高等学校试用教材

应用泛函分析基础

葛锁网 编

高等教育出版社

高等学校试用教材

应用泛函分析基础

葛锁网 编

高等教育出版社

全书共六章，前三章讲空间理论，后三章讲算子理论．本书取材适当，结构严谨，对概念、定理的表述确切，定理都给出严格、细致的证明，对一些重要概念和定理，常与线性代数的相应内容对比、引伸，又强调其本质差异．注意阐述理论的来龙去脉，深入浅出，富于启发性，便于自学．每章后都配有大量的经过精选的难易不等的习题，对教学和自学都是极有益的．

本书系全国工科数学课程教学指导委员会评选出来的教材之一，在出版前，已经过几所工科院校试用多次，是一本适应工科学生特点的比较成熟的教材，可作理、工科非数学专业学生的选修课教材及工科研究生的教材．

高等学校试用教材

应用泛函分析基础

葛锁网 编

*

高等教育出版社出版
新华书店总店北京科技发行所发行
河北省香河县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 15.5 字数 350 000
1990年10月第1版 1990年10月第1次印刷
印数 0001—1 470
ISBN 7-04-003134-5/O·968
定价 3.15 元

序　　言

泛函分析是分析数学的一个新分支．它产生于本世纪初．这一方面是由于近代数学的发展已经为泛函分析概念的形成积累了大量的素材，另一方面也是由于近代物理学的刺激与推动．量子力学、量子场论与泛函分析的关系就好比牛顿力学与微积分的关系一样．

泛函分析将变分法、微分方程、积分方程、函数逼近论等经典分析数学中的概念和方法推广到更一般的对象上去，并且广泛使用几何的与代数的方法，用统一的观点去处理经典分析数学一些分支中许多孤立的结果．把一些看起来互不相干的数学结果联系了起来，从而大大地促进了新的结果的发现．

泛函分析的历史虽然不长，但发展却极其迅速．现在泛函分析的概念和方法不仅渗透到数学领域的许多方面，而且已经被广泛地应用到理论物理和现代工程技术之中．因此，到今天，泛函分析已经不仅仅是数学工作者必备的基础，而且成为愈来愈多的工程技术人员的有力工具．过去，在大学数学系，人们常把数学分析、高等代数、解析几何简称为"三高"．今天，人们则把泛函分析、近世代数、拓扑学称之为"新三高"．由此亦可窥见泛函分析在数学基础教育中的地位与作用．

八十年代初，我国已经有一些工科院校将《泛函分析》列入研究生的教学计划，有的还把它列为高年级本科生的选修课．可是，这些学生都没有学过实变函数，有的连数学分析都没有学过．然而过去泛函分析教材却都是以《实变函数》作为先修课的！为了解决这一矛盾，有的人在泛函分析教材中简要地介绍了实变函数知识；有的则避开了勒贝格积分直接叙述泛函分析的内容．Erwin Kreyszig 编著的《*Introductory Functional Analysis with Applycations*》就是这一类型中的代表作．鉴于：(i) 工科学生用来学习泛函课的时数很少．在短短的几十个小时（有的只有三、四十小时）中，既要学习测度、积分，又要学习泛函分析的内容，有很大的困难；(ii)工科学生与理科学生学习泛函分析的目的应该有所区别．工科学生应该着重于泛函分析的基本概念的了解和基本方法的应用，不一定非要透彻地掌握所有细致的证明．所以，我在 1982 年给工科研究生讲授《泛函分析》时，吸取了 Erwin Kreyszig 的《泛函分析引论及应用》一书的特点，编写出《泛函分析基础》油印讲义．经过几个院校多次试用，反复修改成为目前的《应用泛函分析基础》一书．一般工科专业的研究生和高年级学生，只要学过高等数学和线性代数就可以以本书作教材学习泛函分析．根据我们的经验，大约用 36 学时可以讲完前三章，如果用 54 学时则可讲完前四章和第五章的第一、二节．如果能有 72 学时，则可讲授完本书的全部内容．凡是书中标了"*"号的内容都可以不作要求，可列为选学或自学的内容．为了便于有兴趣的读者自学这些内容，在书末还编有两篇附录，列举了本书证明过程中或例题中要用到的一些集论知识与勒贝格积分论的知识．

在本书正式出版前，东南大学的王文蔚、李延保副教授、合肥工业大学的吴海容副教授、华东工学院俞兰阶副教授等在试教过程中都提出过宝贵的意见，裘慧君、毛依平等同志也给了我很大帮助. 对此，我一并表示衷心的感谢！此外，我特别感谢吉林大学江泽坚教授，他的《泛函分析》讲义给本书以深刻的影响，很多有趣的重要的例子都是选自他的讲义. 没有他的悉心指导和热情帮助本书是出不来的！

由于时间仓促，再加本人学识浅陋，错误与不当之处一定不少，殷切期望得到广大读者的批评与指教.

