科學圖書大庫

數學史話

編著 王昌銳

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

數學史話

譯者 王昌鋭

徐氏基金會出版

我們的一個目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識的傳播，是提高工業生產，改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。科學宗旨，固在充實人類生活的幸福也。

近三十年來，科學發展速率急增，其成就超越既往之累積，昔之認爲絕難若幻想者，今多已成事實。際茲太空時代，人類一再親履月球，這偉大的綜合貢獻，出諸各種科學建樹與科學家精誠合作，誠令人有無限興奮！

時代日新又新，如何推動科學敎育，有效造就人才，促進科學硏究與發展，允爲社會、國家的急要責任，培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如生物、化學、物理、數學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科敎育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。科學硏究與敎育的學者，志在將硏究成果貢獻於世與啓導後學。旨趣崇高，立德立言，也是立功，至足欽佩。

科學本是互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的意外收穫。

我國國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年之間，所可苛求者。因此，從各種文字的科學圖書中，精選最新的基本或實用科學名著，譯成中文，依類順目，及時出版，分別充作大專課本、參考書，中學補充讀物，就業青年進修工具，合之則成宏大科學文庫，悉以精美形式，低廉價格，普遍供應，實深具積極意義。

本基金會爲促進科學發展，過去八年，曾資助大學理工科畢業學生，前往國外深造，贈送一部份學校科學儀器設備，同時選譯出版世界著名科學技術圖書，供給在校學生及社會大衆閱讀，今後當本初衷，繼續邁進，謹祈：

自由中國大專院校敎授，硏究機構專家、學者；

旅居海外從事敎育與硏究學人、留學生；

大專院校及硏究機構退休敎授、專家、學者；

主動地精選最新、最佳外文科學技術名著，從事翻譯，以便青年閱讀，或就多年硏究成果，撰著成書，公之於世，助益學者。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。掬誠奉陳，願學人們，惠然贊助，共襄盛舉，是禱。

徐氏基金會敬啓

新數學文庫

本文庫係由當代數學專家卅餘人所編撰，全世界均有譯本，乃數學權威之寶典。其目的在確立中等學校學生及社會大眾之某些頗饒興味，而易領悟的重要數學觀念。本文庫內容，多不含於中學數學教科書中，且難易懸殊，有的部份，需要特別研究。

學習數學的最好方法，爲多做習題。各書所附習題，有些頗爲艱深，需要慎密思考。讀者應養成手持紙筆，從事閱讀之習慣，自能得心應手，趣味盎然。

本文庫共二十册陸續出版，以供讀者研習。除第十七册係由葉哲志先生承譯外，其餘各册均由王昌銳教授承譯。（定價每册港幣4元，新台幣25元）

1. 有理數及無理數 (Numbers: Rational and Irrational)
2. 微積分研究 (What is Calculus About ?)
3. 不等式論 (An Introduction to Inequalities)
4. 幾何不等式 (Geometric Inequalities)
5. 高中數學測驗（第一册）(The MAA Contest Problem Book 1)
6. 大數論 (The Lore of Large Numbers)
7. 無窮數之妙用 (Uses of Infinity)
8. 幾何移轉 (Geometric Transformations)
9. 連分數 (Continued Fractions)
10. 圖形及用途 (Graphs and their Uses)
11. 匈牙利數學問題詳解（第一册）(Hungarian Problem Book 1)
12. 匈牙利數學問題詳解（第二册）(Hungarian Problem Book 11)
13. 數學史話 (Episodes, from the early history of mathematics)
14. 群與圖 (Groups and their Graphs)
15. 特別數學 (Mathematics of Choice, or How to count Without Counting)
16. 由畢達哥拉司至愛因斯坦 (From Pythagoras to Einstein)
17. 高中數學測驗（第二册）(The MAA Contest Problem Book 11)
18. 拓樸學基本概念 (First Concepts of Topology)
19. 幾何研究 (Geometry Revisited)
20. 數目理論入門 (Invitation to Number Theory)

