通俗线性代数

于明刚　徐善从 编

山东教育出版社
一九八六年·济南

5

通俗线性代数

于明刚　徐善从 编

*

山东教育出版社出版
（济南经九路胜利大街）
山东省新华书店发行　山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092毫米 32开本　15.5印张　330千字
1986年9月第1版　1986年9月第1次印刷
印数 1--1,770

书号 13275·35　　定价 2.45元

前　言

为了满足各类管理干部院校教学的需要，我们编写了《通俗线性代数》一书，作为教材使用．考虑到学员的基础和教学的实际，本书起点较低，内容简明，语言通俗易懂，讲解深入浅出．全书共分五章，每章、节之后分别配有适量的习题和练习题，书末附有答案或提示．本书除作为教材，也可作为电大、函大、业大、职大及中等专业学校的教学参考书．

本书第一、二、三章及练习题由于明刚同志编写，第四、五章及全部习题和习题解答由徐善从同志编写．

由于编者水平所限，不当或错误之处在所难免，敬希读者批评指正．

编　者

一九八六年二月

目　　录

第一章 预备知识

在学习线性代数的过程中，常会遇到数域、排列、连加号和连乘号等知识，为了有利于学习，我们先介绍这方面的内容。

第一节 数 域

在中学里我们曾学过集合的概念，任何一组有共同属性的东西，都可以叫做一个集合，如自然数集合，整数集合，有理数集合，实数集合等，有时也把集合简称为集。如自然数集，有理数集，实数集等。组成这个集合的东西叫做集合的元素。通常以大写字母 A、B 等表示集合；以 a、b 等小写字母表示集合的元素。如果 a 是集合 A 的元素，则说 a 属于 A，记为 $a\in A$，或说 A 包含 a，记为 $A\ni a$。含有有限个元素的集合叫做有限集，含有无限个元素的集合叫做无限集。

数域的定义：设 P 是一些（有限或无限多个）数所组成的一个集合，而且 P 不只含一个数，如果对于 P 中任意二数 a,b 恒有

$$a+b\in P,$$

$$a-b\in P,$$

$$ab\in P,$$

$$\frac{a}{b}\in P\ (b\neq 0).$$

则 P 就叫做一个数域。

例如，所有的有理数所组成的集合就是一个数域，因为对任意两个有理数进行加、减、乘、除(分母不等于零)的运算，结果还得有理数。同理，所有实数的集合是实数域，所有复数的集合是复数域。

例 1　所有形如 $\alpha+\beta\sqrt{2}$（α、β 表示有理数）的实数所组成的集合 P 是一个数域。

证明：在这个集合 P 中任取二数

$$a=\alpha_1+\beta_1\sqrt{2},$$
$$b=\alpha_2+\beta_2\sqrt{2}$$

对 a、b 进行加、减、乘、除运算，如果运算结果均是 $\alpha+\beta\sqrt{2}$ 形的实数，则问题得证。

$$a+b=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)\sqrt{2},$$
$$a-b=(\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1-\beta_2)\sqrt{2},$$
$$ab=(\alpha_1\alpha_2+2\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)\sqrt{2}$$

由假设可知：α_1，α_2，β_1，β_2，均为有理数。

故　$(\alpha_1+\alpha_2)$，$(\beta_1+\beta_2)$，$(\alpha_1-\alpha_2)$，$(\beta_1-\beta_2)$，$(\alpha_1\alpha_2+2\beta_1\beta_2)$，$(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)$

均为有理数。所以

$$a+b\in P,$$
$$a-b\in P,$$
$$ab\in P$$

最后再证当 $b\neq0$ 时

$$\frac{a}{b}\in P$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\alpha_1+\beta_1\sqrt{2}}{\alpha_2+\beta_2\sqrt{2}}=\frac{(\alpha_1+\beta_1\sqrt{2})(\alpha_2-\beta_2\sqrt{2})}{(\alpha_2+\beta_2\sqrt{2})(\alpha_2-\beta_2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{\alpha_1\alpha_2-2\beta_1\beta_2+(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)\sqrt{2}}{\alpha_2^2-2\beta_2^2}$$

$$=\frac{\alpha_1\alpha_2-2\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2-2\beta_2^2}+\frac{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2-2\beta_2^2}\sqrt{2}$$