编　者

1989 年 4 月于华东工学院

目　录

序言

第一章　度量空间……1

§1.1　度量空间的概念……1

§1.2　度量空间中的拓扑……7

§1.3　度量空间的完备化……12

§1.4　紧性……17

§1.5　压缩映射原理……24

第二章　赋范线性空间……33

§2.1　线性空间……33

§2.2　赋范线性空间……35

§2.3　有限维空间……46

§2.4　有界线性算子……51

§2.5　有界线性泛函与共轭空间……58

第三章　内积空间……68

§3.1　内积空间的一般概念……68

§3.2　内积空间中的直交集……74

§3.3　投影定理……85

§3.4　共轭空间……92

第四章　关于 Banach 空间的基本定理……99

§4.1　Hahn-Banach 定理……99

§4.2　Hahn-Banach 定理的应用……104

§4.3　共鸣定理……109

§4.4　开映射定理……116

§4.5　弱收敛……120

第五章　有界线性算子的谱理论……128

§5.1　伴随算子……128

§5.2　有界线性算子的谱……134

§5.3　紧算子……147

§5.4　紧算子的 Riesz-Schauder 理论……152

§5.5　自伴算子的谱的性质……161

§5.6　正算子……166

§5.7　投影算子……170

§5.8　自伴算子的谱分解定理……174

§5.9　自伴算子的函数演算……181

第六章　在 Hilbert 空间中的无界线性算子……193

§6.1　线性算子的概念……193

§6.2　无界线性算子的伴随算子……195

§6.3　对称算子与自伴算子……201

§6.4　酉算子……206

§6.5　自伴算子的谱分解定理……211

§6.6　无界自伴算子谱的性质……216

§6.7　乘法算子与微分算子……218

附录I　集合……224

附录II　勒贝格测度与勒贝格积分……232

参考文献……242

第一章 度量空间

度量空间是实直线 R 的推广．它在泛函分析中的地位与作用和实直线 R 在数学分析中的地位与作用相似．度量空间的出现为统一处理分析数学各个分支中的问题提供了基础．

§1.1 度量空间的概念

极限是数学分析中最基本的概念之一，然而极限概念与距离概念有着密切的联系．实数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限等价于实数轴上的点 x_n 与点 a 的距离 $d_n=|x_n-a|\to 0(n\to\infty)$．由此可见，有了距离就可以定义极限．本节的主要内容是将实直线上距离的概念推广到一般的点集上，以得出度量空间的概念．

定义 1.1.1(距离、度量空间) 设 X 是一个集合，$d:X\times X\to\boldsymbol{R}$ 是乘积空间 $X\times X$ 到实数集 $\boldsymbol{R}$ 的一个映射(也即 d 是定义在 $X\times X$ 上的一个实值函数)．满足：

(*M* 1) $d(x,y)\geqslant 0\quad \forall x,y\in X$(非负性)；

(*M* 2) $d(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$；

(*M* 3) $d(x,y)=d(y,x)\quad \forall x,y\in X$(对称性)；

(*M* 4) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y),\forall x,y,z\in X$(三角不等式)．

那么，称 d 是 X 中的一个距离．称定义了距离的集合 X 为度量空间，记作 (X,d) 或简记为 X．性质 $(M\,1)$—$(M\,4)$ 称为**距离公理**．

集合 X 的元素称为度量空间 X 中的点．对于 X 的子集 Y，定义映射 $\tilde{d}$：$Y\times Y\to\boldsymbol{R}$，使得：

$$\tilde{d}(x,y)=d(x,y)\qquad \forall\, x,y\in Y.$$

显然，$\tilde{d}$ 满足距离公理 $(M\,1)$—$(M\,4)$，故 $\tilde{d}$ 是 Y 中的距离，$(Y,\tilde{d})$ 是一个度量空间，称 $(Y,\tilde{d})$ 为 (X,d) 的子空间．

例 1 欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$、酉空间 $\boldsymbol{C}^n$．

设 $\boldsymbol{R}^n$ 是由 n 个实数所成的有序数组的全体所成之集，即

$$\boldsymbol{R}^n=\{(\xi_1,\cdots,\xi_n)\,|\,\xi_i\in\boldsymbol{R},i=1,\cdots,n\}.$$

对任意 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n),y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in\boldsymbol{R}^n$，定义

$$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

那么，d 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的距离，$(\boldsymbol{R}^n,d)$ 构成一度量空间，称为 n 维欧氏空间．

事实上，$\xi_i,\eta_i(i=1,\cdots,n)$ 均是实数，故(1)式定义的 $d(x,y)$ 是 $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$ 上的实值函数．很显然，$d(x,y)$ 满足距离公理 $(M\,1)$ 和 $(M\,3)$．并且，$d(x,y)=0\Longleftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2=0\Longleftrightarrow\xi_i=\eta_i$

$(i=1,\cdots,n)\Longleftrightarrow x=y$，故$(M2)$也满足．最后，为了证明$d(x,y)$满足$(M4)$，先证明Cauchy不等式：

(2)
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中，α_i，$\beta_i(i=1,\cdots,n)$是任意实数．

由于

$$\left[\frac{\alpha_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\beta_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^2\geqslant 0,$$

故

$$\frac{2\alpha_i\beta_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}\leqslant\frac{\alpha_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2}+\frac{\beta_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{2\alpha_i\beta_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}\leqslant 1+1=2,$$

从而有

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

利用Cauchy不等式，立即有：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2&=\sum_{i=1}^{n}[(\xi_i-\zeta_i)+(\zeta_i-\eta_i)]^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\zeta_i)[(\xi_i-\zeta_i)+(\zeta_i-\eta_i)]\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i-\eta_i)[(\xi_i-\zeta_i)+(\zeta_i-\eta_i)]\\
&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\zeta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+\left(\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i-\eta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\zeta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i-\eta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

从而有
$$\left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\zeta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i-\eta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

即 $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$，其中，$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n),y=(\eta_1,\cdots,\eta_n),z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\in\boldsymbol{R}^n$. 由此可见(1)式定义的 $d(x,\ y)$满足三角不等式. 综上所述，$d(x,\ y)$满足距离公理 $(M1)$—$(M4)$，故$(\boldsymbol{R}^n,d)$是度量空间.

酉空间 $\boldsymbol{C}^n$ 是 n 个复数组成的有序数组的全体所成之集. 即

$$\boldsymbol{C}^n=\{(\xi_1,\cdots,\xi_n)\,|\,\xi_i\in\boldsymbol{C},\quad i=1,\cdots,n\},$$

$\boldsymbol{C}$ 为全体复数所成之集. 定义 $\boldsymbol{C}^n\times\boldsymbol{C}^n$ 上的距离函数为

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad \forall x=(\xi_1,\cdots,\xi_n),\quad y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in\boldsymbol{C}^n.$$

容易证明$(\boldsymbol{C}^n,d)$是一个度量空间. 证明留作习题.

