系统与控制科学应用数学丛书

应用实分析基础

周鸿兴 编著

科学出版社

TJ 626/2

系统与控制科学应用数学丛书

应用实分析基础

周鸿兴 编著

科学出版社

1991

内 容 简 介

本书是系统与控制科学应用数学丛书之一．该丛书是为适应系统与控制科学的发展而组织编写的一套旨在提高数学素养的应用数学参考书．

本书从应用角度叙述了实函数微积分的基本理论．本书的主要内容包括：n 维欧氏空间，函数的连续性与可微性，微分学应用的有关问题，Riemann 积分，Lebesgue 积分初步．书中每节后都有适量习题以帮助读者理解和掌握书中内容．

本书可作为高等院校系统与控制专业的数学用书，也可作为信息科学、工程科学、管理科学、力学与应用数学等专业的师生以及工程技术人员的数学参考书．

系统与控制科学应用数学丛书

应用实分析基础

周鸿兴 编著

责任编辑 鞠丽娜

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1991年11月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1991年11月第一次印刷 印张：11

印数：0001—2000 字数：247 000

ISBN 7-03-002370-6/TP · 172

定价：10.60元

序　言

系统与控制科学的发展始终与数学密切相关，一方面它从数学丰富的宝库中吸取营养以解决所面临的日益复杂的问题，离开现代数学的支持，系统与控制科学是寸步难行的；另一方面，系统与控制科学又有其自身的研究特点，复杂的研究对象，明确的工程背景与独特的问题提法以及方法上的多样性与综合性．这些特点向数学提出了一系列复杂而又新颖的问题．长期从事系统与控制科学研究的人员都深刻地感受到这一点，即系统与控制科学需要能适应自己发展要求的数学．也正因为如此，在这个领域内始终吸引了大量的数学家特别是应用数学家的研究兴趣．可以说系统与控制科学本身是工程科学家、数学家和近10多年来新加入的计算机科学家共同培育的丰腴土地．

由于近代科学技术发展的需要和推动，计算机的大量应用和现代数学的支持，系统与控制科学在近30年里发生了令人吃惊的变化．单就数学工具的使用而言，在50年代控制理论与系统工程的成果中，线性空间与线性变换的使用尚不多见，而在今天的系统与控制科学的工作和教学中，不仅实分析、拓扑、泛函、微分几何等方面的结果常被引用，而且甚至会碰到近世代数、代数几何、微分拓扑等数学内容．在研究生所用的教材中，也常遇到甚为高深的数学概念和知识．这种情况的出现并不是偶然的，也绝非少数人的偏好，而是形势发展的必然．这是由于仅仅依靠微积分、微分方程与矩阵运算这些经典的数学工具已不可能完成系统与控制科学当前面临的日

益复杂而困难的任务。

60年代建立起来的现代控制理论，在其发展的过程中曾受到不少责难。有些人认为在这种理论与应用之间存在着难以逾越的"鸿沟"。20多年的发展，经过数学与工程两方面科学工作者的努力，不仅这种主要建立在线性空间结构上的理论在诸如阿波罗登月等项目中取得了令人瞩目的成功，就连建立在微分流形之上的非线性控制理论，也很快在直升飞机、受控机械手等方面得到了应用.事实告诉我们，有益的作法应是在新理论与应用的"鸿沟"之间架起各种桥梁以推进系统与控制科学的发展。这种变化使自动化的教育无论在大学生还是在研究生的层次上均产生了巨大的影响.落根于50年代的工程数学教育和系统与控制科学的要求之间存在着巨大的差距，若简单地把数学发展的有关材料不加改动地搬过来要求系统与控制界接受，可能事倍功半甚至引起"消化不良"。这是由于在理论数学与应用科学之间还存在着研究兴趣与方法和习惯的巨大区别。因此，一套适合系统与控制界特点的数学丛书的出版自然就成了一种十分迫切的需要。本丛书的编辑出版可以说是应运而生的。

