

国内外 数学竞赛题解

(中)

陕西师范大学图书馆
《国内外数学竞赛题解》编辑组 编

JY1128/01

说 明

在党的十一届三中全会精神鼓舞下，为了积累资料，帮助中学提高数学教学质量，为实现科学技术现代化创造条件，我们特搜集整理了国内外中学数学竞赛试题和解答。其中：国内部分，包括全国和各省、市、自治区以及其所在地的历届中学数学竞赛试题及其解答；国外部分，主要有国际中学生数学奥林匹克竞赛试题和美苏等国中学生数学竞赛试题及部分题解。试题共计1600余个，分上、中、下三册。国内部分，文化大革命前为一册，文化大革命后为一册；国外部分，全一册。仅供内部参考。

本书在汇编过程中，得到不少大、中学校的数学老师和数学专业工作者的热情帮助和积极支持，乾县印刷厂承担了全部印刷任务，我们在此一并表示深切的感谢！

由于我们水平所限，加之时间仓促，书中一定会有不少缺点错误，希望同志们批评指正。

编 者

一九七九年五月

国内外数学竞赛题解

编者：陕西师范大学图书馆
《国内外数学竞赛题解》编辑部
印刷：陕西省乾县印刷厂

一九七九年八月

上·中·下

目 录

(国内部分)

一九五六年

- 一、1956年北京市中学数学竞赛试题及解答…………… (1)
- 二、1956年上海市中学数学竞赛试题及解答…………… (10)
- 三、1956年武汉市中学数学竞赛试题及解答…………… (21)

一九五七年

- 一、1957年北京市中学数学竞赛试题及解答…………… (24)
- 二、1957年上海市中学数学竞赛试题及解答…………… (39)
- 三、1957年天津市中学数学竞赛试题及提示…………… (59)
- 四、1957年武汉市中学数学竞赛试题及提示…………… (64)
- 五、1957年南京市中学数学竞赛试题及提示…………… (69)

一九五八年

- 一、1958年上海市中学数学竞赛试题及提示…………… (74)
- 二、1958年武汉市中学数学竞赛试题及解答…………… (79)

一九六〇年

- 一、1960年上海市中学数学竞赛试题及解答…………… (90)

一九六二年

- 一、1962年北京市中学数学竞赛试题及解答…………… (124)
- 二、1962年上海市中学数学竞赛试题及解答…………… (135)
- 三、1962年成都市中学数学竞赛试题及解答…………… (141)

一九六三年

- 一、1963年北京市中学数学竞赛试题及解答…………… (149)

- 二、1963年上海市中学数学竞赛试题及解答……………(165)
三、1963年西安市中学数学竞赛试题及解答……………(175)
四、1963年成都市中学数学竞赛试题及解答……………(187)
五、1963年武汉市中学数学竞赛试题及解答……………(208)
六、1963年南京市中学数学竞赛试题及提示……………(217)

一九六四年

- 一、1964年北京市中学数学竞赛试题及解答……………(223)
二、1964年成都市中学数学竞赛试题及解答……………(241)
三、1964年江苏省部分城市数学竞赛初赛试题及提示
……………(268)

目 录

1977年

- 一、1977年安徽省中学数学竞赛试题和解答……………(275)

1978年

- 一、1978年全国中学数学竞赛试题及解答……………(283)
二、1978年北京市中学数学竞赛试题及解答……………(297)
三、1978年上海市中学数学竞赛试题及解答……………(306)
四、1978年天津市中学数学竞赛试题及解答……………(317)
五、1978年辽宁省中学数学竞赛试题及解答……………(326)
六、1978年安徽省中学数学竞赛试题及解答……………(346)
七、1978年广东省中学数学竞赛试题及解答……………(358)
八、1978年四川省中学数学竞赛试题及解答……………(370)
九、1978年陕西省中学数学竞赛试题及解答……………(402)
十、1978年西安市中学数学竞赛试题及解答……………(414)
十一、1978年兰州市中学数学竞赛试题及解答……………(425)
十二、1978年西宁市中学数学竞赛试题及解答……………(431)
十三、1978年银川市中学数学竞赛试题及解答……………(438)
十四、1978年河南省中学数学竞赛试题及解答……………(444)
十五、1978年武汉市中学数学竞赛试题及解答……………(457)
十六、1978年江苏省中学数学竞赛试题及解答……………(487)
十七、1978年南京市中学数学竞赛试题及解答……………(503)

