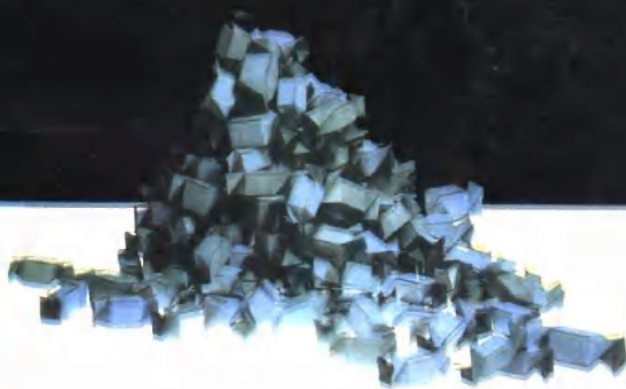


问题解决与数学教育

郑毓信 编著
江苏教育出版社



郑毓信 编著

江苏教育出版社

问题解决 与 数学教育

WENTI JIEJUE

YU

SHUXUE

JIAOYU

(苏)新登字第 006 号

期 限 表

于下列日期前将书还回

问题解决与数学教育

郑毓信 著

责任编辑 王建军

出版发行：江苏教育出版社

(南京中央路 165 号，邮政编码：210009)

经销：江苏省新华书店

印刷：金坛印刷厂

(金坛市西门大街 18 号，邮政编码：213200)

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 7.625 插页 1 字数 187,400

1994 年 6 月第 1 版 1994 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—1200 册

ISBN 7-5343-2051-8

G·1827 定价：3.50 元

江苏教育版图书若有印刷装订错误，可向承印厂调换。

1991/30/17

前

言

“问题解决”是美国数学教育界自 80 年代以来的主要口号。集中地对“问题解决与数学教育”这样一个主题作出系统的分析和论述便是本书的主要内容。

笔者 1991-92 年对美国近一年的学术访问构成了这一著作的直接基础；另外，先前在数学哲学与数学方法论方面的长期工作也为对于“问题解决与数学教育”的深入研究提供了良好的条件。事实上，本书并非对于国外有关工作的“纯客观”介绍，而是包括了对于论题进行系统分析的一个新的理论框架——这就是作者对先前的工作进行综合并以此为基础对国外的有关工作进行分析比较的直接结果。

具体地说，本书中关于“问题解决”的论述主要包括以下三个部分：第一部分（第二章、第三章）对“问题解决”研究的历史发展进行了回顾，并对这一概念的精确涵义以及“问题解决”作为数学教育中心环节的合理性和必要性进行了系统的分析；第二部分（第四章-第六章）是关于“问题解决”本身的理论研究，具体地分析了影响解决问题能力的各种因素，同时也对提出问题的方法进行了论述；第三部分（第七章、第八章）集中地讨论了“问题解决”的教学问题，其中涉及到了数学教育的一系列基本问题。

全书在整体上突出了“问题解决”对于数学教育的特殊意义。事实上，美国数学教育正面临着一个新的改革运动，而“问题解决”就是这一改革运动的一个中心论题——因为，对于“问题解决”的强调不仅标志着数学教育目标的根本性变化，而且对于“问题解决”的现代研究也集中地体现了与传统教育思想直接相对立的一

种新的数学教育思想。明确地指出“问题解决”现代研究的这一特殊背景并对其所包含的新的数学教育思想作出进一步的分析就是本书第一章(绪论)和第九章(结束语)的主要内容。另外,这事实上也就表明了这一著作的主要目标,即是希望通过对于国外数学教育最新进展的介绍与分析促进我国的数学教育事业。

最后,应当提及的是,在本书的写作过程中笔者有幸得到了美国数学教育界的一些著名人士,如斯蒂恩(L.Steen)教授、伦伯格(T.Romberg)教授、舍费尔德(A.Schoenfeld)教授、玛(C.Maher)教授等的热情支持。特别应当提及的是,美国新泽西州立大学-罗格斯(Rutgers)大学的戴维斯(R.Davis)教授从各方面为笔者创造了良好的工作条件。在此特向上述各位及给我以资助的美国 The United Board for Christian High Education in Asia 和 G.Page、T.Johnston、R.Luke 及查刘璧如、张宁武、张澄武等长者及友好表示诚挚的谢意。另外,我也愿意借此机会向这些年来一直给我以巨大支持的徐利治导师、夏基松导师、林德宏导师以及江苏教育出版社各位领导和朋友表示深切的谢意。笔者更愿以此书表示对我的妻子江若媛和子女郑玮的真挚爱意,感谢他们在这二十年中所给予我的一贯的支持、理解和谅解。