为了保证本丛书既在数学上严谨，使读者能掌握正确的数学理论与方法而不仅仅满足于了解名词，又能较好地为应用服务而不是完全数学化，我们制定了一个原则，即每本书都必须经过数学和工程两方面专家的审查与认可。我们相信这样做将可以尽量减少片面性并保证书稿的质量。

考虑到目前已经出版了不少为应用目的而写的数学书，其中不乏符合本丛书目的者，这样我们就可以按照不求其全而首先考虑急需的原则，组织撰写一些图书以满足读者的要求。又由于系统与控制科学和众多的应用性学科联系密切，诸如信息科学、工程科学、管理科学、力学与应用数学等，这些

学科和系统与控制科学在相当大范围内具有共同的或相近的兴趣和需要，因此我们相信本丛书对这些领域同样是有益的.

由于这是一个带尝试性的工作，我们的水平与经验十分有限，不当乃至失误之处难免，热诚欢迎广大读者批评指正.

系统与控制科学应用数学丛书编委会

1990年9月6日

前　　言

自60年代以来,随着人们对许多科学问题和技术问题认识的不断深化,随着人们处理现实问题技术水平的不断提高,尤其是计算机运算速度及存储量的迅速提高,越来越多的数学理论(几乎涉及各个分支)作为研究工具在科学技术问题的研究中得到应用.因此,一般的高等数学和工程数学的内容已经远远不能满足从事于科学技术研究的人们的需要,特别是不能满足边缘学科和高技术学科的理论研究的需要,这就要求新一代的研究工作者具有更加坚实的数学基础和进一步学习掌握有关数学工具的能力,尤其是抽象思维能力和逻辑推理能力.在众多的数学基础知识中,实分析即多元微积分学与实变函数论的基本理论无疑是最重要的内容之一.在本书中,我们将以一般高等数学教材中的初等微积分为基础,从应用的角度以严格的逻辑推理方法来叙述实分析的基本理论,从而使得读者的初等微积分知识得到理论上的提高和深化.

本书共分五章.第一章在概述了集合及实数之后叙述了n维欧几里德空间$\mathbf{R}^n$,并由此引进线性空间、距离空间、赋范空间及内积空间.利用距离概念介绍了$\mathbf{R}^n$中元素序列的极限以及球形邻域,在此基础上阐述了$\mathbf{R}^n$中的点集理论以及$\mathbf{R}^n$中极限的基本定理.在第二章中我们采用ε-δ方法以及球形邻域的方法来描述函数与映射的连续性,用有界线性算子空间的方法来定义多元向量值函数的导数及函数的可微性,在介绍了高阶偏导数之后给出了多元函数的泰勒公式.第三章介绍与应用紧密联系的微分学中的有关问题.我们强调

指出函数序列的逐点收敛性与一致收敛性的差别，介绍了空间 $C(\bar{\Omega})$中集合的列紧性，从求解非线性方程的角度出发讨论了反函数与隐函数问题以及介绍了应用中大量出现的凸函数取极小值问题。第四章为 Riemann 积分。我们用 Darboux 和的方法来叙述区间上一元及多元函数的 Riemann 积分理论，即它的定义及性质，讨论了一般 Jordan 可测集上的R积分，并概述了有界变差函数及 Riemann-Stieltjes 积分.最后一章为 Lebesgue 积分初步。我们用比较直观的内外测度相等的方法来定义可测集，指出了可测函数的基本性质以及它们与连续函数之间的关系，采用 Lebesgue 和的方法来定义L积分，强调指出L积分在应用中具有R积分所不具有的一些性质，在此基础上介绍了应用中常见的函数序列的平方收敛性并引进平方可积函数空间.在这一章中还介绍了 Weierstrass 逼近定理以及函数空间的可分性，并从空间 L^2 的坐标系统角度出发介绍了函数的傅里叶展开及其收敛性问题。

在本书的编写过程中，黄琳教授为本书内容提供了一个框架，冯德兴研究员和郑大钟教授仔细审阅了本书的原稿并提出了许多宝贵的意见，张志方教授对本书的编写工作给予了很多指导与帮助，作者对他们以及其他关心和支持本书编写工作的同志表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中难免有不妥及错误之处，恳请读者批评指正。

