摄动方法基础

王永正 编著

科学出版社

摄动方法基础

王永正 编著

科学出版社
1994

(京)新登字 092 号

内 容 简 介

摄动方法是现代应用数学的一个重要分支，它是求非线性变系数方程的近似解析解的一种有效方法．摄动方法在天体力学、飞行力学、一般力学、固体力学、流体力学、量子力学、光学、声学、化学、生物学以及控制论、最优化等方面，都有着广泛的应用．

本书共五章：正则摄动法，正则摄动法失效的典型情况，变形坐标法，匹配展开法与合成展开法，多重尺度法．重点是后三章，即所谓奇异摄动法．

本书可供力学专业高年级本科生和工程技术各专业研究生阅读．也可供有关科技工作者和工程技术人员参考．

摄动方法基础

王永正　编著

责任编辑　毕　颖

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1994 年 6 月第 一 版　开本：850×1168　1/32

1994 年 6 月第一次印刷　印张：7

印数：1—800　字数：181 000

ISBN 7-03-004089-9/O・712

定价：8.10 元

序　言

摄动理论是现代应用数学的一个重要分支．它提供求非线性变系数方程近似解析解的一个有效方法． 摄动方法在天体力学、飞行力学、流体力学、一般力学、固体力学、量子力学、光学、声学、化学、生物学以及控制论、最优化等方面，都有着广泛的应用．多年来，不仅应用数学和力学各专业的研究生，其他许多专业的研究生也把摄动方法作为必修课程或选修课程来进行学习．

本书是编者在多年给飞行力学等专业研究生开设《摄动方法》课程的基础上编写而成的，目的在于以较少的篇幅和较低的数学、力学起点，把摄动方法的主要内容介绍给读者，打下一个扎实的基础，既学会直接应用，也可以进一步阅读文献．

本书第一章从正则摄动方法入手说明方法的本质，阐述了量级、渐进序列等概念；接着第二章讲了正则摄动法失效的情况，从而引出奇异摄动方法；然后逐渐由浅人深地介绍奇异摄动的不同方面。 书中结合不少一般力学、飞行力学、固体力学、流体力学的例子，阐明基本概念和方法，使读者易于接受，而又不失其严格性．可以相信读完本书和做过相应的习题，能够较好地掌握摄动方法的基础，并用于处理非线性方程的求解．

本书适用于工程技术专业硕士研究生和力学专业高年级本科生 40 学时内的课程，还可供有关科技工作者、工程技术人员自学和参考。

北京大学力学系教授　王　仁

1992 年 4 月 10 日

目 录

第一章 正则摄动法

§ 1-1 引　　言

摄动方法是求非线性问题近似解析解的有效方法. 所谓非线性问题，是指描述此种问题的方程（迭代方程、代数方程、微分方程、积分方程等)或定解条件(初始条件、边界条件等)为非线性者. 非线性问题是很多的，例如刚体动力学中的 Euler 动力学方程、天体力学中多体问题的基本方程、飞行力学中的飞行器运动微分方程等都是非线性方程. 严格地说，自然界和工程技术中的问题都是非线性的. 以 Hooke 定律为依据的线弹性体只是固体材料在弹性变形阶段的近似模型. 以 Stokes 假定为基础的 Newton 流体只是一般粘性流体的近似模型.

对于非线性问题，除极个别情形外，都是求不出精确解析解的. 过去，人们常常采用丢掉非线性项即所谓线性化的方法，这在一定程度上解决了问题. 但是随着非线性项的丢弃，必然掩盖了实际问题的一些现象，甚至一些重要现象，使人们无法了解其中的规律. 例如自激振动就必须用非线性方程来描述. 随着科学技术的迅速发展，人们越来越不满足这种状况. 自 40 年代以来，许多科学家从事非线性问题的研究. 目前非线性问题已为人们普遍关注.

研究非线性问题的方法，大体上分定性和定量两类. 就定量方面而言，基本上有数值法和解析法两条路子. 数值法通过差分、有限元、边界元等离散化途径，将问题归结为求线性代数方程组的数值解. 由于有强大的计算机作后盾，此法在实用上很有效，应用非常广泛. 但是人们仍然期望获得解析解，这是因为：(1)对于数值法所得到的一大堆离散数据不便于分析研究，不能使人们清

晰地了解物理现象的规律;(2)如果没有解析法作依据，就无法克服数值计算中的各种困难，甚至无法判断所得到的结果是否正确合理.