- 十八、1978年福建省中学数学竞赛试题及解答……(510)
- 十九、1978年福州市中学数学竞赛试题及解答……(527)
- 二十、1978年石家庄市中学数学竞赛试题及解答……(539)
- 二十一、1978年山西省中学数学竞赛试题及解答……(549)
- 二十二、1978年沈阳市中学数学竞赛试题及解答……(561)

1979年

- 一、1979年全国中学数学竞赛试题及解答……(569)
- 二、1979年天津市中学数学竞赛试题及解答……(582)
- 三、1979年陕西省中学数学竞赛试题及解答……(593)
- 四、1979年西安市中学数学竞赛试题及解答……(619)
- 五、1979年云南省中学数学竞赛试题及解答……(637)
- 六、1979年贵州省中学数学竞赛试题及解答……(651)
- 七、1979年安徽省中学数学竞赛试题及解答……(668)
- 八、1979年河北省中学数学竞赛试题及解答……(684)
- 九、1979年山西省中学数学竞赛试题及解答……(697)
- 十、1979年太原市中学数学竞赛试题及解答……(709)
- 十一、1979年黑龙江省中学数学竞赛试题及解答……(721)

目 录

一、国际中学生数学奥林匹克试题

及部分题解	(740)
第一届 (1959年) 试题	(740)
第二届 (1960年) 试题	(741)
第三届 (1961年) 试题及题解	(743)
第四届 (1962年) 试题	(752)
第五届 (1963年) 试题	(753)
第六届 (1964年) 试题	(754)
第七届 (1965年) 试题	(755)
第八届 (1966年) 试题及题解	(756)
第九届 (1967年) 试题	(760)
第十届 (1968年) 试题	(762)
第十一届 (1969年) 试题	(763)
第十二届 (1970年) 试题	(764)
第十三届 (1971年) 试题	(766)
第十四届 (1972年) 试题	(768)
第十五届 (1973年) 试题	(769)
第十六届 (1974年) 试题	(770)
第十七届 (1975年) 试题	(772)
第十八届 (1976年) 试题及题解	(773)

第十九届 (1977年) 试题及题解.....	(778)
第二十届 (1978年) 试题及题解.....	(784)

二、罗马尼亚数学竞赛试题

.....	(797)
-------	-------

三、美国数学奥林匹克试题及解答

第一届 (1972年)	(806)
第二届 (1973年)	(809)
第三届 (1974年)	(815)
第四届 (1975年)	(823)
第五届 (1976年)	(827)
第六届 (1977年)	(830)

四、美国纽约数学竞赛试题及答案

初级中学1975年秋季竞赛题.....	(834)
初级中学1976年春季竞赛题.....	(837)
高级中学1975年竞赛题.....	(840)
高级中学1976竞赛题.....	(844)
高级中学1977竞赛题.....	(848)

五、美国1946—1965年数学竞赛题解

.....	(851)
-------	-------

1946年.....	(851)
------------	-------

1947年.....	(855)
1948年.....	(857)
1949年.....	(860)
1950年.....	(864)
1951年.....	(868)
1952年.....	(871)
1953年.....	(873)
1954年.....	(876)
1955年.....	(879)
1956.....	(882)
1957.....	(885)
1958.....	(888)
1959.....	(890)
1960.....	(893)
1961.....	(895)
1962.....	(898)
1963.....	(902)
1964.....	(904)
1965.....	(908)

六、苏联莫斯科数学奥林匹克试题及

部分题解.....	(913)
第一届 (1935年) 试题.....	(913)
第二届 (1936) 试题.....	(914)
第三届 (1937) 试题.....	(915)
第四届 (1938) 试题.....	(916)

第五届 (1939) 试题	(916)
第六届 (1940) 试题	(918)
第七届 (1941年) 试题	(920)
第八届 (1945年) 试题	(922)
第九届 (1946年) 试题	(924)
第十届 (1947年) 试题	(928)
第十一届 (1948年) 试题	(930)
第十二届 (1949年) 试题	(933)
第十三届 (1950年) 试题	(935)
第十四届 (1951年) 试题	(938)
第十五届 (1952年) 试题	(939)
第十六届 (1953年) 试题	(944)
第十七届 (1954年) 试题	(948)
第十八届 (1955年) 试题	(954)
第十九届 (1956年) 试题	(960)
第二十届 (1957年) 试题	(964)
第十五届题解	(970)
第十六届题解	(973)
第十七届题解	(975)
第十八届题解	(978)
第十九届题解	(987)
第二十届题解	(996)