周鸿兴

1990年7月25日

目　录

第一章　n 维欧氏空间

数学分析研究的主要对象是函数，函数的自变量及因变量都是一个或者几个实数变量．因此作为实分析的基础，本章将首先介绍实数，然后定义 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$，讨论 $\mathbf{R}^n$ 中元素序列的极限，并通过极限概念的球形邻域描述引进 $\mathbf{R}^n$ 中的开集合与闭集合，从而给出欧氏空间的拓扑结构；最后介绍空间 $\mathbf{R}^n$ 中极限的基本定理以及空间 $\mathbf{R}^n$ 中集合的紧致性．

1.1　集合及其运算

在本节中，我们将对集合的概念及其运算进行简要的复习并做某些深化．

在数学的许多分支中，最基本的一个概念就是集合．我们认为，集合就是事物的一种汇总，集合的事物今后都称为集合的元素．如果以字母 A 来表示一个集合，以 x 来表示集合 A 的一个元素，则我们就记为 $x \in A$．如果 x 不是 A 的元素，则记为 $x \notin A$．显然，当我们定义一个集合时，应当同时给出判别集合中不同元素差别的准则，并且规定任意一个事物或者是给定集合的元素，或者不是该集合的元素，即 $x \in A$ 与 $x \notin A$ 仅有一个成立．此外，没有元素的集合称为空集，并记为 $\varnothing$．

设 A 与 B 是两个给定的集合，如果它们包含的元素完全一样，即 $a \in A$ 时必有 $a \in B$，并且 $a \in B$ 时也必有 $a \in A$，则称 A 与 B 为同一集合，或者 A 与 B 相等，记为 $A = B$．如果

属于A的元素都属于B,即$a\in A$时必有$a\in B$,则称A是B的子集,或A含于B,记为$A\subset B$. 此时也称B包含A,记为$B\supset A$.

我们约定,任何集合A都包含空集,即$\varnothing\subset A$.

定理 1.1.1 对于任意的集合A,B,C,下面的结论成立:

(1) $A\subset A$;

(2) $A=B$ 必须且只需 $A\subset B,B\subset A$;

(3) 若 $A\subset B,B\subset C$,则有 $A\subset C$;

(4) 若 $x\in A$,则 $\{x\}\subset A$.

定义 1.1.1 设A, B是两个集合,由A和B中的元素之全体构成的集合称为A与B的并集,记为$A\cup B$;由A和B的共有元素之全体构成的集合称为A与B的交集,记为$A\cap B$. 此时有

$$A\cup B=\{x:x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$
$$A\cap B=\{x:x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

对于任意非空参数集(或指标数集)T,我们分别按下式定义集合族$A_t(t\in T)$的并集与交集

$$\bigcup_{t\in T}A_t=\{x: x \text{ 至少属于某一个 } A_t, t\in T\}$$

$$\bigcap_{t\in T}A_t=\{x:x\in A_t \text{ 对每个 } t\in T \text{ 同时成立}\}$$

例 设$\mathbf{R}$是全体实数组成的集合,定义

$$A_n=\left\{x\in\mathbf{R}:-\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}\right\}$$

$$B_n=\left\{x\in\mathbf{R}:-1+\frac{1}{n}<x<1-\frac{1}{n}\right\}, n\in\mathbf{N}$$

其中$\mathbf{N}$为全体自然数组成的集合,则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = (-1,1) = \{x \in \mathbf{R}: -1 < x < 1\}$$

