多目标规划有效性理论

胡毓达 编著

上海科学技术出版社

多目标规划有效性理论

胡毓达　著

上海科学技术出版社

责任编辑　赵序明

多目标规划有效性理论

胡毓达　著

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所经销　祝桥新华印刷厂印刷

开本787×1092　小1/16　印张21　插页4　字数273,000

1994年12月第1版　1994年12月第1次印刷

印数 1—1,200

ISBN 7-5323-3396-5/O·174

定价：29.30元

(沪)新登字108号

内 容 提 要

本书全面系统地论述多目标规划各种有效性的数学理论。主要包括 Pareto 有效性、锥有效性、若干恰当有效性以及较多有效性和 α-较多有效性。

本书可供应用数学、决策科学、运筹学、经济学、管理科学、系统科学、控制理论，以及有关工程专业的高年级大学生和研究生作为相应课程的教材，也可供从事这些领域研究的学者和教师在研究和教学中参考。

EFFICIENCY THEORY OF MULTIOBJECTIVE PROGRAMMING

Hu Yuda (Y.D.Hu)

Abstract

This book presents mathematical theories of various efficiencies for multiobjective programming in a comprehensive manner. It consists of five chapters. In the first chapter, the preference relationship and some orders in the vector space are introduced. Especially, a new class of major orders is also included. This chapter is the foundation of various efficiency theories that will be discussed later in this book. In Chapter 2, the theory of the Pareto efficiency for multiobjective programming is expounded. In Chapter 3, the cone efficiency of multiobjective programming is further studied on the basis of the cone partial order defined by the general convex cone. This cone efficiency is a generalization and extension of the Pareto efficiency in the topological vector space. Several kinds of Proper efficiencies are introduced, and the solutions with respect to the utility set will likewise be discussed in Chapter 4. In Chapter 5, the major efficiency theory of multiobjective programming based on the class of major orders defined by a class of nonconvex cones is presented. This theory is another development with a practical background of the theory of the Pareto efficiency.

The book is written for the scientists whose research fields are applied mathematics, decision making theory, operations research, mathematical economics, management sciences, systems science and control theory, and some engineering techniques as well. It may also be used as a textbook or a reference book for post-graduates and under-graduates of the senior class specializing in the fields mentioned above.

序　言

近40年来，由于多目标规划在解决现代经济和社会问题中所显示出的重要作用，它在国际上得到了迅速的发展。特别是自70年代中后期进入一般空间的抽象理论研究取得若干基本结果以后，使它初步建立了自己的理论基础，从而成为应用数学的一个新的活跃的学科。

本书是著者自1984至1993年在上海交通大学为应用数学专业研究生和教师讲授多目标规划理论课的基础上，结合对某些理论问题的研究，经过几次补充、调整和修改写成的。书中关于较多有效性理论部分，主要是作者于1983至1984年在美国哥伦比亚大学访问研究期间的工作。其中有关拓扑向量空间多目标规划问题解集的连通性和次微分稳定性的部分内容，则是作者分别与学生胡一凡博士和徐永明博士合作研究的结果。

本书旨在全面、系统地论述有限维和无限维多目标规划问题的各种有效性数学理论。限于篇幅，割舍了相对独立的有关对偶性的内容。对这一方面有兴趣的读者，可以参阅Y.Sawaragi等的论著[1]或D.T.Luc的论著[2]。此外，本书除了对其他著作中未涉及的较多有效解类和较多最优解类的求解作适当介绍之外，一般不讨论求解的方法问题。读者若需要学习方法论方面的内容，可以参考拙著《实用多目标最优化》(上海科学技术出版社，1990年)等书。

本书的预期读者是：在应用数学、决策科学、运筹学、经济学、管理科学、系统科学、控制理论和有关工程学科领域中，研究决策理论和数学规划的高年级大学生、研究生以及专家们。本书自成体系，它不论供课堂教学、自学或参考均适用。

在写作本书的过程中，陆晋奎副教授为作者提供了他的经过整理的听课笔记。此外，作者曾与李元熹教授作过几次关于有效解集可缩性问题的讨论，得到他富有启发性的指教和帮助。管梅谷教授审阅了本书的手稿，提出了宝贵的意见。在此，作者谨向他们表示衷心的感谢！