譯　序

俗話說："羅馬不是一天建設起來的"！現代的科學，技術，典章文物，也不是一天成就起來的，尤其是數學。

數學是科學之母，現代數學尤然，它富於連續性與累積性，亦富於普遍性及國際性，世界各國，各有其文化，風俗、習慣、歷史、文物、制度……但是，今日之現代國家，却共同使用相同之數學內容，所以，可說數學是集全世界人類智慧，所發明的一種學問。

幾千年來，成千成萬的數學家，絞盡腦汁，挖空心思，奮鬥於數目字間，為科學技術，作開路先鋒。觀察事物，研究定理，實驗求證，解決問題……，眞是飽經憂患，歷盡艱辛，始發明算術、代數、幾何之數學內容。由數字至數制，而公式，而定理，而法則，而運算，乃至於工業科學之應用，點點滴滴，日積月累，數千年來之成果，始於今日，大放異彩，大放光芒。

數學因時間進展而突飛猛進，但亦因空間變化，政治戰亂等因素而湮沒失傳，例如巴比倫數學，埋沒地下，達數千年；始於半世紀前，被發掘出來，使現代數學知識，又增珍貴資料，所以研究數學，應多涉獵數學歷史，追尋數學發展遺跡，以收觀今鑑古之效。

本書由巴比倫楔形文字之發現，敍述其數字，數制及乘法表，倒數表，而至於歐幾里德之幾何原本，阿幾米德之幾何作圖及機械應用，終而及於波托里米之"數學大成集"與天文數學。此中所陳，各有其數學之時代背景與空間因素。各家學說，著作，以及彼此間關係，均能把握重點，平鋪直敍，以使讀者瞭解今日數學之來源，及發展過程，從而數典而不忘其祖。提高數學興趣，瞭解數學內容，實莫過於斯！因為古代數學，歷久彌新，迄今仍為數學之基本內容也。

著者亞波（Asger Aaboe）博士，一九二二年，生於丹麥之哥本哈根，由1940至1947年，入哥本哈根大學，專攻數學，旁及天文，物理、化學，尤對數學史，具深厚興趣。一九五七年於美國伯老恩大學接受博士學位。其博士論文，即"巴比倫人之行星理論"，具見其對古代數學之心得。

本書頗適我國中上學校師生參考，以涉獵古代數學歷史促進數學興趣，以期"溫故知新"之新義，亦及於斯也。本書譯名，力求通俗，文句力保顯

書之眞，重要名詞術語，均留綴原文，以資對證。

譯稿多勞吾妻蔣君英女士協助整理，深為感激，特誌勿忘。

中華民國五十九年元月廿二日
湘潭王昌銳序於高雄工專

致讀者

本書爲數學專家，所撰一系列書刊之一，其目的在確立多數中等學校學生及社會人士，有興趣而可瞭解之某些重要數學觀念，新數學文庫之多數內容，包含中學課程不常包括之題材；且難易各別，而即使同一書中，某些部份，即比其他部份，需要較高程度之專注，由是，而讀者需要少量技能學識，以瞭解此等書刊之大部份，且須作明智之努力。

如讀者一直僅於教室作業中遭遇數學，則應記住，數學書籍，不能快速閱讀，亦不應乍覽之餘，卽期望能瞭解書中所有部份，而應很自然的越過複雜部份，稍後再回來讀；因後續之敍述，常能澄清一種理論也。反之，包含完全熟悉題材之章節，則可快速閱讀。

學數學之最佳途徑，在“做”數學，各書所含習題，有些需要縝密思考，讀者應養成手持紙筆，從事閱讀之習慣；如此，數學對之，將變爲意義倍增。

對著者及編者而言，此爲一新嘗試。願向協助本文庫籌印之許多中學師生，表示由衷感謝，編者頗有興趣於此等書刊之反應意見，望讀者書面寄交：紐約大學新數學文庫編輯委員會(Editorial Committee of the New Mathematical Library, New York University)。