例 2 有界数列空间 l^∞. 设 l^∞ 是全体有界数列所成之集，即

$$l^\infty=\{x\,|\,x=\{\xi_i\},\xi_i\in\boldsymbol{C}.\ \text{而且},|\xi_i|\leqslant K_x\},$$

其中，K_x 是与 x 有关的正数. 对任意 $x=\{\xi_i\},y=\{\eta_i\}\in l^\infty$，定义

$$d(x,y)=\sup_{1\leqslant i<\infty}|\xi_i-\eta_i|. \tag{3}$$

那么，l^∞ 是一个度量空间.

事实上，$\forall x=\{\xi_i\},y=\{\eta_i\}\in l^\infty$，由于$|\xi_i|\leqslant K_x,|\eta_i|\leqslant K_y$，故 $d(x,y)\leqslant K_x+K_y<\infty$，因此，(3)式定义的距离有意义. 其次，$d(x,y)=\sup\limits_{1\leqslant i<\infty}|\xi_i-\eta_i|\geqslant 0$，非负性成立. 对称性也显然成立，并且 $d(x,y)=0\Longleftrightarrow\sup\limits_{1\leqslant i<\infty}|\xi_i-\eta_i|=0\Longleftrightarrow\xi_i=\eta_i(i=1,2,\cdots)\Longleftrightarrow x=y$，故$(M2)$成立. 最后，对任一 $z=\{\zeta_i\}\in l^\infty$，由于

$$|\xi_i-\eta_i|\leqslant|\xi_i-\zeta_i|+|\zeta_i-\eta_i|\leqslant\sup_{1\leqslant i<\infty}|\xi_i-\zeta_i|+\sup_{1\leqslant i<\infty}|\zeta_i-\eta_i|,$$

故有

$$\sup_{1\leqslant i<\infty}|\xi_i-\eta_i|\leqslant\sup_{1\leqslant i<\infty}|\xi_i-\zeta_i|+\sup_{1\leqslant i<\infty}|\zeta_i-\eta_i|,$$

即

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y),\quad \forall x,y,z\in l^\infty.$$

故$(M4)$成立. 因此，l^∞按照(3)式定义的距离 d 构成度量空间.

例 3 连续函数空间 $C[a,b]$. 设 $C[a,b]$是由区间$[a,b]$上一切连续函数 $x(t)$所成之集. 即

$$C[a,b]=\{x\,|\,x=x(t)\text{是}[a,b]\text{上的连续函数}\}.$$

对任意 $x=x(t),y=y(t)\in C[a,b]$，定义

$$d(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|. \tag{4}$$

那么，$C[a,b]$按照上述距离构成度量空间.

事实上，非负性与对称性显然满足. 又 $d(x,\ y)=0\Longleftrightarrow\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|=0\Longleftrightarrow x(t)\equiv y(t),t\in[a,b]\Longleftrightarrow x=y$. 故$(M2)$满足. 最后，由于闭区间上的连续函数可以取到最大值，故有 $t_0\in[a,b]$，使

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|=|x(t_0)-y(t_0)|\leqslant|x(t_0)-z(t_0)|+|z(t_0)-y(t_0)|$$
$$\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|z(t)-y(t)|.$$

故 $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$，其中，$z=z(t)\in C[a,b]$. 故$(C[a,b],d)$是一度量空间.

如果在 $C[a,b]$中定义 $d_1(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|dt$或$d_2(x,y)=\left[\int_a^b|x(t)-y(t)|^2dt\right]^{\frac{1}{2}}$，容易证明 d_1 和 d_2 都满足距离公理$(M1)$—$(M4)$，故$(C[a,b],\ d_1)$和$(C[a,b],\ d_2)$也是度量空间. 需要注意的是：虽然$(C[a,b],d)$，$(C[a,b],d_1)$，$(C[a,b],d_2)$都是由$[a,b]$上的所有连续函数所成之集，但由于定义在它们上面的距离各不相同，因而这三个度量空间是不同的度量空间. 同样，对于集合 $\boldsymbol{R}^n$，也可以定义 $d_1(x,\ y)=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|$或 $d_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i-\eta_i|$. 可以证明$(\boldsymbol{R}^n,d_1)$和$(\boldsymbol{R}^n,d_\infty)$都是度量空间（证明留作习题）. 但它们和欧氏空间$(\boldsymbol{R}^n,\ d)$ 是距离各不相同的度量空间. 由此可见，在同一个集合 X 上可以定义不同的距离，都使之成为度量空间. 今后，如无特别声明，$C[a,b]$总表示连续函数空间 $(C[a,\ b],d)$. $\boldsymbol{R}^n$ 总表示 n 维欧氏空间$(\boldsymbol{R}^n,d)$.

例 4 离散的度量空间.

设 X 是任一集合，距离定义如下：

(5) $$d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}\qquad \forall x,y\in X.$$

显然，如此定义的 $d(x,y)$满足距离公理$(M1)$—$(M4)$. 故(X,d)是一个度量空间，称为离散的度量空间.

例 4 表明任一集合 X 都可以赋予距离使它成为度量空间. 而例 3 则表明，同一个集合可以赋予不同的距离.

例 5 乘积空间.