书中难免出现不妥和错谬，恳祈专家学者和广大读者不吝指正。

胡毓达

1993年7月于上海交通大学

记　号

(VMP)	Euclid 空间多目标规划问题
V-min	Euclid 空间的多目标极小化
(TMP)	拓扑向量空间多目标规划问题
T-min	拓扑向量空间的多目标极小化
(VLP)	Euclid 空间多目标线性规划问题
(VDP)	Euclid 空间离散多目标规划问题
$\boldsymbol{a}\in S$	$\boldsymbol{a}$ 属于集合 S
$\boldsymbol{a}\notin S$	$\boldsymbol{a}$不属于集合 S
$\boldsymbol{a}R\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 有关系 R
$\neg\,\boldsymbol{a}R\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 没有关系 R
$P\Rightarrow Q$	由命题 P 推出命题 Q
$P\Leftrightarrow Q$	命题 P 与命题 Q 等价
$\boldsymbol{a}\simeq\boldsymbol{b}$	元素$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 等价
S^c	集合 S 的余集
$\mathrm{int}S$	集合 S 的内部
$\mathrm{int}_K S$	集合 S 的 K- 内点集
∂S	集合 S 的边界
$\overline{S}$	集合 S 的闭包
$S\subset T$	集合 T 包含集合 S
$S\cup T$	集合 S 和集合 T 的并
$S\cap T$	集合 S 和集合 T的交
$S\setminus T$	集合 S 和集合 T 之差，即 $S\cap T^c$
$S+\boldsymbol{v}$	集合 S 平移 $\boldsymbol{v}$ 后的集合，即 $S+\boldsymbol{v}=\{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{v}\mid\boldsymbol{s}\in S\}$
λS	集合 S 的 λ 倍，即 $\lambda S=\{\lambda\boldsymbol{s}\mid\boldsymbol{s}\in S\}$

$S+T$	集合 S 和 T 的算术和，即 $S+T=\{s+t\mid s\in S, t\in T\}$
$S\times T$	集合 S 和集合 T 的笛卡儿(Descartes)积，即 $S\times T=\{(s,t)\mid s\in S, t\in T\}$
$a\precsim b$	a 和 b 有偏爱关系 $\precsim$
$a\prec b$	a 和 b 有严格偏爱关系 $\prec$
$a\sim b$	a 和 b 有淡漠关系 $\sim$
K	向量空间中的锥
K^*	K 的对偶锥
$D(a)$	点 a 处的控制结构
R^m_+	Euclid 空间 R^m 中的正锥，即 $R^m_+=\{v=(v_1,\cdots,v_m)^T\in R^m\mid v_i\geqslant 0, i=1,\cdots,m\}$
L	Euclid 空间 R^m 中的字典锥
H	Euclid 空间 R^m 中的较多锥
$\mathring{H}$	Euclid 空间 R^m 中的严格较多锥
H_α	Euclid 空间 R^m 中的 α- 较多锥
$\mathring{H}_\alpha$	Euclid 空间 R^m 中的严格 α- 较多锥
$a\underset{K}{\leqq}b$	a 和 b 有由锥 K 确定的偏序关系
$a\underset{K}{\lesssim}b$	$a\underset{K}{\leqq}b$ 和 $a\neq b$
$a\underset{D}{\precsim}b$	a 和 b 有由控制结构 $D(\cdot)$确定的偏爱关系
$a\underset{D}{\prec}b$	$a\underset{D}{\precsim}b$ 和 $a\neq b$
$a\leqslant b$	a 小于等于 b
$a\lessdot b$	a 小于b，即 $a\leqslant b$ 和 $a\neq b$
$a<b$	a 严格小于 b
$a\underset{L}{\lesssim}b$	a 字典小于 b
$a\precsim b$	a 较多小于 b