这里必须说明 $\alpha_2^2-2\beta_2^2\neq0$。

由 $b=\alpha_2+\beta_2\sqrt{2}$ 可知，当 $b\neq0$ 时，α_2，β_2 至少有一个不等于零，因为$\sqrt{2}$是无理数，所以

$$\alpha_2-\beta_2\sqrt{2}\neq0$$

从而

$$(\alpha_2+\beta_2\sqrt{2})(\alpha_2-\beta_2\sqrt{2})=\alpha_2^2-2\beta_2^2\neq0$$

设

$$\alpha_3=\frac{\alpha_1\alpha_2-2\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2-2\beta_2^2},\quad \beta_3=\frac{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2-2\beta_2^2}$$

因 α_1，α_2，β_1，β_2 均为有理数，且 $\alpha_2^2-2\beta_2^2\neq0$，所以 α_3、β_3 均为有理数，则

$$\frac{a}{b}=\alpha_3+\beta_3\sqrt{2}$$

故

$$\frac{a}{b}\in P$$

例 2　任意一个数域 P 必含 0 与 1 。

证明：在数域 P 中任取一个数 a ，由数域的定义恒有

$$a-a\in P$$

所以

$$O \in P$$

因 P 中不只含一个数，所以 P 中不可能只含一个数 0，则在 P 中必存在一个数 $b \neq 0$。由数域的定义知恒有

$$\frac{b}{b} \in P$$

所以

$$1 \in P$$

根据数域的定义，我们知道一个数域中的数，经过有理运算（即加、减、乘、除）以后，所得出的数仍然在这个数域内，而在本书所讨论的问题中，所涉及到数的运算也常常只是有理运算，故可以认为在讨论问题时，所涉及到的数统统属于某一个数域。

练　习　一

1．所有形如 $\alpha + \beta\sqrt{5}$（α、β 表示有理数）的实数集合 P 是否是一个数域？

2．所有形如 $\alpha + \beta i$"（α, β 表示有理数，$i = \sqrt{-1}$）的复数集合 P 是否是一个数域？

第二节　排　　列

这里说的排列，就是指中学课本上讲的全排列，所以 n 个数码的全排列一共有 $n!$ 种。

定义 1　把 n 个数码 1，2，3，…，n 按照一种确定的顺序列出，称为 n 个数码的一种排列，简称 n 元排列。

例 1　写出 1、2、3 的全部排列。

解：3个数（或3元）的全排列一共有$3!=6$种。它们是：

1 2 3，1 3 2，

2 1 3，2 3 1，

3 1 2，3 2 1。

例2　写出1 2 3 4的全部排列。

解：4元排列一共有$4!=24$种，它们是：

1 2 3 4，1 2 4 3，1 3 2 4，1 3 4 2，1 4 2 3，1 4 3 2，

2 1 3 4，2 1 4 3，2 3 1 4，2 3 4 1，2 4 1 3，2 4 3 1，

3 1 2 4，3 1 4 2，3 2 1 4，3 2 4 1，3 4 1 2，3 4 2 1，

4 1 2 3，4 1 3 2，4 2 1 3，4 2 3 1，4 3 1 2，4 3 2 1。

从上面的这些排列中可以看出，有的是按自然顺序排列的，如1 2 3，1 2 3 4，如果排列的顺序是按数的大小顺序排列的（$1\ 2\ 3\cdots(n-1)n$）称为自然顺序，简称顺序。但多数排列不是按自然顺序，而是在排列中有大数排在小数之前，如2 3 1 4，2，3排在1之前。4 3 2 1，较大的数都排在较小的数之前，它们与自然顺序相反。