设$(X,\ d)$和$(Y,\ \rho)$是两个度量空间. $X\times Y=\{(x,\ y)\,|\,x\in X,\ \ y\in Y\}$. 在 $X\times Y$ 上定义距离$\tilde{d}$：

(6) $$\tilde{d}((x_1,y_1),(x_2,y_2))=d(x_1,x_2)+\rho(y_1,y_2)$$
$$\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y.$$

容易证明(6)式定义的 $\tilde{d}$ 满足距离公理，故$(X\times Y,\tilde{d})$是一个度量空间. 称做$(X,\ d)$和$(Y,\ \rho)$的乘积空间.

***例 6** 可测函数空间.

设$(\boldsymbol{R}^1,\mathscr{B},\mu)$是一个测度空间，$E$ 是可测集，$\mu(E)<\infty$. 又设 X 是 E 上可测函数的全体所成之集. 定义：

(7) $$d(f,g)=\int_E\frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}d\mu\qquad\forall f(t),g(t)\in X.$$

由于$\dfrac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}$是有界可测函数，又 $\mu(E)<\infty$，故(7)式定义的 $d(f,g)$有意义.

显然，$d(f,g)\geqslant 0$，$d(f,g)=d(g,f)$，故$(M1)$和$(M3)$满足．又

$$d(f,g)=0\Longleftrightarrow\int_E\frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}d\mu=0$$

$$\Longleftrightarrow f(t)-g(t)=0,\ a.e.\ \mu\Longleftrightarrow f=g,$$

所以$(M2)$也满足．最后证明三角不等式成立：

考察函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}$，$x\in[0,+\infty)$．由于 $f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}>0$，故 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加．因此，

$$\frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}\leqslant\frac{|f(t)-h(t)|+|h(t)-g(t)|}{1+|f(t)-h(t)|+|h(t)-g(t)|}$$

$$\frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}\leqslant\frac{|f(t)-h(t)|}{1+|f(t)-h(t)|}+\frac{|h(t)-g(t)|}{1+|h(t)-g(t)|}$$

故

$$\int_E\frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}d\mu\leqslant\int_E\frac{|f(t)-h(t)|}{1+|f(t)-h(t)|}d\mu+\int_E\frac{|h(t)-g(t)|}{1+|h(t)-g(t)|}d\mu$$

即

$$d(f,g)\leqslant d(f,h)+d(h,g)\qquad\forall f,g,h\in X,$$

故 E 上可测函数全体按(7)式定义的距离构成度量空间．

有了距离以后，就可以在一般度量空间中定义极限：

定义 1.1.2(极限) 设$\{x_n\}$是度量空间 $X=(X,d)$中的点列．若有 $x\in X$，使$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$，则称点列$\{x_n\}$按距离 d 收敛于 x，或称 x 是$\{x_n\}$的极限．记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x\quad 或\quad x_n\to x(n\to\infty).$$

按距离收敛概括了以往我们所涉及的很多收敛概念．事实上，数列$\{x_n\}$收敛于 x_0，就是度量空间 $\boldsymbol{R}^1$ 中的点列$\{x_n\}$按距离 $d(x,y)=|x-y|$收敛于 x_0．同样，闭区间$[a,b]$上的连续函数列$\{x_n(t)\}$一致收敛于函数 $x(t)$，就是度量空间 $C[a,b]$中的点列$\{x_n\}$按距离 $d(x,y)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$收敛于 x．这里，$x_n=x_n(t)$，$n=1,2,\cdots$．$x=x(t)$．而实变函数中可测函数列$\{f_n(t)\}$依测度收敛于函数 $f(t)$就是例 6 中可测函数空间 X 中的点列$\{f_n\}$按距离

$$d(f,g)=\int_E\frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}d\mu$$

收敛于 f．这里，$f_n=f_n(t)$，$n=1,2,\cdots$，$f=f(t)$．事实上，如果 $f_n(t)$依测度收敛于 $f(t)$，即 $f_n(t)\Longrightarrow f(t)$，那么，对任意 $\sigma>0$，有①

$$\mu E_n(\sigma)\overset{\Delta}{=}\mu E(|f_n-f|\geqslant\sigma)\to 0\quad(n\to\infty),$$

而

① 符号“$\overset{\Delta}{=}$”表示定义．

$$d(f_n,f)=\int_E\frac{|f_n(t)-f(t)|}{1+|f_n(t)-f(t)|}dt=\int_{E_n(\sigma)}\frac{|f_n(t)-f(t)|}{1+|f_n(t)-f(t)|}dt+\int_{E\setminus E_n(\sigma)}\frac{|f_n(t)-f(t)|}{1+|f_n(t)-f(t)|}dt$$

$$\leqslant\mu E_n(\sigma)+\frac{\sigma}{1+\sigma}\mu(E\setminus E_n(\sigma))<\mu E_n(\sigma)+\sigma\mu E.$$

所以,$\varlimsup\limits_{n\to\infty}d(f_n,f)\leqslant\sigma\mu E$. 由于 $\mu E<\infty$,再由 σ 的任意性,有$\lim\limits_{n\to\infty}d(f_n,f)=0$. 这说明若$f_n(t)\Longrightarrow f(t)$,则 $d(f_n,f)\to0$. 反之,若 $d(f_n,f)\to0$,那么,$\forall\sigma>0$,有

$$d(f_n,f)\geqslant\int_{E(|f_n-f|\geqslant\sigma)}\frac{|f_n(t)-f(t)|}{1+|f_n(t)-f(t)|}d\mu\geqslant\frac{\sigma}{1+\sigma}\mu E(|f_n-f|\geqslant\sigma)$$

所以 $\mu E(|f_n-f|\geqslant\sigma)\to0$. 即 $f_n\Longrightarrow f$.

总之,实变函数论中可测函数列依测度收敛就是可测函数空间中的点列按(7)式定义的距离 d 收敛. 函数列的平均收敛也可归结为某个度量空间中的点列按距离收敛. 由此可见,按距离收敛是一致收敛、依测度收敛、平均收敛等各种收敛概念的统一和推广.