$\boldsymbol{a} \underset{H}{\prec} \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$ 严格较多小于 $\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{a} \underset{\alpha H}{\precsim} \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$ α- 较多小于 $\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{a} \underset{\alpha H}{\prec} \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$ 严格 α- 较多小于 $\boldsymbol{b}$
$\mathscr{E}(Y)$	Euclid 空间中集合 Y 的 Pareto 有效点集
$\mathscr{E}_w(Y)$	Euclid 空间中集合 Y 的 Pareto 弱有效点集
$\mathscr{A}(Y)$	Euclid 空间中集合 Y 的 Pareto 最优点集
$E(\boldsymbol{f}, X)$	(VMP)的 Pareto 有效解集
$E_w(\boldsymbol{f}, X)$	(VMP) 的Pareto 弱有效解集
$A(\boldsymbol{f}, X)$	(VMP)的 Pareto 最优解集
$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$	向量函数 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的 Jacobi 矩阵
$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$	(VMP)的Lagrange 函数
$S(\boldsymbol{p})$	集合 S 的 $\boldsymbol{p}$- 影子
$\|\boldsymbol{y}\|$	Euclid 空间中向量 $\boldsymbol{y}$ 的 Euclid 模
$\|\boldsymbol{y}\|_p$	Euclid 空间中向量 $\boldsymbol{y}$ 的 l_p-模
$\|\boldsymbol{y}\|_\infty$	Euclid 空间中向量 $\boldsymbol{y}$ 的 l_∞-模
$\|\boldsymbol{y}\|_p^w$	Euclid 空间中向量 $\boldsymbol{y}$ 的 l_p^w-模
$\|\boldsymbol{y}\|_\infty^w$	Euclid 空间中向量 $\boldsymbol{y}$ 的 l_∞^w-模
$\mathscr{E}(Y, K)$	拓扑向量空间中集合 Y 的 K- 有效点集
$\mathscr{E}_w(Y, K)$	拓扑向量空间中集合 Y 的 K- 弱有效点集
$\mathscr{A}(Y, K)$	拓扑向量空间中集合 Y 的 K- 最优点集
$E(\boldsymbol{f}, X)_K$	(TMP)的 K- 有效解集
$E_w(\boldsymbol{f}, X)_K$	(TMP)的 K- 弱有效解集
$A(\boldsymbol{f}, X)_K$	(TMP)的 K- 最优解集
$\mathscr{N}(Y, D)$	拓扑向量空间中集合 Y 的 D- 非受控点集
$\mathscr{D}(Y, D)$	拓扑向量空间中集合 Y 的 D- 控制点集
$N(\boldsymbol{f}, X)_D$	(TMP)的 D- 非受控解集
$d(\boldsymbol{f}, X)_D$	(TMP)的 D- 控制解集
$\boldsymbol{\varphi}'$	映射 φ 在点 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 处的Gateaux 导数
$\langle \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{q} \rangle$	线性泛函 $\boldsymbol{q}^*$ 在 $\boldsymbol{q}$ 处的值

$L(x,w,\lambda)$	(TMP)的 Lagrange 泛函
$\mathscr{L}(S,P)$	集合 S 上 p-线性下界点集($p\in P$)
$T(S,y)$	集合 S 在点 y 处的切锥
$P(S)$	集合 S 的投影锥
$(TMP)_u$	拓扑向量空间扰动多目标规划问题
Y^u	由扰动集合 $Y(u)$ 确定的点集映射
$\mathscr{E}^u$	由扰动 K-有效点集确定的点集映射
$\mathscr{E}^u_w$	由扰动 K-弱有效点集确定的点集映射
E^u	由$(TMP)_u$的 K-有效解集确定的点集映射
E^u_w	由$(TMP)_u$的 K-弱有效解集确定的点集映射
K^v	由扰动锥$K(v)$确定的点集映射
$\mathscr{E}^v$	由集合的 $K(v)$-有效点集确定的点集映射
$\mathscr{E}^v_w$	由集合的 $K(v)$-弱有效点集确定的点集映射
E^v	由(TMP)的 $K(v)$-有效解集确定的点集映射
E^v_w	由(TMP)的 $K(v)$-弱有效解集确定的点集映射
$\partial\psi(\bar{u})_p$	点集映射 ψ 在点 $\bar{u}$ 处相对于 p 的 K-次微分
$\partial_w\psi(\bar{u})_p$	点集映射 ψ 在点 $\bar{u}$ 处相对于 p 的 K-弱次微分
$K\text{-}epi\psi$	点集映射 ψ 的 K-上图象
$G(f,X)$	(VMP)的 G 恰当有效解集
$Ha(f,X)$	(VMP)的 Ha 恰当有效解集
$KT(f,X)$	(VMP) 的 KT 恰当有效解集
$KT_w(f,X)$	(VMP)的 KT 恰当弱有效解集
$KT(f,X)_K$	(VMP)的广义 KT 恰当有效解集
$Bo(f,X)_K$	(VMP)的 Bo 恰当有效解集
$Be(f,X)_K$	(VMP)的 Be 恰当有效解集
$He(f,X)_K$	(VMP)的 He 恰当有效解集
$H^L_e(f,X)$	(VMP)的局部 He 恰当有效解集
$\varepsilon(f,X)_\Gamma$	(VMP)的关于效用集 Γ 的有效解集
$a(f,X)_\Gamma$	(VMP)的关于效用集 Γ 的最优解集