引　言

如一學童，突然插入外國的一所新學校，彼將自然的，感覺課程方面的許多困難，語文研究及其他以語文爲基礎之課題，如文學之因國度而變，及某些功課，如歷史即其一端，甚至於一國之內，亦因地而異，但於科學及數學方面，該生或能感覺與家鄉無殊，因卽使於提示之順序或方式，可能因地而殊，但此等課題，頗富國際性。

但，現如假想該生，不僅轉入不同地方讀書，且亦轉入一不同時代——如轉至二千年以前之希腊，或四千年以前之巴比倫（Babylonia）——彼將難於求得任何事物，以了解如科學之內容或方法方面，於亞里士多德(Aristotle)時代，以其基礎原則之多數討論，及運動性質，呼物理(Physics)爲何，而將類爲哲學；其與現代物理之關連，僅於仔細研究物理科學之發展後，始行出現。今日學生對數學一門，已非常熟稔：彼能用其巴比倫法，解二次方程式，用希腊方法，完成幾何作圖，此非謂其未見任何差別，但僅爲形式，而非內容也；巴比倫數制，與吾人今日所用者不同，但巴比倫公式之用以解二次方程式者，則仍爲人樂用。

數學之獨特永久性與世界性，其時間之獨立性及文化結晶，爲其特質之直接結果，於第二章，將略陳數學理論之結構，此處僅略述本書少數之獨特性質。

首先應提示數學爲累積的；卽，從不失其邊際，而其邊界則向外移動，此係其絕對標準結果之一部份，以確定一度爲良好數學者，將常如是，且保持爲數學知識活體之一部份，此穩定的生長，產生物理進展之反面。例如，幾種根本革命，雖係罪惡，或尚有利於世，故當希腊物理學，僅有現代物理學家之歷史利益時，希腊數學仍爲現代數學所不可避面之良好數學。英國數學家力托伍德氏（Littlewood），曾有此論，其書生之見，爲希腊數學家，不如聰明之學童，或“獎學金候選者”，但如“另一大學之學生”。

另一方面，應提一提數學之演繹性（deductive Character）：一種數學理論，進展於一有秩序，明頭說明之原理的邏輯形式中，此結果之一，爲某種理論知識，產生或將產生鏈接該原理之所有理論前驅人士之知識，開始者，應開始於起始之處，而開始之本質，常爲古老。茲以生物學上最叩人

心弦之語，解釋此點，„Ontogeny recapitulates Phylogeny” 意即，“於個人發展中，急予審視，即見其全部發展”。如取其學術價值以言，此語頗能引致，且已引致一切無謂之義，但或證其包含一種眞理。於同樣之修正意義中，可應用於數學家之產生。數學家之萌芽發展，即爲教育，將之由開始處，引至其時代之研究前綫，誠然，數學本身即自然而然，隨之發展。

由是，不論是否需要，於數學上，過去與吾人關係頗多，而不論其是否需要，數學家應於開始，即研究古代數學之本體爲何，可記述之數學方式外貌爲何，數學家亦以其題材之極度古老爲傲：數學之古老，根據史家研究，遠過其他科學，因此，對於數學生徒，特別自然地體認其題材歷史，與其本身同在，本書目的，即在助其如此。

不擬對由開始至今之數學史，作一測度，若如是作，達一合理長度時，勢需減弱數學之詳盡性，且僅對數學專精之士，提供淺顯輪廓深度，爲有意義，不論如何，仍於數學史中，選取四段史科，而詳言之，並對其正常結果所匯集之某些概念，予以評述，關於題材選擇之指導原則，首爲數學內容，應在中學代數及幾何學生程度以內，故對極限作爲與微積分方面，一律摒除（但引致阿幾米德發現球體體積與表面面積之短簡討論，則難能避免），進一步言，希望所選內容，足以代表其時代與作者之數學大事，而脫出一般數學史家常軌，望其包含獨特之論，而具有某些普通觀念與要旨。