七、苏联奥尔德荣尼基茨市第三次数学竞赛

试题	(1006)
----	--------

八、苏联威特比斯克市数学竞赛试题

..... (1010)

九、波兰人民共和国第六届数学竞赛试题

..... (1013)

一、一九五六年北京市 中学数学竞赛试题和解答

第 一 试

1. 证明 $n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1$ 对任何正整数 n 都是整数, 并且用 3 除时余 2.

$$\begin{aligned}\text{证明: } n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2}(2n+1) - 1 \cdots \cdots (1)\end{aligned}$$

对任何整数 n , $\frac{n(n+1)}{2}$ 为整数, 故原式为整数。(1)式末

端又可以写作 $\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8} - 1$, 而 $2n, 2n+1, 2n+2$ 中

至少有一个是 3 的倍数, 又 3 与 8 互质, 所以 $\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8}$ 是能被 3 整除的整数. 于是原式等于 3 的整数倍减去 1, 因而用 3 除它时必余 2.

2. 设方程 $x^2 - px + q = 0$ 的两根为 r 和 s , 且它都不等于 0. 求以 $r^2 + \frac{1}{s^2}$ 和 $s^2 + \frac{1}{r^2}$ 为根的方程 (不必解出原方程)。

解: 所求方程应为 $\left[x - \left(r^2 + \frac{1}{s^2} \right) \right]$

$$\left[x - \left(s^2 + \frac{1}{r^2} \right) \right] = 0$$

$$\text{即 } x^2 - \left(r^2 + s^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} \right) x + (r^2 s^2 + 2 + \frac{1}{r^2 s^2}) = 0 \cdots (1)$$

但是 r, s 是 $x^2 - px + q = 0$ 的两根, 由根与系数的关系知道 $r + s = p, r \cdot s = q$, 所以

$$\begin{aligned} r^2 + s^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} &= \frac{(r^2 s^2 + 1)(r^2 + s^2)}{r^2 s^2} \\ &= \frac{(q^2 + 1)(q^2 - 2q)}{q^2}, \quad r^2 s^2 + 2 + \frac{1}{r^2 s^2} \\ &= q^2 + 2 + \frac{1}{q^2} = \left(q + \frac{1}{q} \right)^2. \end{aligned}$$

将以上结果代入 (1), 得方程

$$x^2 - \frac{(q^2 + 1)(p^2 - 2q)}{q^2} x + \left(q + \frac{1}{q} \right)^2 = 0.$$

3. 试证恒等式

$$\text{数10} \quad \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x}.$$

$$\text{证: } \sin(n + \frac{1}{2})x - \sin(n - \frac{1}{2})x = 2 \sin \frac{1}{2}x \cos nx,$$

$$\sin(n - \frac{1}{2})x - \sin(n - \frac{3}{2})x = 2 \sin \frac{1}{2}x \cos(n - 1)x,$$

.....

$$\sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{1}{2}x = 2 \sin \frac{1}{2}x \cos x$$

$$\sin \frac{1}{2}x = 2 \sin \frac{1}{2}x \left(\frac{1}{2} \right),$$

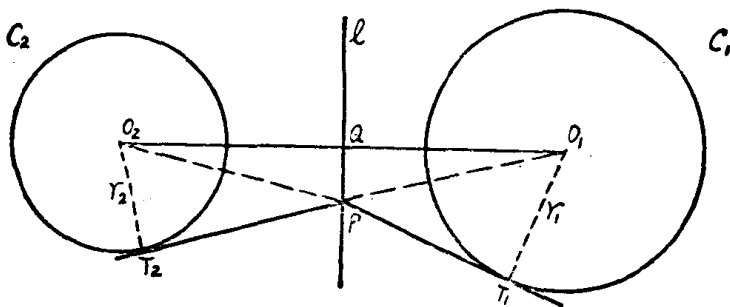
将上面所有等式的两边分别相加，则得

$$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x = 2\sin \frac{1}{2}x \left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx \right),$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin \frac{1}{2}x},$$

4. 设 C_1 、 C_2 是给定的两个圆，又 C_1 、 C_2 不相交，并且一个在另一个的外部，由一点 P 作 C_1 、 C_2 的切线 PT_1 、 PT_2 ，设 $PT_1 = PT_2$ ，求 P 点的轨迹。