度量空间中的极限也有和微积分中的极限类似的性质. 为此,先定义集合有界的概念:

定义 1.1.3 设 A 是度量空间 X 的一个子集,若存在 $x_0\in X$ 和正数 M,使得

$$d(x_0,x)\leqslant M,\qquad \forall x\in A,$$

则称 A 是度量空间 X 中的**有界集**. 否则称 A 是**无界集**.

定理 1.1.1 设(X,d)是度量空间,$\{x_n\}$是 X 中的收敛点列,那么

(I) $\{x_n\}$的极限唯一;

(II) $\{x_n\}$是 X 中的有界集;

(III) $\{x_n\}$的任一子列也收敛于同一极限.

证: (I)若 $x_n\to x$,同时 $x_n\to x'$. 那么

$$d(x,x')\leqslant d(x,x_n)+d(x_n,x')\to0,\quad(n\to\infty)$$

故 $d(x,x')=0$,即 $x=x'$.

(II) 取 $\varepsilon=1$,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$,即 $d(x_n,x)\to0$. 故有 $N>0$,当 $n>N$ 时,有 $d(x_n,x)<\varepsilon=1$. 取 $M=\max\{1,d(x_1,x),\cdots,d(x_N,x)\}$,显然,$M>0$,且

$$d(x_n,x)\leqslant M,\ \ n=1,2,\cdots.$$

所以$\{x_n\}$是有界集.

(III) 是显然的. #

下面利用距离定义映射的连续性.

定义1.1.4(连续) 设(X,d)和(Y,ρ)是两个度量空间,T 是 X 到 Y 的映射,$x_0\in X$. 若对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $d(x,x_0)<\delta$ 时,就有 $\rho(Tx,Tx_0)<\varepsilon$. 那么,称映射 $T:X\to Y$ 在 x_0 点连续. 如果 T 在 X 中每一点都连续,就称映射 $T:X\to Y$ 连续.

类似于数列极限与函数极限的关系,有下列定理.

定理 1.1.2 设(X,d)和(Y,ρ)是两个度量空间. 那么,映射 $T:X\to Y$ 在点 $x_0\in X$ 连续的充

要条件是：对 X 中每一收敛于 x_0 点的点列 $\{x_n\}$，均有 $Tx_n \to Tx_0(n\to\infty)$.

证： 必要性. 设 T 在 x_0 连续，故 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，当 $d(x,x_0)<\delta$ 时，就有 $\rho(Tx, Tx_0)<\varepsilon$. 由于 $x_n \to x_0$，故对上述 $\delta>0, \exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $d(x_n,x_0)<\delta$，从而，$\rho(Tx_n,Tx_0)<\varepsilon$. 总之，$\forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $\rho(Tx_n,Tx_0)<\varepsilon$，此即 $Tx_n\to Tx_0(n\to\infty)$.

充分性. 若 T 在 x_0 不连续，那么，$\exists \varepsilon_0>0$，对任意 $\delta>0$，总有 $x\in X$，使 $d(x,x_0)<\delta$，但 $\rho(Tx, Tx_0)\geqslant \varepsilon_0$. 特别取 $\delta=\frac{1}{n}$ 时，有 $x_n\in X$，$d(x_n,x_0)<\frac{1}{n}$，但 $\rho(Tx_n, Tx_0)\geqslant\varepsilon_0$. 对这样得到的序列 $\{x_n\}$，显然有 $x_n\to x_0$. 但 $\{Tx_n\}$ 却不收敛于 Tx_0，与假设矛盾，故映射 T 在 x_0 点连续. #

例 7 距离 $d(x,y)$ 是 $X\times X$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的连续映射.

证： 设 $z_0=(x_0, y_0)$ 是 $X\times X$ 中任意一点，$\{z_n\}$ 是 $X\times X$ 中任一收敛于 z_0 的点列. 这里 $z_n=(x_n,y_n)$，由例 5，$\tilde{d}(z_n, z_0)=d(x_n, x_0)+d(y_n, y_0)$. 由于 $d(x_n,y_n)\leqslant d(x_n,x_0)+d(x_0,y_0)+d(y_0,y_n)$，故

$$d(x_n,y_n)-d(x_0,y_0)\leqslant d(x_n,x_0)+d(y_0,y_n)$$

同样有 $d(x_0,y_0)-d(x_n,y_n)\leqslant d(x_n,x_0)+d(y_n,y_0)$. 故

$$|d(x_n,y_n)-d(x_0,y_0)|\leqslant d(x_n,x_0)+d(y_n,y_0)=\tilde{d}(z_n,z_0)\to 0.$$

所以 $d(x_n,y_n)\to d(x_0,y_0)$. 由定理 1.1.2 知，距离 $d(x,y)$ 在 $z_0=(x_0,y_0)$ 处连续，由 $z_0=(x_0,y_0)$ 的任意性知 $d(x,y)$ 是连续映射.

§1.2 度量空间中的拓扑

度量空间大大地推广了实直线 $\boldsymbol{R}$，按距离收敛概括了连续函数列的一致收敛、可积函数列的平均收敛、可测函数列的依测度收敛等收敛概念. 但是，函数列逐点收敛的概念却无法用按距离收敛来概括！因此，有必要建立更一般的空间和更一般的收敛概念. 这样，就产生了拓扑空间和按拓扑收敛的概念. 本节的目的是想说明度量空间是一种特殊的拓扑空间，并指出如何由距离函数去定义度量空间中的拓扑.

首先，我们介绍一般拓扑空间的定义.