解析法通常只能满足于求近似解. 目前最有效的就是摄动法，也称小参数法. 为什么叫小参数法? 因为摄动法总是依靠一个(或多个)无量纲的小参数,它有时出现在方程内,有时出现在定解条件中,也可以人为地引入,由此小参数组成规范函数序列，将问题的解按此序列展开.

摄动法源于天体力学."摄动"原来是一个天文学上的名词. 摄者引也,摄力即引力,摄动即引动. 天体力学上将主星体以外的天体引力的影响称为摄动 (Perturbation). 在上一世纪八九十年代 Lindstedt、Poincaré 等人就已经用摄动法研究过天体力学上的问题. 摄动法作为处理非线性问题的一种普遍方法，是从本世纪 50 年代以后蓬勃发展起来的. 现在它的内容已非常丰富,在振动理论、流体力学、固体力学、近代物理、自动控制、海洋工程、生物、化学以及经济学、人口学方面都有着广泛的应用.

在某种意义上说，摄动法是从幂级数解法引伸出来的. 下面先介绍关于微分方程幂级数解法的一些知识.

§ 1-2 微分方程的幂级数解法

本节以二阶线性齐次方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \qquad (1-2-1)$$

为例,说明幂级数解法. 方程(1-2-1)除常系数情形或经变换后可化为常系数情形外，一般是不能用初等函数解出的. 其解在 x_0 点附近的性态依赖于作为系数的 $P(x),Q(x)$ 在该点附近的性态. 若 $P(x),Q(x)$ 在 x_0 点解析,则 x_0 称为方程的寻常点. 若 $P(x)$, $Q(x)$ 之一(或两者)在 x_0 点不解析，则 x_0 称为方程的奇异点.

§1-2-1　寻常点的情形

我们在这里不加证明地引用下述定理。

定理 1　对于定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}+P(x)\dfrac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \\ y(x_0)=a_0,\ \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=a_1 \end{cases} \tag{1-2-2}$$

若 x_0 为方程的寻常点，a_0, a_1 为任意常数，则存在唯一的幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \tag{1-2-3}$$

且若 $P(x), Q(x)$的幂级数展开式的收敛半径为 R，则解(1-2-3)的收敛半径不小于 R。

例 1-2-1　求 Legendre 方程

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+p(p+1)y=0 \tag{1-2-4}$$

在原点 $x=0$ 附近的解。其中 p 为常数。

解　Legendre 方程为方程(1-2-1)中的

$$P(x)=-\frac{2x}{1-x^2},\quad Q(x)=\frac{p(p+1)}{1-x^2}$$

的特殊情形。显然 $x=0$ 为寻常点，且 $P(x)$，$Q(x)$ 在原点的幂级数展开式的收敛半径为 1。

设解为

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{1-2-5}$$

根据上述定理，其收敛半径必不小于 1。幂级数的运算规则还告诉我们：在收敛区间内幂级数可逐项求导和逐项积分；具有共同的收敛区间的两个幂级数，在此区间内可逐项加减或逐项相乘；两

个幂级数相等时，这两个级数的所有系数必对应相等。根据这些运算规则，将幂级数解(1-2-5)代入方程(1-2-4)，即可求出诸系数 a_n。

因为

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$-2x\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2na_n)x^n$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$-x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty}[-n(n-1)a_n]x^n$$

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n]x^n$$

所以代入方程后得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + p(p+1)a_n]x^n = 0$$

方程右端可视为所有系数皆等于零的幂级数，于是有

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + p(p+1)a_n = 0$$

由此式解得

$$a_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

这是一个求诸系数 a_n 的递推公式，满足此式的幂级数(1-2-5)必为 Legendre 方程的解。从递推公式可见，在没有给定任何定解条件时，系数 a_0 与 a_1 可取任意常数。若取 $a_0=1$，$a_1=0$，则得

$$y = y_1 = 1 - \frac{p(p+1)}{2!}x^2$$
$$+ \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}x^4$$
$$- \frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}x^6$$
$$+ \cdots \tag{1-2-6}$$