解：设 C_1 、 C_2 的圆心分别为 O_1 、 O_2 ，作 $PQ \perp O_1O_2$ （或其延长线）交 O_1O_2 于 Q ，



$$\text{则 } O_1P^2 = PT_1^2 + O_1T_1^2 = PT_1^2 + r_1^2,$$

$$O_2P^2 = PT_2^2 + O_2T_2^2 = PT_2^2 + r_2^2,$$

两式相减，得：

$$O_1P^2 - O_2P^2 = PT_1^2 + r_1^2 - PT_2^2 - r_2^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

$$\begin{aligned}\text{然而 } O_1 p^2 - O_2 p^2 &= (O_1 Q^2 + Q p^2) - (O_2 Q^2 + Q p^2) \\ &= O_1 Q^2 - O_2 Q^2,\end{aligned}$$

$$\text{所以 } O_1 Q^2 - O_2 Q^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

$$\text{或者 } (O_1 Q + O_2 Q)(O_1 Q - O_2 Q) = r_1^2 - r_2^2.$$

若两圆互不包含，则Q在 O_1 、 O_2 之间，而

$$O_1 Q + O_2 Q = O_1 O_2 = d.$$

$$\text{于是 } O_1 Q - O_2 Q = \frac{r_1^2 - r_2^2}{d}.$$

这说明Q内分 $O_1 O_2$ 之分为常数，若 C_1 包含 C_2 ，则Q在 $O_1 O_2$ 之延长线上，而

$$O_1 Q - O_2 Q = O_1 O_2 = d,$$

$$\text{于是 } O_1 Q + O_2 Q = \frac{r_1^2 - r_2^2}{d}.$$

这说明Q外分 $O_1 O_2$ 之分为常数。两种情形都表示Q为定点，与p点的选取无关。所以

对两圆相等的切线的点一定在一直线l上，这直线垂直两圆的连心线于一定点Q，而Q以 $(r_1^2 - r_2^2)/d$ 之比分线段 $O_1 O_2$(1)

反之，若在直线l上任取一点R，再由p向两圆作切线 RS_1 ， RS_2 ，则 $RS_1^2 = R O_1^2 + r_1^2 = R Q^2 + O_1 Q^2 + r_1^2$ 。

$$RS_2^2 = R O_2^2 + r_2^2 = R Q^2 + O_2 Q^2 + r_2^2.$$

根据(1)又知道 $O_1 Q^2 + r_1^2 = O_2 Q^2 + r_2^2$ 。所以 $RS_1^2 = RS_2^2$ ，因此知道：

从直线l上任意一点到两圆的切线必然长度相等。...(2)

总结 (1) 和 (2) 即知 p 点的轨迹是直线 l。

第 二 试

1. 有一群儿童, 他们的年龄之和 50 岁, 其中最大的 13 岁, 有一个是 10 岁; 除去 10 岁的这个儿童之外, 其余儿童的年龄恰好组成一个等差数列。问有几个儿童? 每个儿童几岁?

解: 把最大儿童的年龄记作 a , 即是 $a = 13$ 。

设除去 10 岁的那个儿童之外, 还有 $b + 1$ 个儿童, 并设他们岁数的公差为 d , 则这 $b + 1$ 个儿童的岁数为

$$a, a - d, a - 2d, \dots, a - bd.$$

于是 $a + (a - d) + (a - 2d) + \dots + (a - bd)$

$$= (b + 1)a - \frac{b(b + 1)d}{2} = 50 - 10 = 40$$

$$\text{或者 } (b + 1)(2a - bd) = 80$$

可见 $(b + 1)$ 能整除 80, 但 $2a - bd = a + (a - bd) > 13$,

故 $b + 1 < \frac{80}{13}$, 又 $2a - bd < 2a = 26$, 故 $b + 1 > \frac{80}{26}$. 将这

两方面结合起来, 就知道 $b + 1$ 只能是 4 或 5.

当 $b + 1 = 4$ 时, $4(26 - 3d) = 80$, 所以 $d = 2$, 将 b, d 之值代入 (1) 得到: 13、11、9、7. 所以一共 $4 + 1 = 5$ 个儿童, 他们的年龄分别为: 13, 11, 10, 9, 7.

当 $b + 1 = 5$ 时, $5(26 - 4d) = 80$, 所以 d 为非整数. 所以这种情况不可能, 于是解是唯一的.

2. 证明 $\sqrt[3]{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} + \sqrt[3]{1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} = 1$ 这里的两个三次根都取实数.

证明: 设 $\sqrt[3]{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} + \sqrt[3]{1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} = x$, 则