定义2　在一个排列中，如果有较大的数排在较小的数之前，就称这两个数组成一个逆序，逆序的总和称为这个排列的逆序数。

例3　求排列4 2 1 3的逆序数。

解：组成逆序的数对有2 1，4 2，4 1，4 3。所以，

4 1 2 3 的逆序数是 4 。

例 4　求排列 4 5 1 3 2 的逆序数。

解：在 4 5 1 3 2 中组成逆序的数对有

5 1， 4 1， 3 2， 5 2， 4 2， 5 3， 4 3 。

所以 4 5 1 3 2 的逆序数是 7 .

从例 3 和例 4 中，我们可以得出求逆序数的方法是：先从 1 开始，看 1 前面的数有几个比 1 大的数，就是与 1 组成的逆序数。把 1 划去，再从 2 开始，看 2 前面有几个比 2 大的数，就是与 2 组成的逆序数，把 2 划去，再从 3 开始，余此类推。最后把与每个数组成的逆序数加起来之和就是这个排列的逆序数。

例 5　求排列 4 1 3 2 的逆序数

解：在 4 1 3 2 中，与 1 组成逆序的是 4 1 ，划去 1 得 4 3 2 ；与 2 组成的逆序是 3 2 ， 4 2 ，划去 2 得 4 3 ，与 3 组成的逆序是 4 3 。所以排列 4 1 3 2 的逆序数是 $1+2+1=4$，即 4 个逆序。

为方便计算，我们引用一个符号来表示一个排列的逆序数，即

$$\tau(a_1a_2\cdots a_n)$$

表示排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 的逆序数（$a_1a_2\cdots a_n$ 是 n 元排列中的任意一种排列）。如

例 3 可表示为：$\tau(4\ 2\ 1\ 3)=4$

例 4 可表示为：$\tau(4\ 5\ 1\ 3\ 2)=7$

定义 3　在一种排列中，它的逆序数如果是偶数，则称偶排列，逆序数是奇数，则称奇排列。

例如：

$\tau(4\ 2\ 1\ 3)=4$ 则4 2 1 3是偶排列。

$\tau(4\ 5\ 1\ 3\ 2)=7$ 则4 5 1 3 2是奇排列。

$\tau(1\ 2\ 3\ 4\ 5)=0$ 逆序数为零的也是偶排列。

下面研究对换对排列奇偶性的影响，就是把一个排列中某两个数的相互位置互相交换，而其余的数不动，看对这个排列的奇偶性所发生的影响。

例如：排列1 2 3，

	$\tau(1\ 2\ 3)=0$	偶排列，
对换2，3	$\tau(1\ 3\ 2)=1$	奇排列，
对换1，2	$\tau(2\ 3\ 1)=2$	偶排列，
对换1，3	$\tau(2\ 1\ 3)=1$	奇排列，
对换3，2	$\tau(3\ 1\ 2)=2$	偶排列，
对换1，2	$\tau(3\ 2\ 1)=3$	奇排列。

从上面的对换中不难看出，每经一次对换，排列就改变一次奇偶性，在这六个三元排列中奇排列和偶排列各有3个。

再观察排列1 2 3 4，

	$\tau(1\ 2\ 3\ 4)=0$	偶排列，
对换2，3	$\tau(1\ 3\ 2\ 4)=1$	奇排列，
对换2，4	$\tau(1\ 3\ 4\ 2)=2$	偶排列，
对换4，3	$\tau(1\ 4\ 3\ 2)=3$	奇排列。
………	………	………