當然，如斯目標，僅能大略近似，本書採用題材出現之順序，亦頗井然有序，巴比倫數學之陳述，近半世紀來，始於楔形文字中發現；歐幾里德正五角形作圖，來自其幾何原本；阿幾米德數學之三範例：三等分一角，正七角形作圖，及球之體積與表面面積；及最後之希腊三角學，由波托里米（Ptolemy）於其數學大成集中陳示，余曾力圖偏重於古代數學知識之來源爲何，而於題材陳述中，亦曾試圖接近教材，以使現代讀者，心領神會，怡然自得。

由希腊數學中，所選間歇性題材，爲將圓分成許多相等部份，歐幾里德（Euclid）曾用規與尺，實行此種劃分，阿幾米德（Archimedes）應使用更複雜之工具，而波托里米則有興趣於計算所對圓週適當部份之弦長，巴比倫數制爲巴比倫數學之脊樑骨，曾由波托里米，採用於其合理表示分數之形式（故保留爲度與時之次劃分），巴比倫之影響，可由歐幾米德二次方程式之確立見之，雖其解法，於表面上別於巴比倫者，但兩法對同一問題，有其相似性，將以之遺諸讀者，於四章之間，尋其連繫之綫索，雖其各章，均能

分別閱讀。

最後，願對末尾三章有關希腊名稱，作兩解釋及警告性之敍述，第一，未曾企圖其拼音之一致性，但信筆書之，如讀者有興趣於某一特別名稱之正常希腊形式，可由余之拼法重新作爲；諸如柏拉圖（Plato），亞里士多德(Aristotle）及歐幾里德（Euclid）等長時使用之盛名，應勿錯訛。第二，許多希腊數學家及學者姓氏，其僅不甚顯著的出現一兩次者，可能不見於吾表，而有其省略之理由，但當選書時，例如"司徒拜斯（Stobaeus）告知"，或"依古傳云"，余寧取其前者，因余認爲當正確可如此易於取得時，其錯失即不可寬恕。讀者之欲觀察其由者，吾之選擇，當能有助，如不欲觀，亦無大害。然而，不欲雜亂本書篇幅於已學內容之畫蛇添足；書未參考書目中之某些著作物，可供充份參考。

發現遠古以來，偉大頭腦之思想形態，頗値興奮，而於數學科學中，當以較他處爲篤定之更高程度發生共鳴時，即能領會，此爲指引他人，沿路前進之古往方式，或如古語所云，使古人於其墳墓中，動其嘴唇，然尙無取代古數學家閱讀之實際方法，且如本書，能使其讀者如此作爲，則已達成其目的矣。

目　錄

第一章　巴比倫數學

1－1來源

當語及巴比倫數學（Babylonian mathematics）時，即指古美索不達米亞（Mesopotamia）——幼發拉底（Euphadtes）河及底格里斯（Tigris）河之間的國家，或簡單的說，今日稱爲伊拉克（Iraq）國所孕育之一種數學。因此，使用巴比倫人一詞，其意義較習慣上近東（Near East）之政治歷史爲廣泛，該地常使人想及巴比倫城一地而已。

直到最近，僅經由典型希臘文化至查丁（Chaldean）即巴比倫的數學家及天文學家，始知成篇累牘之資料，以此等資料爲基礎，遂假定巴比倫人，曾有某種數之神秘及數目學問；但現已知此假定爲如何缺乏眞理。

十九世紀末葉，考古學家開始發掘美索不達米亞古城遺址，此等城廓，係用過去長期遺存城市之廢石堆積而成，其房屋多用未經燒製之磚造成（如彼等今日所常爲），而各次雨淋，即將之洗去一些，新房舍建於同樣位置，地面逐漸消失，直至今城形成，由是，如對一城作一垂直斷面圖，乃發現同一城市之各階段時間，層次井然，最古老者，位於底層。