定义 1.2.1(拓扑空间) 设 X 是一个非空集合，$\mathscr{T}$ 是 X 的某些子集所成的集族. 如果集族 $\mathscr{T}$ 有下列性质：

(I) $X\in\mathscr{T}$，$\varnothing\in\mathscr{T}$；

(II) 若 $G_\lambda\in\mathscr{T}, \lambda\in\Lambda$. 则 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\in\mathscr{T}$；

(III) 若 $G_i\in\mathscr{T}$，$i=1, \cdots, n$. 则 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i\in\mathscr{T}$.

那么，称集族 $\mathscr{T}$ 是集合 X 的一个拓扑. $\mathscr{T}$ 中每一个集合 G 叫做开集. 赋予了拓扑 $\mathscr{T}$ 的集合 X 叫做拓扑空间，记作 $(X,\mathscr{T})$ 或简记作 X.

设 $(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间，$x_0\in X$，$N\subset X$. 如果存在开集 $G\in\mathscr{T}$，使得

$$x_0 \in G \subset N$$

那么，称集合N为点x_0的邻域．显然，G也是x_0的邻域，称之为x_0的开邻域．

定义 1.2.2(极限) 设$(X,\mathscr{T})$是拓扑空间，$x_n \in X$，$n=1,2,\cdots$．$x_0 \in X$．如果对x_0的任一邻域$N(x_0)$，存在$N>0$，当$n>N$时，有$x_n \in N(x_0)$，则称$\{x_n\}$按拓扑$\mathscr{T}$收敛于x_0，或称x_0为点列$\{x_n\}$的极限．

这表明，有了开集的概念就可以定义收敛．

定义 1.2.3(连续) 设$(X,\mathscr{T})$、$(Y,\mathscr{S})$是两个拓扑空间．$T:X\to Y$是一个映射，$x_0\in X$．如果对Tx_0的每一个邻域$N(Tx_0)$，存在x_0的邻域$N(x_0)$，使得$T(N(x_0))\subset N(Tx_0)$．那么称映射T: $X\to Y$在x_0连续．

下面，我们给出度量空间中的拓扑．

定义 1.2.4(开球、闭球、球面) 设$X=(X,d)$是度量空间．$x_0\in X, r>0$是一实数．称集合$B(x_0,r)=\{x\,|\,x\in X,\ d(x,x_0)<r\}$为以$x_0$为心，$r$为半径的开球．称集合$\overline{B}(x_0,\ r)=\{x\,|\,x\in X,\ d(x,x_0)\leqslant r\}$为以$x_0$为心，$r$为半径的闭球．称集合$S(x_0,r)=\{x\,|\,x\in X,\ d(x,x_0)=r\}$为以$x_0$为心，$r$为半径的球面．

需要注意的是在一般度量空间中，开球、闭球、球面等概念已经不再具有三维欧氏空间中"球"的几何形象了．例如，在离散度量空间中，球面$S\left(x_0,\ \frac{1}{2}\right)$竟然是一个空集．而开球$B\left(x_0,\ \frac{1}{2}\right)$和闭球$\overline{B}\left(x_0,\ \frac{1}{2}\right)$均退化为一个点$x_0$．

开球$B(x_0,\ \varepsilon)$又叫做点x_0的ε-**邻域**．任何包含点x_0的某一ε-邻域的集合都叫做点x_0的**邻域**，记作$N(x_0)$．也即$x_0\in B(x_0,\varepsilon)\subset N(x_0)$．

对于集合$A\subset X$，若$x_0\in A$，而且有$B(x_0,\varepsilon)\subset A$，那么，称$x_0$是$A$的**内点**．

定义 1.2.5(开集、闭集) 假设$G\subset X$，如果G的每一个点x都是G的内点，那么，称集合G是度量空间X的一个开集．对于集合$F\subset X$，如果F的余集$F^c=X\backslash F$是开集，那么称F为X的一个闭集．

很显然，开球$B(x_0,r)$是开集，闭球和球面都是闭集．为了了解闭集的构造，下面讨论聚点的概念．

设$A\subset X$，$x_0\in X$，如果对任意$\varepsilon>0$，开球$B(x_0,\varepsilon)$中均有A中异于x_0的点，那么称x_0为A的**聚点**．需要注意的是集合A的聚点可以不在A中．

定理 1.2.1 设X是度量空间，$A\subset X, x_0\in X$．那么，下列三个命题等价:

(I) x_0是A的聚点;

(II) 存在点列$\{x_n\}\subset A$，$x_i\neq x_j\,(i\neq j)$，$x_n\neq x_0$，$n=1,2,\cdots$，使得$x_n\to x_0$，$(n\to\infty)$;

(III) 对任意$\varepsilon>0$，开球$B(x_0,\varepsilon)$中存在A的无穷多个点．

证: (I)$\Longrightarrow$(II)．由聚点定义，在$B(x_0,1)$中，存在$x_1\in A$，$x_1\neq x_0$．若已取好$x_1,\cdots,x_n$，那么取$\delta_{n+1}=\min\left\{d(x_1,\ x_0),\ \cdots,\ d(x_n,\ x_0),\ \frac{1}{n+1}\right\}$，在$B(x_0,\delta_{n+1})$中，存在$x_{n+1}\in A$．且

$x_{n+1} \neq x_0$，显然，$x_{n+1} \neq x_i$，$i=1, \cdots, n$. 由数学归纳法，得到点列 $\{x_n\}$. 很显然，这样得到的点列满足：$\{x_n\} \subset A$, $x_n \neq x_0$，$x_i \neq x_j (i \neq j)$. 而且由于 $d(x_n, x_0) < \delta_n \leqslant \frac{1}{n}$，故 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$.

(I)$\Longrightarrow$(II). 设 $\{x_n\} \subset A$，$x_n \to x_0$，$x_n \neq x_0$，而且 $x_i \neq x_j (i \neq j)$. 那么，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，$d(x_n, x_0) < \varepsilon$，从而

$$x_n \in B(x_0, \varepsilon) \qquad n > N.$$

由于 $\{x_n\}$ 是互异点列，故 $B(x_0, \varepsilon)$ 中含有 A 的无穷多个点.

