国内外数学竞赛题解

（中）

陕西师范大学图书馆
《国内外数学竞赛题解》编辑组 编

说　　明

在党的十一届三中全会精神鼓舞下，为了积累资料，帮助中学提高数学教学质量，为实现科学技术现代化创造条件，我们特搜集整理了国内外中学数学竞赛试题和解答。其中：国内部分，包括全国和各省、市、自治区以及其所在地的历届中学数学竞赛试题及其解答；国外部分，主要有国际中学生数学奥林匹克竞赛试题和美苏等国中学生数学竞赛试题及部分题解。试题共计1600余个，分上、中、下三册。国内部分，文化大革命前为一册，文化大革命后为一册；国外部分，全一册。仅供内部参考。

本书在汇编过程中，得到不少大、中学校的数学老师和数学专业工作者的热情帮助和积极支持，乾县印刷厂承担了全部印刷任务，我们在此一并表示深切的感谢！

由于我们水平所限，加之时间仓促，书中一定会有不少缺点错误，希望同志们批评指正。

编　　者

一九七九年五月

国内外数学竞赛题解

编　者：陕西师范大学图书馆
《国内外数学竞赛题解》编辑组
印　刷：陕西省乾县印刷厂

一九七九年八月

上.中.下

目　录

（国内部分）

一九五六年

一九五七年

一九五八年

一九六〇年

一九六二年

一九六三年

一九六四年

目　　录

1977年

1978年

1979年

目　　录

一、一九五六年北京市中学数学竞赛试题和解答

第 一 试

1.证明$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$对任何正整数n都是整数，并且用3除时余2.

证明： $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}-1$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(2n+1)-1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(1)$$

对任何整数n，$\frac{n(n+1)}{2}$为整数，故原式为整数。(1)式末端又可以写作$\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8}-1$，而$2n,2n+1,2n+2$中至少有一个是3的倍数，又3与8互质，所以$\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8}$是能被3整除的整数.于是原式等于3的整数倍减去1，因而用3除它时必余2.

2.设方程$x^2-px+q=0$的两根为r和s，且它都不等于0。求以$r^2+\frac{1}{s^2}$和$s^2+\frac{1}{r^2}$为根的方程（不必解出原方程）。

解： 所求方程应为$\left[x-\left(r^2+\frac{1}{s^2}\right)\right]$

$$\left[x-\left(s^2+\frac{1}{r^2}\right)\right]=0$$

即 $x^2-\left(r^2+s^2+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{s^2}\right)x+\left(r^2s^2+2+\frac{1}{r^2s^2}\right)=0\cdots(1)$

但是r、s是$x^2-px+q=0$ 的两根，由根与系数的关系知道 $r+s=p$，$r\cdot s=q$，所以

$$r^2+s^2+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{s^2}=\frac{(r^2s^2+1)(r^2+s^2)}{r^2s^2}$$

$$=\frac{(q^2+1)(q^2-2q)}{q^2},\quad r^2s^2+2+\frac{1}{r^2s^2}$$

$$=q^2+2+\frac{1}{q^2}=\left(q+\frac{1}{q}\right)^2.$$

将以上结果代入（1），得方程

$$x^2-\frac{(q^2+1)(p^2-2q)}{q^2}x+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2=0\ .$$

3．试证恒等式

数旧

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

证：$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x=2\sin\frac{1}{2}x\cos nx,$

$$\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{3}{2}\right)x=2\sin\frac{1}{2}x\cos(n-1)x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{1}{2}x=2\sin\frac{1}{2}x\cos x$$

$$\sin\frac{1}{2}x=2\sin\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}\right),$$

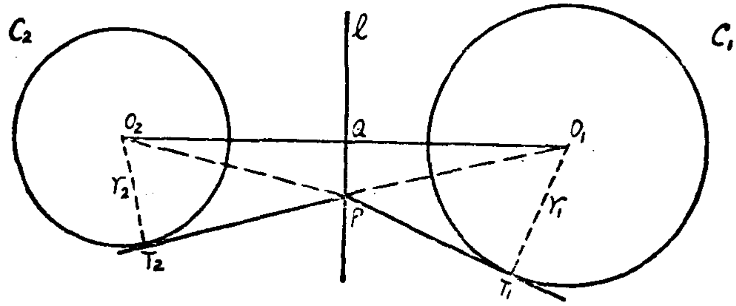
将上面所有等式的两边分别相加，则得

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x=2\sin\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots\cdots+\cos nx\right),$$