古城發掘物中，引出其他許多輝煌古代文化證據，成千累萬之陶片，均書有文字。早已獲知，其中有些記有數目，但未確悉；直至三十年前，始完全明白，而齊聲歌頌巴比倫之數學家矣。

現已有數學內容之陶片及碎片，凡四百餘，且經仔細抄錄，謄寫，翻譯，並於權威著作物中，予以宣揚，陶片本身，却典藏於許多國家之博物館中；有時，同一整片之不同碎片，却分藏於不同之博物館中。一完整陶片——僅有少數者——，其大如手，常爲未煅之磚，所書稱爲楔形文字（Cuneiform），即形如楔者，因其形狀如單一之楔形，係片未乾時，用尖筆壓成之標誌。此諸片之大部份，爲期約在 1700 *B.C.* 之兩世紀內，其餘在末三世紀 *B.C.*（於此兩類之間，長時中斷，尚無令人滿意之解釋）。數學陶片之年代，應由發現處城址之地層推算，或由手書方式推測，因陶片內容，未

示其年代也。似乎頗爲奇特，何人熟知於末兩世紀期中，數學及科學之爆炸性變革，而知巴比倫數學，不僅於恐怖政治改變中，保持其特性，達幾乎二千年之久，但亦於其相同邊界，保持其內容。於可用之資材中，追跡任何發展，全不可能（然有某種極老陶片，顯示巴比倫數制之早期階段，而可於近期資材中，尋求更精巧之多數範例）因此，似覺巴比倫數學創立，發展甚快，而此短時期之迅速生長，又繼之以長時之停滯不前，巴比倫數學之創造者，除其成就而外，別無所知。

1－2巴比倫數制．乘法表

於研究巴比倫數學以前，應先熟悉巴比倫數制；因其，如所將見，具有對巴比倫數學之一切影響力量，於以下兩節之中，將試圖顯示其如何可能由單獨之文字，無所前知，以瞭解此種數系之結構。當然，了然於最後結果時，便輕易可爲，故讀者應勿錯估，設計吾人所循研究道路之耐心學者，所曾面對之困難。

圖 1.1 爲古巴比倫陶片之正面及背面抄件，各邊所書包含簡單符號，分爲兩行，示於圖 1.1 者，如行 I（左端）及行 II（右端）；如計算兩面，各行有 24列，但暫時不計其末列。