导　论

多目标规划研究多于一个的数值目标函数在给定约束条件下的最优化问题。由于从一定意义上说，实际的最优化问题一般都是含有多个目标的，因此多目标规划的理论和方法在现代经济和社会发展中具有十分广阔的应用范畴。它是进行经济、科技、军事和文化中重大科学决策和规划的有力工具。

多目标规划的两个主要起源是：在经济学中F.Y.Edgeworth(1874年)和V.Pareto(1906年)关于均衡竞争和经济福利的研究以及在数学中G.Cantor(1895年)和F.Hausdorff(1906年)的有序空间理论的建立。在50年代，H.W.Kuhn和A.W.Tucker(1951年)有关向量极值理论的研究，G.Debreu(1954年)结合评价均衡方面的工作以及L.Hurwicz(1958年)把问题推向抽象空间的尝试，为这一学科的形成作了重要的前期准备。直至70和80年代经过众多学者的努力，终于建立起多目标规划的基本理论基础，使它成为应用数学的一个新的学科分支。

因为多于一个的数值目标可以表示为一个向量目标，所以多目标规划问题也称向量极值问题。与只含有一个数值目标函数的单目标数学规划不同，对于一个给定的多目标规划问题，同时使其中各个目标函数都达到最优的最优解一般是不存在的。因此，在多目标规划的研究中，通常是考虑使它的向量目标函数在某种意义下为非劣的所谓有效解，多目标规划理论主要是研究它关于各种意义下的有效解的理论。

设 S 是 $n(\geqslant 1)$ 维 Euclid 空间 R^n 中的非空集合，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\ \cdots,\ f_m(\boldsymbol{x}))^T$ 是 S 上的 $m\ (\geqslant 2)$ 维向量函数，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=(g_1(\boldsymbol{x}),\cdots,g_p(\boldsymbol{x}))^T$ 和 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=(h_1(\boldsymbol{x}),\ \cdots,\ h_q(\boldsymbol{x}))^T$ 分别是 S 上的

$p(\geqslant 1)$维和$q(\geqslant 0)$维向量函数，则在约束条件$g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0(i=1,\cdots,p)$和 $h_j(\boldsymbol{x})=0(j=1,\cdots,q)$下，以 $f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x})$ 为目标函数的有限(m)维多目标规划(多目标极小化)问题记作

$$V-\begin{cases}\min(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}))^T\\ \text{s.t. } g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0, i=1,\cdots,p,\\ \qquad h_j(\boldsymbol{x})=0, j=1,\cdots,q.\end{cases}\qquad \text{(VMP)}$$

因为 $g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0(i=1,\cdots,p)$即$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\leqslant\boldsymbol{0}$，$h_j(\boldsymbol{x})=0(j=1,\cdots,q)$即$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$，故(VMP)的约束集为 $X=\{\boldsymbol{x}\in R^n\mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\leqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}$，而问题(VMP)也记作

$$V-\min_{\boldsymbol{x}\in X}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).\qquad \text{(VMP)}$$

上述(VMP)中的 $V-\min$ 表示对有限维向量的极小化，其具体意义则要视决策者如何选择 R^m 中的偏爱序而定。在 R^m 中选用不同的序关系，$V-\min$ 即表示在该序意义下的极小化，这时可以给出多目标规划问题(VMP)的相应有效解的概念。