(III) $\Longrightarrow$(I)是显然的. #

由定理 1.2.1 可知：集合 A 的聚点 x_0 的任意近傍都积聚着 A 的无穷多个点，故称 x_0 为 A 的聚点. 容易证明：F 是闭集的充要条件是 F 包含其一切聚点(证明留作习题). 集合 A 的一切聚点所成之集称为 A 的**导集**，记作 A'. 由此可见：A 为闭集的充要条件是 $A \supset A'$. #

关于开集有下列性质：

定理 1.2.2 设 X 是度量空间，那么：

(I) 全空间 X 和空集 $\varnothing$ 均是开集；

(II) 任意多个开集的并集是开集；

(III) 有限个开集的交集是开集.

证： (I) X 为开集是显然的. 另一方面，由于 X 包含其一切聚点，故 X 又是闭集. 从而 $\varnothing = X^c$ 是开集.

(II) 设 G_λ，$\lambda \in \Lambda$ 是一族开集，$G = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$. $\forall x_0 \in G$，$\exists \lambda_0 \in \Lambda$，使 $x_0 \in G_{\lambda_0}$，由于 G_{λ_0} 是开集，从而有 $B(x_0, \varepsilon) \subset G_{\lambda_0} \subset G$，故 G 是开集.

(III) 设 $G_1, \cdots, G_n$ 是开集，$G = \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$. $\forall x_0 \in G$，有 $x_0 \in G_i$，$i=1, \cdots, n$. 由于 G_i 是开集，故有 $B(x_0, \varepsilon_i) \subset G_i$，$i=1, \cdots, n$. 取 $\varepsilon = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \varepsilon_i$，于是有 $B(x_0, \varepsilon) \subset B(x_0, \varepsilon_i) \subset G_i$，$i=1, \cdots, n$. 所以 $B(x_0, \varepsilon) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i = G$. 故 G 是开集. #

相应地闭集有下列性质：

定理 1.2.3 设 X 是度量空间，那么：

(I) X，$\varnothing$ 均为闭集；

(II) 任意多个闭集的交集为闭集；

(III) 有限个闭集的并集是闭集.

证明留作习题.

对于度量空间 X，取子集族 $\mathscr{T} = \{G \mid G$ 的每一个点都是内点$\}$，由定理1.2.2，$\mathscr{T}$ 满足定义 1.2.1 中的开集公理，故 $\mathscr{T}$ 是 X 的一个拓扑. 从而，$(X, \mathscr{T})$ 构成一个拓扑空间. 称拓扑 $\mathscr{T}$ 是由距离 d 导出的拓扑. 由此可见，任何一个度量空间都可由距离定义一个拓扑，构成拓扑空间. 但

是，并非每一个拓扑空间都可以度量化．即在拓扑空间$(X, \mathscr{T})$中定义距离d，再用距离d定义ε-邻域和开集，使这样得到的开集族与X原来的拓扑$\mathscr{T}$一致．但是，如果所给的拓扑空间$(X, \mathscr{T})$是正则的第二可数空间时，该拓扑空间一定可以度量化，见[12]．总之，任何一个度量空间都可定义拓扑成为拓扑空间，但不是每一个拓扑空间都可以度量化，故度量空间是一种特殊的拓扑空间．下面，我们指出：在度量空间中，点列$\{x_n\}$按距离收敛于x_0和点列$\{x_n\}$按距离函数导出的拓扑收敛于x_0是一致的．

定理 1.2.4 设X为度量空间，$x_0 \in X$，$\{x_n\} \subset X$．那么，点列$\{x_n\}$按距离d收敛于x_0的充要条件是对x_0的任一邻域$N(x_0)$，存在$N>0$，当$n>N$时，有$x_n \in N(x_0)$．(证明留作习题)

定理 1.2.5 设$X=(X, d)$，$Y=(Y, \rho)$是两个度量空间．T：$X \to Y$是X到Y的映射，$x_0 \in X$．那么，T在x_0连续的充要条件是对Tx_0的任一邻域$N(Tx_0) \subset Y$，存在x_0的邻域$N(x_0) \subset X$，使得$T(N(x_0)) \subset N(Tx_0)$．

定理 1.2.5 的证明也是显然的，留作习题．

定理 1.2.6 设X，Y是两个度量空间．那么，映射T：$X \to Y$连续的充要条件是Y中每一开集的原象是X中的开集．

证：必要性．设$G \subset Y$是Y中任一开集．$G_0 = T^{-1}(G) = \{x \mid Tx \in G,\ x \in X\}$是$G$的原象．若$G_0 = \varnothing$，则$G_0$是开集，必要性得证．若$G_0 \neq \varnothing$，那么，对任意$x_0 \in G_0$，有$y_0 = Tx_0 \in G$，由于$G$是开集，而且$T$在$x_0$连续．故由定理 1.2.5，存在$x_0$的邻域$N(x_0)$，使得$T(N(x_0)) \subset G$，即$\forall x \in N(x_0)$，有$Tx \in G$．所以$x \in T^{-1}(G) = G_0$，随之，$N(x_0) \subset G_0$，故$x_0$是$G_0$的内点，所以$G_0$是开集．