定理 1.1.2 对于集合的运算，下面的性质成立：

(1) $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$ (交换律)；

(2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (结合律)；

(3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (分配律)；

(4) $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A = A$ (吸收律)。

证明 这些性质都是直接根据定义 1.1.1 来证明的。(1)是显然的。现在先来证明(2)的第一式。假设 $x \in (A \cup B) \cup C$，则 $x \in (A \cup B)$ 或 $x \in C$，于是 $x \in A$ 或者 $x \in B$ 或者 $x \in C$，因此 $x \in A$ 或者 $x \in B \cup C$，即 $x \in A \cup (B \cup C)$，这表示 $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$。反之，如果 $x \in A \cup (B \cup C)$，则 $x \in A$ 或 $x \in B \cup C$，于是 $x \in A$ 或者 $x \in B$ 或者 $x \in C$，因此 $x \in A \cup B$ 或 $x \in C$，即 $x \in (A \cup B) \cup C$，这表示 $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$。由此可知(2)的第一式成立。(2)的第二式可类似证明。

现在我们来证明(3)的第一式。设 $x \in (A \cup B) \cap C$，则 $x \in A \cup B$ 及 $x \in C$，于是 $x \in A, x \in C$ 或者 $x \in B, x \in C$，即 $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$，因而 $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$。反之，若 $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$，则 $x \in A, x \in C$ 或者 $x \in B, x \in C$，因而在 $x \in C$ 的同时 $x \in A$ 或 $x \in B$，这表示 $x \in (A \cup B) \cap C$，因而 $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$。由此可知(3)的第一式成立。其余的性质可类似证明。 ∎

注解 证明两个集合相等时我们总是采用上面的方法，即当 $x\in A$ 时设法验证 $x\in B$，从而 $A\subset B$；再由 $x\in B$ 时验证 $x\in A$，从而 $B\subset A$，根据定理 1.1.1 的(2)可知 $A=B$.

定义 1.1.2 设 A, B 是两个集合，由所有在 A 内而不在 B 内的元素构成的集合称为 A 与 B 的差集，记作 $A-B$.

$$A-B=\{x:x\in A\ \text{且}\ x\bar{\in} B\}$$

如果 $X\supset A$，则称 $X-A$ 为 A 对 X 的余集，记为 A^c.

例如，X 是整个平面，A 与 B 是 X 中的两个子集，见图 1.1，则图 1.1(a)中的阴影部分就是 $A-B$. 图 1.1(b) 中的阴影部分就是 $A^c=X-A$.

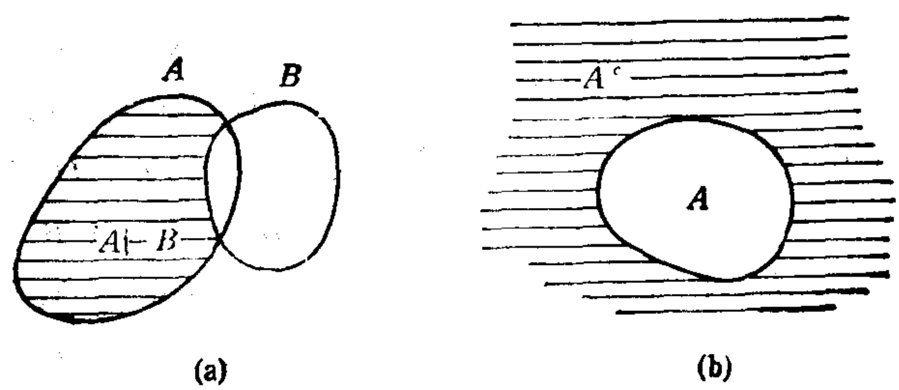

图 1.1

定理 1.1.3 (De Morgan 公式)

(1) $A^{cc}=A$, $A\cup A^c=X$, $A\cap A^c=\varnothing$;

(2) $\bigcup\limits_{t\in T}A_t^c=\left(\bigcap\limits_{t\in T}A_t\right)^c$;

(3) $\bigcap\limits_{t\in T}A_t^c=\left(\bigcup\limits_{t\in T}A_t\right)^c$.

证明 我们来证明(2)，而将(1)与(3)留给读者去证明.