郑毓信

1993年元月于南京大学

目 录

一 绪论：美国数学教育现代发展综述	1
1.1 时代的挑战	4
1.2 若干重要的理论进展	9
1.3 加强学习，深化研究，加速发展我国的数学教育事业	14
二 美国“问题解决”研究的历史与现状	17
2.1 波利亚的贡献	17
2.2 曲折的前进	25
三 “问题解决”与数学教育	32
3.1 问题的分类	32
3.2 什么是“问题解决”	35
3.3 “问题解决”与数学教育	40
3.4 “好”的问题的“标准”	45
四 “问题解决”的要素(一)	50
4.1 知识的良好组织	52
4.2 启发法	67
五 “问题解决”的要素(二)	87
5.1 调节	87
5.2 观念	110
5.3 情感	121
5.4 好的解题者所应具有素质	124
六 提出问题的艺术	126
6.1 提出问题的策略	126
6.2 提出问题的艺术	135
七 “问题解决”的教学与数学学习心理学	150
7.1 一些基本概念	150

7.2	不同的教学形式·····	155
7.3	数学学习心理学与构造主义的数学学习观·····	157
7.4	教师的作用·····	171
7.5	“问题解决”教学的实例·····	182
八	“问题解决”教学的若干问题·····	201
8.1	考核方法的改革·····	201
8.2	教师的培养和训练·····	208
8.3	现代技术条件的充分应用·····	215
九	结束语：积极开展数学方法论和数学教育哲学的研究··	222
9.1	深入开展数学方法论的研究·····	222
9.2	数学教育哲学与数学教育学的理论框架·····	229

一 绪论：美国数学教育 现代发展综述

本世纪 60 年代美国的数学教育曾经历了一场轰轰烈烈的“新数运动”；其后，在 70 年代则有所谓的“回到基础”，这事实上是数学教育处于低潮的一种表现：由于“新数运动”普遍被认为是失败的，而人们又缺乏关于数学教育应往何处去的明确认识，因此，作为对于“新数运动”的一种“反动”，那种单纯强调基本知识和基本技能，特别是认为只需通过反复的、大量的练习就可促成学生较好地掌握基本知识和基本技能的传统观点就重新占据了主导地位，这也就是所谓的“回到基础”。

然而，自 80 年代以来，美国的数学教育又发生了重要的变化。特别是在 80 年代进入了下半叶以后，美国的数学教育开始进入一个新的改革高潮。这就如同美国国家科学理事会(NRC)在 1990 年发表的关于数学教育未来的报告《人人都得算数：关于数学教育的未来给国民的报告》(《Every-body Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education》，以下简称为《人人都得算数》)中所指出的：“在未来 20 年中，全国中小学和大学的数学课程都将经历重大的变化——这些变化将包括课程内容的根本性变革以及教学方法、教师培养、教师专业化训练、评估方法、公众态度等方面的变化”。(第 87 页)

正像 60 年代的“新数运动”，美国数学教育界目前所面临的新的改革运动的一个重要标志也是社会对于教育的普遍关注。或者说，促成新的教育高潮的一个重要原因即是关于教育现状的普遍的“危机感”。具体地说，就 60 年代的“新数运动”而言，其直接的社会基础即是由于苏联人造卫星首先发射成功所造成的“教

育危机感”：苏联卫星的率先发射在西方社会引起了极大的震动；震惊之余，作为一种反省，人们普遍认为教育的落后正是造成这种状况的一个主要原因，从而，全国上下就对如何搞好教育的问题给予了特别的关注。与此相对照，在今天的美国社会，我们又看到了对于教育的普遍关注，而且，这在很大程度上也就是由于对现状感到不满而引起的“危机感”。例如，针对美国学生近年来在国际教育质量测试中的“拙劣”表现（据美国报界 1992 年 2 月 5 日报道，在最近的一次测试中，美国学生的数学成绩在 9 岁组和 13 岁组——这是仅有的两个年龄组，分别有 10 个和 15 个国家参加——分别列第 8 位和第 14 位），有不少人士惊呼道，这样的教育质量将会危及美国在国际竞争中的地位。从而，一个普遍的认识就是：“为了国际竞争的胜利和保持科学的领先地位，美国必须迅速改进自己的数学教育……我们再也不能坐视这样的情况发生了，即我们的儿童并不能通过学校教育而从数学上为 21 世纪作好准备。挑战是明显的，机会就在眼前。是行动的时候了！”（同上，第 96 页）例如，也就是出于这样的考虑，美国总统甚至把“使美国学生的数学和科学水平在 2000 年居世界先进行列”列为自己的主要工作目标之一。显然，这种对于数学教育的普遍关注即就为新的发展提供了重要的动力。这就如同美国数学协会(MAA)前任主席斯蒂恩(L.Steen)在 1992 年离任时所指出的：现在我们所面临的是对于教育前所未有的普遍关注，这既令人鼓舞，但同时又使人感到很大的压力。（“Activities of CUPM”，载 UME Trend, 1992 Jan.）