这样总共可对换出$4!=24$种4元排列，每对换一次都要改变排列的奇偶性，显然奇排列和偶排列的个数是相等的。

从上面对3元和4元的排列中，我们可以得出以下的规律。（不从理论上证明）

(1) 对换改变排列的奇偶性。

(2) 在全部$n!$种n元排列中，奇排列和偶排列的种数相等。即各有$\frac{n!}{2}$种。

(3) 任何一个n元排列，都可以经过对换变成自然顺序 $1\ 2\ 3\cdots n$，并且所作对换的次数与所给的排列有相同的奇偶性。

例如：3元排列3 2 1，要变成1 2 3，要经过1与3的1次对换，经过的次数是奇数，所以排列3 2 1是奇排列。

再如：4元排列2 3 1 4，要变成1 2 3 4，要经过2与1、3与2两次对换，所以2 3 1 4是偶排列。

练　习　二

1. 计算下述排列的奇偶性：

(1) 1 3 5 7 2 4 6；(2) 3 5 7 8 2 1 6 4；

(3) 6 4 1 2 8 7 5 3；(4) 6 4 2 7 5 3 1。

2. 决定i、j，使

(1) 1 2 4 5 i 6 j 9 7 为奇排列；

(2) 3 9 7 2 i 5 j 4 为偶排列。

第三节　连加号与连乘号

在中小学的数学计算中，我们曾用“+”号表示数的相加，用“×”号表示数的相乘。现在我们引用符号“$\sum$”表示数的连加，用符号“Π”表示数的连乘。

1. n个实数相加：

设 n 个实数 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$。它的和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 可以用连加号 $\sum$ 记作

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1+a_2+\cdots+a_n$$

上式的左端表示 n 个实数之和，右端是和的展开式。当 n 是很小的自然数时，可把各项都写出来，如 $n=3$ 时就是

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1+a_2+a_3$$

当 $n=5$ 时，就是

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$

当 n 较大时，就不宜写出全部项，只需写出最前面的两项和最后的一项，中间各项用删节号“…”表示之，如 $n=100$ 时就是 $\sum_{i=1}^{100} a_i = a_1+a_2+\cdots+a_{100}$

$\sum_{i=1}^{n} a_i$ 中的下标 i 是表示和式展开时从 1 加到 n，所以也可以用其他下标表示，如用 k，j 等。例如：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1+a_2+\cdots+a_n$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

2. $m \times n$ 个实数相加:

$m \times n$ 个实数

$$a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1,n-1}a_{1n}$$
$$a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2,n-1}a_{2n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}a_{m2}a_{m3}\cdots a_{m,n-1}a_{mn}$$

设 $m \times n$ 个实数的和为 S，为了求 S，可以先按行(横行)一个一个相加，再把所有行的和相加，即

$$\begin{aligned} S = & (a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots a_{1n}) \\ & +(a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{2n}) \\ & +\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & +(a_{m1}+a_{m2}+a_{m3}+\cdots+a_{mn}). \end{aligned}$$

其中设

$$b_1 = a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j},$$

$$b_2 = a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{2j} = \sum_{j=1}^{n} a_{2j},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_m = a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn} = \sum_{j=1}^{n} a_{mj}$$

一般可用

$$b_i = a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

（应注意，这里相加的足标 j 不能以 i 来代替，否则

$$b_i=\sum_{i=1}^{n} b_{ii}，\text{那就完全不同了}）$$

于是

$$\begin{aligned}S&=b_1+b_2+\cdots+b_m\\&=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}+\sum_{j=1}^{n} a_{2j}+\cdots+\sum_{j=1}^{n} a_{mj}\end{aligned}$$

但 $b_1+b_2+\cdots+b_m=\sum_{i=1}^{m} b_i$

故 $S=\sum_{i=1}^{m} b_i=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

这里出现了二重连加号，是说明先对第二个足标 j 相加，再对第一个足标 i 相加。

例 1 当 $m=3$，$n=4$ 时，$m\times n=3\times 4=12$ 个实数．即

$$\begin{matrix}a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14},\\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24},\\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}.\end{matrix}$$

相加时，用连加号 $\sum$ 表示出它们的和。

设这 12 个实数的和为 S 则

$$\begin{aligned}S=&(a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14})\\&+(a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24})\\&+(a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34})\end{aligned}$$

其中设

$$b_1=a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}=\sum_{j=1}^{4} a_{1j},$$