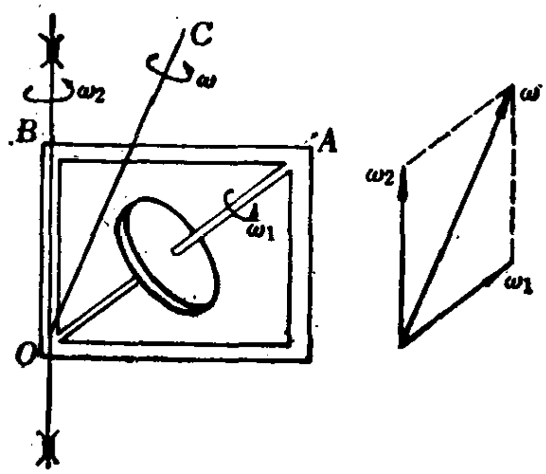

图 6.2-3　角速度的合成

圆盘既绕矩形框架的对角线 OA 以角速度 ω_1 转动，框架又绕其一边 OB 以角速度 ω_2 转动，这样两个转动与以 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ 为角速度的一个转动是否等效？其中 $\boldsymbol{\omega}$ 由 $\boldsymbol{\omega}_1$ 和 $\boldsymbol{\omega}_2$ 按平行四边形法则求得．

为此，我们先来考察角位移是否是矢量的问题．我们可以用规定角速度的大小和方向的同样方法来规定角位移的大小和方向，即令其大小等于转过的角度，方向沿转轴且满足右手定则．于是角位移既有大小，又有方向．然而有限的角位移却不是矢量，因为它不符合矢量相