应当指出，上述的普遍关注事实上就是社会进步与数学教育“落后”现状之间的尖锐矛盾的集中反映。这也就是说，社会的进步即人类社会由工业社会向信息社会的发展正是促成美国新的数学教育改革运动的最为重要的外部原因。对此我们将在第一节中作出进一步的介绍和分析。

其次,一个深入的数学教育改革运动又必需具有一定的理论基础。例如,现代数学中的结构主义观点,特别是法国布尔巴基学派的研究就为60年代的“新数运动”提供了必要的理论基础。与此相反,70年代由于缺乏必要的理论基础而导致了向传统观念的简单“回归”。就美国数学教育新的改革高潮而言,其又一重要特征在于正是过去十多年中在理论研究方面所取得的重要进展为此提供了必要的基础。这就如同舍费尔德(A.Schoenfeld)教授所指出的:数学教育的现代发展“主要建立在过去十年中所取得的一些进展之上:对于思维与学习的性质以及解决问题的策略和自我调节更为深入的理解;关于数学是‘模式的科学’和数学是一种有意义的活动的新观念;认知科学的研究和‘学习的文化’。”(“Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense Making in Mathematics”)对于上述理论发展我们将在第二节中作出简要的介绍。

最后,就美国新的数学教育改革运动而言,我们应特别提及近年来所出现的对于数学教育有着重要指导意义的一系列文件,特别是美国数学教师全国委员会(NCTM)于1989年发表的《学校数学课程和评估的标准》(《Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics》,以下简称为《课程标准》)和上面所已提及的美国国家科学理事会于1990年发表的《人人都得算数》。具体地说,后者清楚地表明了新的时代对于数学教育的新要求,从而指明了数学教育改革的必要性及其基本目标;另外,《课程标准》可被看成联系理论研究和学校教育实践的一座桥梁,即是具体地表明了应当如何去实现所说的教育改革和新的教育目标。这正如该书在“结束语”中所指出的:“《课程标准》可以被用作改进美国学校数学教学和学习的一个基础。”“《课程标准》所提倡的变化应当导致数学课程和教法的重建”。(第254,251页)

除《课程标准》外,美国数学教师全国委员会又于1991年发表

了《数学教师的职业规范》(《Professiona Standards for Teaching Mathematics》,以下简称为《教师规范》),国家科学理事会及其下属的数学科学教育部(NSEB)也于1991年发表了《学校数学的改造:课程(改造)的哲学和框架》(《Reshaping School Mathematics:a Philosophy and Framework for Curriculum》)和《算上你:支持数学教师标准的行动》(《Counting on You:Actions Supporting Mathematics Teaching Standards》)等一系列文件,分别对数学教育改革的一系列问题和基本观点作了进一步的阐述。由于这些文件较好地体现了时代的新要求和数学教育的新观念,因此,发表以来得到了普遍的重视和好评。例如,《课程标准》被誉为“开创了数学教育改革的一个新阶段”、“美国教育史上的一个里程碑”。显然,这为新的数学教育改革运动的深入发展提供了良好的基础。

由于“问题解决”在一定意义上可看成美国新的数学教育改革运动的中心论题,反之,新的改革运动又可以说是为“问题解决”的深入研究和广泛实践提供了必要的背景和条件,因此,作为全书的开端,我们将首先对美国新的数学教育改革运动作出概要的介绍。

1.1 时代的战挑

正如上面所已指出的,对于美国新的数学教育改革运动时代特征的分析事实上即是表明了这一运动的必要性和合理性。

具体地,我们首先考虑这样一个问题:与三四十年前相对照,我们的数学教育是否有了任何实质性的重要变化?或者说,我们今天的数学教育是否与五六十年代的数学教育十分相似,以致实际上形成了一个根深蒂固的传统?

如果承认今天的数学教育是与三四十年前的数学教育十分相似的话,这就显然暴露了这样一个严重的问题:基本守旧的数学教育如何能够适应飞速发展的时代和社会?