若取 $a_0 = 0$，$a_1 = 1$，则得

$$y = y_2 = x - \frac{(p-1)(p+2)}{3!}x^3$$
$$+ \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}x^5$$
$$- \frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!}x^7$$
$$+ \cdots \tag{1-2-7}$$

y_1, y_2 是 Legendre 方程的两个特解，且显然它们线性无关，故 Legendre 方程的通解为

$$y = a_0 y_1 + a_1 y_2 \tag{1-2-8}$$

其中 a_0，a_1 为积分常数。

Legendre 方程的通解(1-2-8)叫作 Legendre 函数。它不是初等函数,而是一种特殊函数。当 p 为整数时，y_1, y_2 中有一个只有有限项,成为多项式,叫作 Legendre 多项式。

§1-2-2 奇异点的情形

若 $(x-x_0)P(x)$,$(x-x_0)^2Q(x)$ 是解析的,则 x_0 称为方程(1-2-1)的正则奇异点；否则称为非正则奇异点。例如 Legendre 方程 $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{p(p+1)}{1-x^2}y = 0$ 有两个奇异点 $x = \pm 1$,且皆为正则奇异点。

方程(1-2-1)在正则奇异点附近的解,可用推广的幂级数，即所谓 Frobenius 级数求得。例如,设原点为方程(1-2-1)的正则奇

异点,即 $xP(x)$ 和 $x^2Q(x)$ 在 $x=0$ 处解析

$$\begin{cases} xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \\ x^2Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \end{cases} \tag{1-2-9}$$

则方程(1-2-1)可能有 Frobenius 级数形式的解

$$y = x^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\lambda+n} \tag{1-2-10}$$

式中 λ 为待定的指数. 形式上导出解(1-2-10)的方法如下.

对(1-2-10)式逐项求导

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n) a_n x^{\lambda+n-1} \\ \qquad = x^{\lambda-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n) a_n x^n \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1) a_n x^{\lambda+n-2} \\ \qquad = x^{\lambda-2} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1) a_n x^n \end{cases} \tag{1-2-11}$$

将(1-2-9),(1-2-10),(1-2-11)代入方程(1-2-1). 注意

$$P(x)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right) x^{\lambda-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n) a_n x^n$$

$$= x^{\lambda-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} p_{n-k} a_k (\lambda+k)\right] x^n$$

$$Q(x)y = \frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right) x^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= x^{\lambda-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} q_{n-k} \cdot a_k\right) x^n$$

代入方程(1-2-1)后得到

$$x^{\lambda-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\lambda+n)(\lambda+n-1)a_n+\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}a_k(\lambda+k)\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{n}q_{n-k}a_k\right]x^n=0$$

令诸 x^n 的系数分别等于零,即得关于诸 a_n 的递推公式

$$(\lambda+n)(\lambda+n-1)a_n+\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}a_k(\lambda+k)$$

$$+\sum_{k=0}^{n}q_{n-k}a_k=0\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

或改写成

$$[(\lambda+n)(\lambda+n-1)+(\lambda+n)p_0+q_0]a_n+\sum_{k=0}^{n-1}p_{n-k}a_k(\lambda+k)$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}q_{n-k}a_k=0,\quad(n=0,1,2,\cdots)\tag{1-2-12}$$

引入函数记号

$$f(m)=m(m-1)+mp_0+q_0$$

则递推公式(1-2-12)可写成

$$a_nf(\lambda+n)+\sum_{k=0}^{n-1}[(\lambda+k)p_{n-k}+q_{n-k}]a_k$$

$$=0\qquad(n=0,1,2,\cdots)\tag{1-2-13}$$

当 $n=0$ 时,(1-2-13)为

$$a_0f(\lambda)=0$$

因 $a_0\neq 0$, 故必有

$$f(\lambda)=\lambda(\lambda-1)+\lambda p_0+q_0=0\tag{1-2-14}$$

这是一个确定 λ 的一元二次代数方程,叫作指数方程.其根λ_1,λ_2叫作方程(1-2-1)在正则奇异点 $x=0$ 处的指数, 它表示 Frobenius 解中 λ 所可能取的值.将求出的指数 λ_1 或 λ_2 代入 $n=1,2,\cdots$ 的递推公式,即可顺次解出诸 a_n,从而得到关于 λ_1 或 λ_2 的一个