充分性．$\forall x_0 \in X$，设$y_0 = Tx_0$．$\forall \varepsilon > 0$，由于$G = B(y_0, \varepsilon) \subset Y$是开集，故$T^{-1}(G) = \{x \mid Tx \in G,\ x \in X\}$是$X$中的开集．而且$x_0 \in T^{-1}(G)$，从而$x_0$是$T^{-1}(G)$的内点．即$\exists \delta > 0$，使$B(x_0, \delta) \subset T^{-1}(G)$，即当$d(x, x_0) < \delta$时，有$x \in T^{-1}(G)$，也即$Tx \in G$，所以$\rho(Tx, y_0) < \varepsilon$．总之，$\forall x_0 \in X$和$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当$d(x, x_0) < \delta$时，就有$\rho(Tx, Tx_0) < \varepsilon$，故$T$在$x_0$连续．由$x_0$的任意性，立即知道$T$是连续映射．　　#

下面讨论另一个重要概念：可分性．实数集$\mathbf{R}$有一重要性质：存在可数子集(例如有理数集)在$\mathbf{R}$中稠密，这个性质称为可分性．下面讨论一般度量空间的可分性．

设X是度量空间，$M \subset X$，称X中包含M的最小闭集为M的**闭包**，记作$\overline{M}$．

度量空间中任何一个点集都有闭包．事实上，将所有包含点集M的闭集取来构成一个集族$\{F_\lambda\}$，$\lambda \in \Lambda$．显然，$X \in \{F_\lambda\}$．故$\{F_\lambda\}$是非空集族．容易证明：$\overline{M} = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$．此外，还能证明：$\overline{M} = M \cup M'$，即点集$M$的闭包等于点集$M$和导集$M'$的并集(证明留作习题)．

定义 1.2.6(稠密、可分) 设X是度量空间，$M \subset X$，$A \subset X$．如果$\overline{A} \supset M$，就称A在集合M中**稠密**．如果A还是有限集或可数集，使$\overline{A} \supset M$，就称M是**可分的**．特别，如果度量空间X本身是可分的点集，就称X是**可分的度量空间**．

很显然，A在M中稠密并不要求A是M的子集．但由于$M \subset \overline{A} = A + A'$，故$M$的点不是$A$中的点就是$A'$的点．也就是说，$M$中的每一个点不是$A$的点就是$A$的聚点．从而，$\forall x_0 \in M$，$\forall \delta > 0$，

在 $B(x_0,\delta)$ 中总有 A 的点存在，也就是说，如果 A 在 M 中稠密，那么在 M 的点的任意近傍总有 A 的点存在. 另外，可以证明：可分的集合 M 总有可数子集 M_1 在 M 中稠密(证明留作习题).

$\boldsymbol{R}^n$、$\boldsymbol{C}^n$ 都是可分的度量空间(证明留作习题). 其它很多常见的度量空间也都是可分的. 例如：

例 1 $C[0,1]$ 是可分的度量空间.

证：对任一 $x(t)\in C[0,1]$ 和 $\forall\varepsilon>0$，存在多项式 $B_n(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k x\left(\frac{k}{n}\right)t^k(1-t)^{n-k}$，使

$$d(x,B_n)=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-B_n(t)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

见[2]. 对于 $B_n(t)$，存在有理系数多项式 $P_r(t)$，使

$$d(B_n,P_r)<\frac{\varepsilon}{2},$$

从而，$d(x,P_r)\leqslant d(x,B_n)+d(B_n,P_r)<\varepsilon$. 故集合 $P=\{P_r(t)\,|\,P_r(t)$ 是有理系数多项式$\}$ 在 $C[0,1]$ 中稠密. 由[2]知 P 是可数集，故 $C[0,1]$ 是可分的度量空间.

其它如 $l^p(p\geqslant 1)$、$L^p[a,b](p\geqslant 1)$ 等也都是可分的度量空间(见[3]). 可分度量空间的好处在于它比较好研究. 为了探讨它是否具有某一性质，常常先对它的可数稠密子集进行讨论. 然后，再推广到全空间. 由于可数集的元素少，研究起来当然简单得多. 然而并非所有的度量空间都是可分的. 例如：

例 2 有界数列空间 l^∞ 是不可分的.

证：取 $M=\{\{\xi_i\}\,|\,\xi_i=0$ 或 1，$i=1,2,\cdots\}$，显然 $M\subset l^\infty$，而且 M 是不可数集. 事实上，取 $[0,1]$ 中的一切无理数构成集合 A，由[2]知，A 是不可数集. $\forall x\in A$，用二进位小数表示 x，设

$$x=0.\qquad \xi_1\xi_2\cdots\xi_n\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\xi_i}{2^i}$$

其中 $\xi_i=0$ 或 1. 作映射 T：$A\to M$，使得

$$Tx=\{\xi_i\}\qquad \forall x=0.\qquad \xi_1\xi_2\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\xi_i}{2^i}\in A$$

显然 T 是 A 到 $T(A)$ 上的一一映射. 故 $T(A)$ 是不可数集. 由于 $T(A)\subset M$，故 M 是不可数集.

其次证明 l^∞ 不可分. 否则，有可数子集 B 在 l^∞ 中稠密. 故对任意 $x\in M\subset l^\infty$，在 $B\left(x,\frac{1}{3}\right)$ 中存在 B 的点. 当 x，$y\in M$，且 $x\neq y$ 时，$d(x,\ y)=\sup\limits_{1\leqslant i<\infty}|\xi_i-\eta_i|=1$，故 $B\left(x,\ \frac{1}{3}\right)$ 与 $B\left(y,\frac{1}{3}\right)$ 不交. 从而 $B\left(x,\frac{1}{3}\right)$ 所含 B 的点与 $B\left(y,\ \frac{1}{3}\right)$ 中所含 B 的点不同. 由于 M 是不可数集，故 $\left\{B\left(x,\ \frac{1}{3}\right)\,|\,x\in M\right\}$ 也是不可数集. 另一方面，每个开球 $B\left(x,\ \frac{1}{3}\right)$ 中都有 B 的点，故 B 是不可数集. 这与 B 是 l^∞ 的可数子集矛盾. 故 l^∞ 不可分.