正是从这样的角度进行分析，美国的数学教育工作者响亮地提出了这样一个口号：我们应当努力创造适应新的时代要求的数学教育，即信息时代的数学教育。从而，在这样的意义上，美国新的数学教育改革运动从本质上说也就是社会发展的必然产物，即是人类社会由工业社会向信息社会的发展为这一改革运动提供了必要的社会背景和巨大动力，特别是，我们应该清楚看到计算机技术的迅速发展所造成的重要影响。

事实上，每一时代或社会的教育体制（包括数学教育体制）都是一定的社会需要的产物；而现行的教育体制在很大程度上是工业社会的产物：由于工业社会的基本特征在于大规模的机器生产，因此，工业社会的教育目标主要地也就在于培养出大批具有健壮体格、灵巧双手和简单技能（包括计算技能），从而能够胜任简单机械劳动的未来劳动力。这样，工业社会的教育体制在整体上就必然表现出重（具体）技能和抹杀个性的特征，特别是表现为对大多数学生在培养目标上的低要求。

正因为如此，围绕着教育目标就长期存在有“实用主义”和“人本主义”的尖锐对立。坚持上述立场的即就是所谓的“实用主义”，人本主义者则认为教育的根本目标应在于实现人的“自我完善”，特别是应当促进个人理性思维（包括批判分析和逻辑推理能力）和创造性才能的充分发展。就美国社会乃至一般西方社会而言，上述的“矛盾”最终是以所谓的教育的“双重目标”得以“解决”的，即是对大多数学生（这是未来的劳动力）的低要求，和对少数学生（这是未来社会的上层分子）的高要求。特殊地，由于数学学习明显地有利于理性思维和创造性才能的发展，因此，所说的对少数学生的高要求也就以数学上的高标准作为一项重要的基本内容。

然而，由于科学技术的迅速发展，现代的信息社会对未来劳动力的培养提出了与工业社会不同的要求。这就如同《人人都得算数》中所指出的：“21世纪的劳动力将是较少体力型而更多智力

型的,较少机械的而更多电子的,较少稳定的而更多变化的。”“信息社会已经创造了一个在其中巧干要比单纯苦干重要得多的世界经济。这一经济需要的是智力上适合的劳动者,即善于吸收新思想、能适应各种变化……并善于解决各种复杂问题的劳动力。”(第11、1页)从而,不同于工业社会对大多数学生的低要求,信息社会要求未来的劳动力普遍地具有较高的文化素养,特别是具有较高的解决问题的能力。

除去单纯从社会生产的角度进行分析以外,社会的民主化也对未来的公民提出了新的更高要求:与工业社会严格的阶级划分不同,现代的民主化社会要求社会的每个成员都应成为社会平等的一员,也即能够积极地参与社会的政治生活。显然,这就要求相应的教育制度能够实现人类自身的充分发展,特别是能够充分发挥每个成员积极参与、积极进取的精神,并具有高度发展的理性思维和创造性才能。容易看出,这种对于未来公民的高要求与上述关于未来劳动者的高要求是完全一致的。从而,传统的“实用主义”与“人本主义”在教育目标上的尖锐对立在新的条件下就得到了统一,或者说,由工业社会向信息社会的发展必然地要求学校教育用普遍的高标准去取代传统的“双重目标”。

从数学教育的角度看,上述的变化当然也就包括了在数学教育方面普遍的高标准,而这主要就是指我们应当努力提高学生应用数学知识解决问题的能力,并通过数学学习发展学生的理性思维和创造性才能。

正如上面所已提及的,就信息社会的数学教育而言,我们还应特别注意计算机技术迅速发展所造成的巨大影响。(应当着重强调的是,这方面的发展速度实在是十分惊人的。例如,如果说美国过去是“人人开汽车”,现在则还应当加上“人人(学)用电脑”。又如,十年前计算机所能从事的工作,现在都能借助于简单的计算器得以完成。)

首先,计算机技术的迅速发展和广泛应用大大加强了先前业已存在的“数学化”倾向,或者说,极大地扩展了数学的应用范围,以致信息时代就可以说是一个“数学化的时代”。这就如同《课程标准》中所指出的:“计算机处理大量信息的功能使得在诸如贸易、经济、语言、生物学、医药、社会学等领域中实行量化并对信息进行逻辑分析成为可能,特别是在社会科学与生命科学中已经造成了巨大的变化。事实上,定量分析的技术几乎已经渗透到了智力活动的所有领域。”(第7页)显然,这种“数学化”的趋势就使得数学教育中普遍的高标准成为历史的必然。