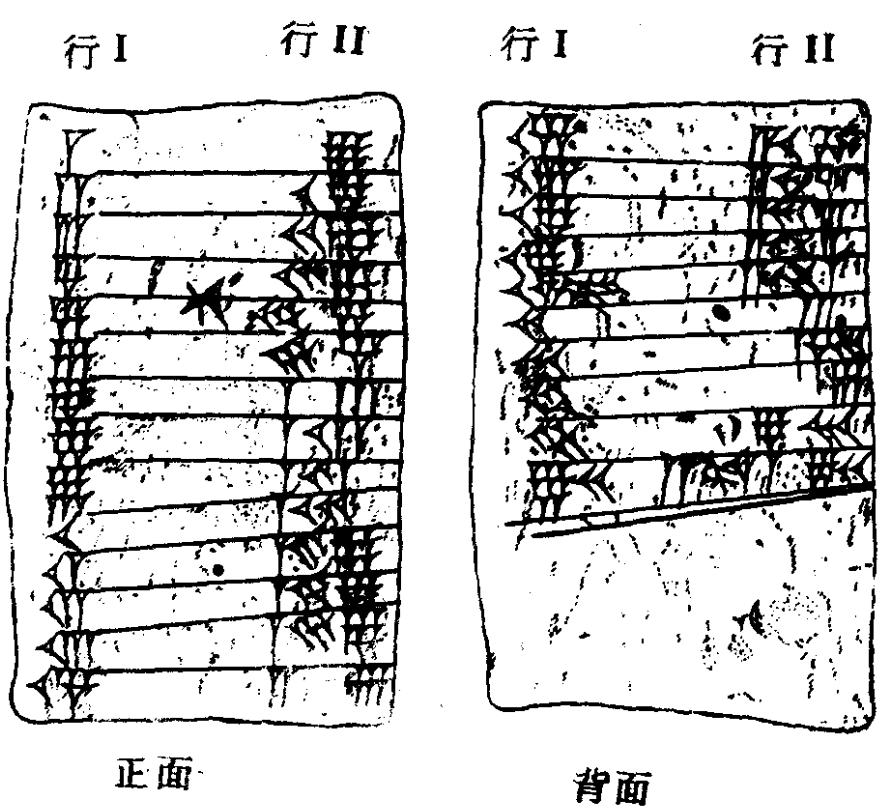

圖1.1

茲考慮行 I，於頂端開始，其第一元爲一垂直之楔，第二元爲二垂直之楔，而第三者有三，此自然可讀之爲 1, 2, 3，事實上其次六列，可易於讀出爲 4, 5, 6, 7, 8, 9，因其分別爲其中垂直楔形之數目也．然而，觀知其爲三數一群——此乃使人閱讀時，比較簡單——如是，以 8 爲例，書爲三綫，兩綫具楔形各三，而一爲二．於 9 之後，發現一新符號，角楔（Cornerwedge），如其爲讀作 10，以下八列，即無更多困難，因其係結合角楔及以前已述之 1 至 8 符號者。因此，可立刻讀作 11, 12, 13, ……，18，而無煩於其次列也。（其實，有 19 之特別符號及某刪去之標誌——但 19 常書爲一角楔及九個垂直楔。）後繼之四列有二，三，四及五個角楔，而應表示之意義爲 20, 30, 40 及 50．

茲總結以往所學：巴比倫數目，由兩基本符號構成，一種代表 1 之垂直楔形 𒁹，及一種表示 10 之角楔 𒌋，第一行簡單的列舉所有整數，至包括 20，隨之以 30, 40, 50 。

現應用此知識於第 II 行，無太多麻煩，首六列能看出爲 9, 18, 27, 36, 45, 54，茲能作一強力假定於本文件，而謂其爲 9 之乘法表，第七與第八列，則將爲 63 與 72，但發現一垂直楔，後各隨以 3 及 12，顯然，將不能讀此垂直楔形爲 1，唯一具有意義之事，爲令其表示 60 及謄出諸列爲 1, 3 及 1, 12，而令其首 1 意爲 60，乃有：

$$1,3=1\cdot 60+3=63 \quad 及 \quad 1,12=1\cdot 60+12=72.$$

其次列能謄出，並釋爲

$$\begin{aligned}1,21 &= 81\\ 1,30 &= 90\\ 1,39 &= 99\\ 1,48 &= 108\\ 1,57 &= 117,\end{aligned}$$

全合乎吾人假設，此文爲 9 之乘法表，第十四列，有兩垂直楔及一 6，或爲所謄出之 2, 6 此應爲 $14\cdot 9=126$，故應令始寫之 2 意爲 $120=2\cdot 60$. 現遂能書出以下各列爲：

$$\begin{aligned}2,15 &= 2\cdot 60+15=135\\ 2,24 &= 144\\ 2,33 &= 153\\ 2,42 &= 162\\ 2,51 &= 171.\end{aligned}$$