设$\mathscr{X}$ 和$\mathscr{Y}$ 是拓扑向量空间，$X\subset\mathscr{X}$ 是非空集合，$f:X\to\mathscr{Y}$ 是映射，则以 X 为约束集，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$为目标函数的无限维多目标规划问题记作

$$T-\min_{\boldsymbol{x}\in X}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).\qquad \text{(TMP)}$$

(TMP)中的 $T-\min$ 表示对拓扑向量空间中向量的极小化，它的具体含义同样要依决策者在空间$\mathscr{Y}$ 中所选择的偏爱序而定。在选定序的情况下，可以定义问题(TMP)在相应序意义下的有效解。

本书第 1 章先介绍集合上的偏爱关系和向量空间的各种有关的序。它们是研究以后各章的基础和工具。

第 2 章阐述有限维多目标规划问题(VMP)的 Pareto 有效性理论，这是多目标规划理论中最基本和核心的内容。主要介绍了(VMP)的 Pareto 有效解和 Pareto 弱有效解，以及这些解的有效性条件、存在性、几何特性、标量化和解集的结构等。其中关于标量化的讨论，是有限维多目标规划的 Pareto 有效性所特有的；关

于 Pareto 有效解集可缩性的研究，则可以推广到无限维的情形。

第 3 章研究无限维多目标规划问题的锥有效性理论。主要是论述拓扑向量空间中多目标规划问题(TMP)的锥有效解和锥弱有效解的性质和有关理论。从一定意义上说，它是第 2 章讨论的有限维情况的进一步扩展和深化。其中关于解的稳定性的研究，则是有限维情况所未涉及的。

第 4 章介绍问题(VMP)的各种恰当有效解，以及这些解之间的关系和有关性质。它们是：G 恰当有效解(Geoffrion)、Ha恰当有效解 (Hartley)、KT 恰当有效解 (Kuhn 和 Tucker)、Bo 恰当有效解(Borwein)、Be 恰当有效解(Benson)和 He 恰当有效解(Henig)，等。此外，也介绍了(VMP)的关于效用集的有效解和关于效用集的最优解(White)。

第 5 章论述多目标规划问题 (VMP) 的较多有效性理论。在介绍了基本的较多有效解和较多最优解之后，着重阐述一般的 α-较多有效解和 α-较多最优解及其有关存在性和几何特性等理论问题。另外，还对这些解的求解方法作了适当的讨论。

目　录

序言

记号

导论

第 1 章　偏爱关系和序 ······ 1

§ 1.1　偏爱关系 ······ 1

§ 1.2　锥偏序和控制结构 ······ 5

§ 1.3　自然序和字典序 ······ 11

§ 1.4　较多序类 ······ 15

第 2 章　Pareto 有效性 ······ 31

§ 2.1　Pareto 有效解和 Pareto 弱有效解 ······ 31

§ 2.2　Pareto 有效性条件 ······ 44

§ 2.3　存在性和接触性 ······ 63

§ 2.4　标量化 ······ 68

§ 2.5　解集的结构 ······ 86

第 3 章　锥有效性 ······ 111

§ 3.1　锥有效解和锥弱有效解 ······ 111

§ 3.2　锥有效性条件 ······ 125

§ 3.3　存在性 ······ 143

§ 3.4　几何特性 ······ 152

§ 3.5　解集的性质 ······ 161

§ 3.6　稳定性 ······ 180

第 4 章　恰当有效性和关于效用集的有效性 ······ 203

§ 4.1　*G* 恰当有效解 ······ 203

§ 4.2　*KT* 恰当有效解 ······ 216

§ 4.3　*Bo* 恰当有效解和 *Be* 恰当有效解 ······ 232

§4.4 关于效用集的有效解…………………………………… 256
第5章 较多有效性………………………………………………… 266
§5.1 较多有效解和较多最优解……………………………… 266
§5.2 α-较多有效解和α-较多最优解………………………… 279
§5.3 存在性和几何特性 ……………………………………… 290
§5.4 求解方法…………………………………………………… 302
参考文献 ……………………………………………………………… 315