所以$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

4．设C_1、C_2是给定的两个圆，又C_1，C_2不相交，并且一个在另一个的外部，由一点p作C_1、C_2的切线pT_1、pT_2，设$pT_1=pT_2$，求p点的轨迹。

解：设C_1，C_2的圆心分别为O_1、O_2，作$pQ\perp O_1O_2$（或其延长线）交O_1O_2于Q，



则 $$O_1p^2=pT_1^2+O_1T_1^2=pT_1^2+r_1^2,$$

$$O_2p^2=pT_2^2+O_2T_2^2=pT_2^2+r_2^2,$$

两式相减，得：

$$O_1p^2-O_2p^2=pT_1^2+r_1^2-pT_2^2-r_2^2=r_1^2-r_2^2.$$

然而　$O_1p^2 - O_2p^2 = (O_1Q^2 + Qp^2) - (O_2Q^2 + Qp^2)$

$= O_1Q^2 - O_2Q^2$，

所以　$O_1Q^2 - O_2Q^2 = r_1^2 - r_2^2$。

或者　$(O_1Q + O_2Q)(O_1Q - O_2Q) = r_1^2 - r_2^2$。

若两圆互不包含，则Q在O_1、O_2之间，而

$$O_1Q + O_2Q = O_1O_2 = d.$$

$$于是 O_1Q - O_2Q = \frac{r_1^2 - r_2^2}{d}.$$

这说明Q内分O_1O_2之分比为常数，若C_1包含C_2，则Q在O_1O_2之延长线上，而

$$O_1Q - O_2Q = O_1O_2 = d,$$

$$于是 O_1Q + O_2Q = \frac{r_1^2 - r_2^2}{d}.$$

这说明Q外分O_1O_2之分比为常数．两种情形都表示Q为定点，与p点的选取无关。所以

对两圆相等的切线的点一定在一直线l上，这直线垂直两圆的连心线于一定点Q，而Q以$(r_1^2 - r_2^2)/d$之比分线段O_1O_2……………………………………………………（1）

反之，若在直线l上任取一点R，再由p向两圆作切线RS_1，RS_2，则$RS_1^2 = RO_1^2 + r_1^2 = RQ^2 + O_1Q^2 + r_1^2$。

$$RS_2^2 = RO_2^2 + r_2^2 = RQ^2 + O_2Q^2 + r_2^2.$$

根据（1）又知道$O_1Q_2 + r_1^2 = O_2Q^2 + r_2^2$。所以$RS_1^2$

$= RS_2^2$，因此知道：

从直线l上任意一点到两圆的切线必然长度相等。…（2）

总结（1）和（2）即知p点的轨迹是直线l。

第 二 试

1．有一群儿童，他们的年龄之和50岁，其中最大的13岁，有一个是10岁；除去10岁的这个儿童之外，其余儿童的年龄恰好组成一个等差数列。问有几个儿童？每个儿童几岁？

解：把最大儿童的年龄记作a，即是$a=13$.

设除去10岁的那个儿童之外，还有$b+1$个儿童，并设他们岁数的公差为d，则这$b+1$个儿童的岁数为

$$a,\ a-d,\ a-2d,\ \cdots\cdots,\ a-bd.$$

于是 $$a+(a-d)+(a-2d)+\cdots\cdots+(a-bd)$$

$$=(b+1)a-\frac{b(b+1)d}{2}=50-10=40$$

或者$(b+1)(2a-bd)=80$

可见$(b+1)$能整除80，但$2a-bd=a+(a-bd)>13$，故$b+1<\frac{80}{13}$，又$2a-bd<2a=26$，故$b+1>\frac{80}{26}$．将这两方面结合起来，就知道$b+1$只能是4或5．

当$b+1=4$时，$4(26-3d)=80$，所以$d=2$，将b、d之值代入（1）得到：13、11、9、7．所以一共$4+1=5$个儿童，他们的年龄分别为：13，11，10，9，7．

当$b+1=5$时，$5(26-4d)=80$，所以d为非整数．所以这种情况不可能，于是解是唯一的．

2．证明$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=1$这里的两个三次根都取实数．

证明：设$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=x$，则