形式解。

我们在这里不加证明地引用下述定理。

定理2 设 $x=0$ 是方程(1-2-1)的正则奇异点，$xP(x)$ 和 $x^2Q(x)$ 的幂级数展开式(1-2-9)在区间 $|x|<R$ 内收敛，且指数方程(1-2-14)有实根 $\lambda_1,\lambda_2(\lambda_1\geqslant\lambda_2)$，则方程(1-2-1)在区间 $0<x<R$ 内至少有一个 Frobenius 级数解。

$$y_1=x^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \qquad (a_0\neq 0)$$

且级数 $\sum a_nx^n$ 在区间 $|x|<R$ 内收敛。又若 $\lambda_1-\lambda_2\neq 0$ 和正整数，则方程(1-2-1)在同一区间内有第二个线性无关的 Frobenius 解

$$y_2=x^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n \qquad (b_0\neq 0)$$

且级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 也在区间 $|x|<R$ 内收敛。

例1-2-2 求 p 阶 Bessel 方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-p^2)y=0 \qquad (1\text{-}2\text{-}15)$$

在原点附近的解。其中 p 为非负常数。

解 因为 $P(x)=\dfrac{1}{x}$，$Q(x)=\dfrac{x^2-p^2}{x^2}$，所以

$$xP(x)=1$$
$$x^2Q(x)=-p^2+x^2$$

于是原点 $x=0$ 是方程(1-2-15)的正则奇异点，且 $p_0=1$，$q_0=-p^2$，指数方程为

$$\lambda(\lambda-1)+\lambda-p^2=0$$

或为

$$\lambda^2-p^2=0$$

其根(即指数) $\lambda_1=p,\lambda_2=-p$。根据上述定理，Bessel 方程(1-

2-15)有解

$$y_1 = x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (a_0 \neq 0) \qquad\qquad (1\text{-}2\text{-}16)$$

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 对一切 x 皆收敛。

将 Frobenius 级数解(1-2-16)代入方程(1-2-15)，即可得到求诸 a_n 的递推公式。

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)(n+p-1) a_n x^{n+p}$$

$$x \frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p) a_n x^{n+p}$$

$$x^2 y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+p+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+p}$$

$$-p^2 y = \sum_{n=0}^{\infty} (-p^2 a_n) x^{n+p}$$

代入方程(1-2-15)，合并 x 同次幂的各项，并令所得系数等于零，有

$$n = 0: [p(p-1) + p - p^2] a_0 = 0$$
$$n = 1: [(p+1)p + (p+1) - p^2] a_1 = 0$$
$$n = 2, 3, \cdots: [(n+p)(n+p-1) + (n+p) - p^2] a_n + a_{n-2} = 0$$

顺次解出

$$\begin{cases} a_0 = \text{任意常数} \\ a_1 = 0 \\ a_{2m+1} = 0 \\ a_{2m} = -\dfrac{a_{2m-2}}{4m(p+m)} \\ \qquad = (-1)^m \dfrac{a_0}{2^{2m} \cdot m!(p+1)(p+2)\cdots(p+m)} \end{cases}$$

其中 $m=1,2,\cdots$。于是对应于 p 的 Frobenius 级数解为

$$y_1=a_0\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+p}}{2^{2m}\cdot m!(p+1)(p+2)\cdots(p+m)}$$

若取 $a_0=\dfrac{1}{2^p\cdot p!}$，则得一特解，叫作 p 阶 Bessel 函数，记为 $J_p(x)$：

$$J_p(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(x/2)^{2m+p}}{m!(p+m)!}\qquad(1\text{-}2\text{-}17)$$

根据定理 2，当 $p-(-p)\neq 0$ 和正整数时，即当 $2p\neq 0$ 和整数时，方程(1-2-15)还有第二个线性无关的 Frobenius 级数解

$$J_{-p}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(x/2)^{2m-p}}{m!(-p+m)!}\qquad(1\text{-}2\text{-}18)$$