但其次列僅有一3，而應表示180. 如此3已後隨以表示零之一符號，或曦爲3,0，此勢將完全符合以前所得者，對3,0，將爲$3\cdot 60+0$，恰如2,15爲$2\cdot 60+15=135$，而後，僅能假設巴比倫人，未曾使用代表O之符號，於數目末尾，但遺諸讀者猜測額外空位，將爲何數，能測定此假設於較遠之以下兩列，該處求得相對於40，一6之當讀爲6,0或$6\cdot 60+0$時，誠爲$40\cdot 9$，其餘相對於30及50之未釋二列——仍不計其末者——現乃平淡的讀爲

$$4,30=4\cdot 60+30=270=9\cdot 30$$
$$7,30=7\cdot 60+30=450=9\cdot 50.$$

由是已知該文，如假定其數目符號或數字*，變更其値於其位，其方式爲移動一數字一位至左方，意即以60乘其値。

如分析其他片文於同如所作9之乘法表相同方式，此假設爲充份正確，而後乃有59數字，寫爲1,2,3,⋯，59，而片上書爲角楔與垂直楔之結合式，利用比等數字，所有數目可予書出；此種作爲，係由指定數字出現部位之重要性行之，如是，對各部位，一數目左移一位，其値大如其原値之六十倍，於謄寫巴比倫數目時，通常將如上述，以逗點“，”，分離數字，由是，一數之謄爲1,25,30，乃表示

$$1\cdot 60^2+25\cdot 60+30=3600+1500+30=5130.$$

但，如上所述，於連繫$20\cdot 9$及$40\cdot 9$之中，最好應書其數目爲1,25,30,0或，眞爲1,25,30,0,0，於該情況，其値將爲60或60^2倍之大於5130，因

$$1,25,30,0=1\cdot 60^3+25\cdot 60^2+30\cdot 60+0=60\cdot 5130$$

而

$$1,25,30,0,0=1\cdot 60^4+25\cdot 60^3+30\cdot 60^2+0\cdot 60+0=60^2\cdot 5130.$$

其實，如別無所知，數字1,25,30序列，能表示數目$5130\cdot 60^n$，$n=0$, 1,2,3,⋯之任一數；此中所欲之數，應由其上下文決定，此非可首先相信，其爲數制之可驚缺點；通常關於正常數値，毫無疑義。

巴比倫人誠偶或使用零之符號於最近之片文中**但僅表示數目以內之一

* 爲避免混淆，應偏重此說法，2,24稱爲二"數字數目；第一數字爲2，第二者爲24.

** 外形如 ⦕ 用爲其他方面之分隔符號，或句點。

空位，以資區別，例如 1,0,30 = 3600，由 1,30 = 90 而致。於較古之文件中，可簡單的留一空間於 1 及 30 之間，或甚至更簡單的，毫無所留。

為求完整，9 之乘法表末列謂

8,20 乘 1 爲 8,20

即稱爲捕捉列（Catch Line）者，文件爲系列之一，而捕捉列爲次文之首列。

1－3 巴比倫數制·倒數表

由 9 之乘法表所學得者，徒爲巴比倫數制故事之一部份。其餘可由圖 1.2 中所謄文件，除第一列外，以蒐求之，此爲已求得許多例證之一型（由古巴比倫及塞路希德*時期兩者）僅其第一列相殊，如是全含圖 1.2 中諸數。陶片重錄爲圖 1.3，包含其他事物中之此型文字兩種抄件

行 I	行 II
2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7,30
9	6,40
10	6
12	5
15	4

行 I	行 II
16	3,45
18	3,20
20	3
24	2,30
25	2,24
27	2,13,20
30	2
32	1,52,30
36	1,40
40	1,30

行 I	行 II
45	1,20
48	1,15
50	1,13
54	1,6,40
1	1
1,4	56,15
1,12	50
1,15	48
1,20	45
1,21	44,26,40

圖 1.2.

正如前文，圖 1.2 中之一所含數目，安排兩行之中，行 I 及行 II，此表結構，變爲逐列形成行 I 及行 II 數目乘積之結果，如前節所學而表示之，乃

* 塞路希德時代，（Seleucid Era）開始於 312 B.C. 之美索不達米亞，係因尼開托（Seleucus Nicator）之名而致，彼前爲亞力山大（Alexander）之將軍，彼企圖爲亞力山大帝國東（較大的）部之王，包含美索不達米亞。