设 $x\in\bigcup\limits_{t\in T}A_t^c$，则至少有某 $\tau\in T$ 使得 $x\in A_\tau^c=X-A_\tau$，于

是 $x\bar{\in} A_\tau$，即 $x\bar{\in}\bigcap_{t\in T} A_t$，从而 $x\in\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)^c$，于是 $\bigcup_{t\in T} A_t^c\subset\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)^c$．反之，若$x\in\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)^c = X-\bigcap_{t\in T} A_t$，则 $x\bar{\in}\bigcap_{t\in T} A_t$，于是至少有一个 $\tau\in T$，使得 $x\bar{\in} A_\tau$，即 $x\in A_\tau^c$ 以及 $x\in\bigcup_{t\in T} A_t^c$，因此$\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)^c\subset\bigcup_{t\in T} A_t^c$，即(2)成立． ▮

习　题　1.1

1．试证：$A\cap B\subset A\subset A\cup B$．

2．试证：若 $A_t\subset C$，$t\in T$，则$\bigcup_{t\in T} A_t\subset C$；若 $B_t\supset D$，$t\in T$，则$\bigcap_{t\in T} B_t\supset D$．

3．试证下面一般的结合律、分配律成立：

$$\bigcup_{t\in T}(A_t\cup B_t)=\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)\cup\left(\bigcup_{t\in T} B_t\right)$$

$$A\cap\left(\bigcup_{t\in T} B_t\right)=\bigcup_{t\in T}(A\cap B_t)$$

4．试证：$A-B=A\cap B^c$，$A\cap B=A-(A-B)$．

5．试证：$A\subset B$ 等价于 $A^c\supset B^c$．

1.2　实　数

1.2.1　实数域

人们对数的认识是从正整数即自然数开始的，对于数的运算则是从正整数的加法运算开始的．对于任意两个正整数 m 与 n，都可以通过所谓加法运算定义一个称为它们的和的新的正整数 $m+n$．如果记 $\mathbf{N}$ 为正整数的全体组成的集合，即

$$\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots,n,n+1,\cdots\}$$

那么加法运算对于集合 $\mathbf{N}$ 来说是封闭的，即运算结果仍在 $\mathbf{N}$ 之中．如果我们把加法运算的逆运算定义为减法运算，即正整数 $p=m+n$ 时，定义差 $p-m=n, p-n=m$，那么为了使得任意两个正整数 m 与 n 的差有意义，就必须将正整数集合 $\mathbf{N}$ 至少扩张到整数集合 $\mathbf{Z}$：

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$$

当我们在集合 $\mathbf{Z}$ 中定义加法运算之后，自然地得到了任意两个正整数或整数的减法运算了．

其次，可以由若干个相同的正整数的加法来定义两个正整数的乘法，即正整数 n 连加 m 次所得的和定义为 m 与 n 的积 mn，这种运算称为 m 与 n 的乘法运算．当我们再规定符号的乘法运算之后就可以在整数集合 $\mathbf{Z}$ 中定义乘法运算了，容易看出，乘法运算对于整数集合 $\mathbf{Z}$ 来说也是封闭的．如果我们把乘法运算的逆运算定义为除法运算，那么，为了使得任意两个整数的商有意义，就必须将整数集合 $\mathbf{Z}$ 扩张到有理数集合 $\mathbf{Q}$：

$$\mathbf{Q}=\{a=n/m: m,n\in\mathbf{Z}, m\neq 0\}$$

在有理数集合 $\mathbf{Q}$ 中，加减乘除四则运算具有封闭性．

在初等数学中，为了能对正整数进行开方运算，即平方运算的逆运算，就必须引进无理数：设 $m\in\mathbf{N}$，$m^2=n$，那么 $\pm m$ 称为 n 的代数根，由 n 求 $\pm m$ 的运算定义为开方运算．为了使得任意的正整数 n 的开方运算有意义，就必须将有理数集合 $\mathbf{Q}$ 扩张到实数集合 $\mathbf{R}$，把无限不循环小数定义为无理数，全体有理数与无理数组成的集合定义为实数集合 $\mathbf{R}$，有理数与无理数统称为实数．

在实数集合 $\mathbf{R}$ 中，可以对任意有限多个实数进行加减乘除四则运算，这些运算所满足的性质可以概括为下面的公理．