其次,计算机技术迅速发展对于数学教育的重要涵义还在于其为数学教育提供了新的发展前景(或者说,新的社会-文化条件)。具体地说,第一,计算机(包括计算器)技术的迅速发展,使得人们能够彻底摆脱片面强调计算技能的传统数学教育思想的束缚,从而真正集中于学生解决问题能力的培养。特别是,这也使得计算能力低下不再成为部分学生进一步学习的障碍。例如,借助于先进的计算器,即使是一些在代数学和三角学方面基础较差的学生也仍然可以继续学习微积分和统计数学。第二,借助于计算机(或计算器),人们就有可能克服传统计算方法的局限性,从而使得社会生活中的实际问题真正成为数学教学的组成部分,而这对于提高学生的数学能力(包括树立正确的数学观念、态度等)显然是十分有利的。第三,计算机(或计算器)技术的迅速发展为数学教学提供了新的有效手段。例如,图象计算器和计算机的应用就为函数的教学和空间想象力的培养提供了十分有效的手段。第四,特别重要的是,计算机的广泛应用事实上是为学生提供了一个新的更为有效的学习环境。例如,借助于程序,学生就可相对独立地去从事数学的学习和探索,而不再过分地依赖于教师的帮助和指导。显然,从这样的角度地去进行分析,计算机技术迅速发展的意义主要地就不在于为传统数学教育思想的实施提供了新的工

具，而是为数学教育的改革开拓了新的广阔前景。也正是在这样的意义上，美国数学教育界认为：“在众多促进数学教育改革的因素中，现代技术具有最大的潜在的革命性影响。”（《学校数学的改造：课程（改造）的哲学和框架》，英文版，第22页）

综上所述，正是人类社会由工业社会向信息社会的过渡，特别是计算机技术的迅速发展为美国新的数学教育改革运动提供了直接的社会（时代）背景。或者说，数学教育的彻底改革正是时代发展的必然要求。这就如同《人人都得算数》中所指出的：“今天的教育继承了工业时代的体制，从而就不应错误地被用来培养面向信息时代的儿童”。（第11页）进而，这一改革运动的最终目标就是要创造适应信息社会与计算机时代的新的数学教育。

美国新的数学教育改革运动的这种鲜明的时代特征在上面所提到的各个指导性文件中都有着十分明显的表现。例如，正是出于这样的考虑，《人人都得算数》中明确地提出，创造新的数学教育正是“时代的挑战”。另外，《课程标准》中则就依据由工业社会向信息社会的发展提出了关于数学教育的如下四个“社会目标”：

- （1）具有良好数学素养的劳动者；
- （2）终身学习的能力；
- （3）平等的教育；
- （4）明智的选民。

这一纲领性文件又明确指出：所有这些“社会目标”的核心就是要使所有的学生具有较高的数学素养，也即能够达到如下的五个具体目标：

- （1）学会认识数学的价值；
- （2）对自己的数学能力具有信心；
- （3）具有数学地解决问题的能力；
- （4）学会数学地交流；
- （5）学会数学地推理。（第3-6页）

应当指出,在上述五个目标中,解决问题能力的培养具有核心的地位。事实上,帮助学生“学会认识数学的价值”并“对自己的数学能力具有信心”,显然是提高学生解决问题能力的必要前提;另外,所谓“学会数学地交流”和“学会数学地推理”则可看成对于“数学地解决问题的能力”的具体阐述,也即是分别强调了数学的语言性质和逻辑性质。由此可见,与突出强调基本知识和基本技能的传统数学教育相比,新的数学教育目标包含了深刻的变化,而这正是社会发展的必然要求。

1.2 若干重要的理论进展

数学教育的上述目标不仅反映了时代的要求,同时也反映了过去十多年中在数学教育理论研究方面所取得的重要进展。一般地说,正是这些理论进展为美国新的数学教育改革运动奠定了必要的理论基础。

具体地说,我们首先应提及的即是关于“问题解决”(problem solving)的深入研究。

从历史的角度看,关于“问题解决”的研究无疑应当追溯到四五十年代著名数学家波利亚关于数学启发法的“现代复兴”,因为,正是波利亚在这方面的工作为现代关于“问题解决”的研究奠定了必要的基础。然而,尽管波利亚在这方面的工作在五六十年代曾产生一定的影响,却又只是到了80年代,随着“新数运动”和“回到基础”的失败,“问题解决”才正式成了美国数学教育界的主要口号,从而,从整体上说,关于“问题解决”的研究就表现为一种“曲折的前进”。

对于这一曲折的前进,我们将在第二章中作出专门的分析,这里仅指出以下几点:

第一,对于所说的“问题解决”必须有正确的理解。事实是,由于“问题解决”从80年代起成了美国数学教育界的主要口号,因此