当 $2p=0$ 或整数时，第二个线性无关解常取

$$Y_p(x)=\frac{J_p(x)\cos p\pi-J_{-p}(x)}{\sin p\pi}\qquad(1\text{-}2\text{-}19)$$

称为标准的第二类 Bessel 函数。在这里，我们不拟对其作进一步讨论。

§1-3 量级符号、量级关系式、规范函数

幂级数(包括 Frobenius 级数)解法有很大的局限性。例如对于二阶线性方程的非正则奇异点情形，它往往失效。对于非线性问题，幂级数解法的用武之地就更加有限了。摄动方法提出所谓"渐近级数"这一广泛得多的概念，幂级数只是它的一种特殊情形。在学习渐近级数的概念之前，本节先叙述关于量级和规范函数的一些基本知识。

§1-3-1 量级符号和量级关系式

设一参数 ε 的两个函数 $f(\varepsilon)$ 和 $g(\varepsilon)$，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$f(\varepsilon)$

和 $g(\varepsilon)$ 皆$\to 0$(或∞). 我们感兴趣的是两个函数趋于零(或无穷大)的速率. 比较它们趋于零(或无穷大)的快慢,即引出所谓量级的概念. 我们采用量级符号 O 和 o.

1. 量级符号 O

如果存在一个与 ε 无关的正数 A 和一个 $\varepsilon_0 > 0$,使得

$$|f(\varepsilon)| \leqslant A|g(\varepsilon)| \tag{1-3-1}$$

对于所有的 $|\ | < \varepsilon_0$ 成立,则记为

$$\text{当 } \varepsilon \to 0 \text{ 时}, \quad f(\varepsilon) = O[g(\varepsilon)]. \tag{1-3-2}$$

因此,若当 $\varepsilon \to 0$ 时 $f(\varepsilon)$ 和 $g(\varepsilon)$皆$\to 0$, 则(1-3-2)表示 $f(\varepsilon) \to 0$ 的速率不比 $g(\varepsilon)$ 慢,即或与 $g(\varepsilon)$ 相当,或比 $g(\varepsilon)$ 快. 若当 $\varepsilon \to 0$ 时 $f(\varepsilon)$ 和 $g(\varepsilon)$ 皆$\to\infty$,则(1-3-2)表示 $f(\varepsilon) \to \infty$ 的速率不比 $g(\varepsilon)$ 快,即或与 $g(\varepsilon)$ 相当,或比 $g(\varepsilon)$ 慢.

式(1-3-2)称作量级关系式. 注意, 该式两端虽然用等号连接,但是它的定义是不等式(1-3-1), 所以其性质与一般等式完全不同. 例如, 从 $f_1 = O(g)$ 和 $f_2 = O(g)$ 推不出 $f_1 = O(f_2)$ 或 $f_2 = O(f_1)$; 由 $f = O(g)$ 也得不到 $g = O(f)$.

条件(1-3-1)可以改写成: 当 $\varepsilon \to 0$ 时, $\left|\dfrac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}\right|$ 有界. 若 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left|\dfrac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}\right|$存在,则条件也可写成

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}\right| < \infty \tag{1-3-3}$$

请读者根据符号 O 的定义(1-3-3)式证明下列各式:

(1) $\sin\varepsilon = O(\varepsilon) \qquad (\varepsilon \to 0)$

(2) $\sin\varepsilon = O(\operatorname{tg}\varepsilon) \qquad (\varepsilon \to 0)$

(3) $\cos\varepsilon - 1 = O(\varepsilon^2) \qquad (\varepsilon \to 0)$

(4) $\varepsilon^{3/2}/\sin\varepsilon = O(\varepsilon^{1/2}) \qquad (\varepsilon \to 0)$

(5) $\varepsilon\sin\dfrac{1}{\varepsilon} = O(\sin\varepsilon) \qquad (\varepsilon \to 0)$

(6) $\operatorname{ctg}\varepsilon = O(\varepsilon^{-1}) \qquad (\varepsilon \to 0)$