连续介质力学引论

M·E·GURTIN 著

郭仲衡　郑百哲　译

高等教育出版社

连续介质力学引论

M. E. GURTIN 著

郭仲衡 郑百哲 译

高等教育出版社

（京）112号

本书应用张量清晰地讨论了连续介质力学的经典理论，特别是不可压缩粘性流体理论和线性及非线性弹性理论。理论是经典的，处理方法是现代的。本书可作为研究生的连续介质力学课程的教材，亦可供广大力学教师、科研人员及工程技术人员参考。

本书的翻译与出版得到了清华大学杜庆华教授的关怀与支持。

本书由李汝庆同志作编辑加工。

连续介质力学引论

M. E. GURTIN 著

郭仲衡 郑百哲 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

民族印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 8.5 字数 200 000

19[illegible] 年 [illegible] 月第 1 版 1992 年 5 月第 1 次印刷

印数 0001—1 310

ISBN7-04-002391-1/TB·135

定价 5.25 元

序

本书是连续介质力学经典理论特别是理想可压缩粘性流体理论和线性及非线性弹性理论的引论。这些理论很重要，因为它们不仅可以应用于实践中出现的多数连续介质力学问题，而且它们构成坚实的基础，在此基础上就可以建立关于材料性质的更复杂的理论。此外，本书虽然只局限于经典理论，但处理方法却是现代的，着重于理论的基础和结构。

我处处用了与分量表示相反的直接符号，工程师和物理工作者开始时对此可能会感到困难，但我相信，由于加强了清晰性和透彻性，值得付出这种所需的额外努力。针对那些不熟悉直接符号的读者，并为了使本书恰当地自成体系，我编入了关于张量代数和张量分析的很长两章内容。

本书是为研究生一年级一学期或两学期连续介质力学课而编的，它是我过去十五年在Brown大学和Carnegie-Mellon 大学给数学工作者、工程师和物理工作者讲授这门课的基础上写成的。

除每章末附有总的文献参考外，我几乎略去了所有的参考文献。

对起源或历史问题感兴趣的读者，可以参阅大百科全书中Truesdell和Toupin[1]、Truesdell和Noll[1]、Serrin[1]以及Gurtin[1]的条文。

目　　录

第一章　张量代数

1. 点，向量，张量

所考虑的空间将总是三维欧氏点空间 $\mathscr{E}$。$\mathscr{E}$ 的元素称为点，而相伴的向量空间 $\mathscr{V}$ 的元素则称为向量。两点的差

$$\mathbf{v}=\mathbf{y}-\mathbf{x}$$

是向量(图 1)。点 $\mathbf{x}$ 与向量 $\mathbf{v}$ 的和

$$\mathbf{y}=\mathbf{x}+\mathbf{v}$$

是一个点。两点的和是没有意义的。

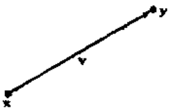

图 1

两个向量 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 的内积用 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ 表示，我们定义

$$|\mathbf{u}|=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})^{\frac{1}{2}},\quad \mathbf{u}^2=\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$$

我们用符号 R 表示实数，用 R^+ 表示严格正实数。

线性型表示定理[1)]

设 ψ: $\mathscr{V}\to\mathrm{R}$ 是线性映射，则对每个向量 $\mathbf{v}$ 存在唯一的向量 $\mathbf{a}$，使得

$$\psi(\mathbf{v})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}$$

笛卡尔坐标系由标准正交基 $\{\mathbf{e}_i\}=\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ 和原点 $\mathbf{o}$ 组成。我们总假设，已给定一个固定的笛卡尔坐标系，向量 $\mathbf{u}$ 的(笛卡尔)分量是

$$u_i=\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_i$$

1) 可参阅 Halmos[1, §67].

于是

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\sum_i u_i v_i$$

类似地,点 $\mathbf{x}$ 的坐标是

$$x_i=(\mathbf{x}-\mathbf{o})\cdot\mathbf{e}_i$$

向量集合$\{\mathbf{u},\mathbf{v},\cdots,\mathbf{w}\}$的张成 $sp\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \cdots, \mathbf{w}\}$是$\mathscr{V}$的子空间,它由这些向量的所有线性组合构成:

$$sp\{\mathbf{u},\mathbf{v},\cdots,\mathbf{w}\}=\{\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}+\cdots+\gamma\mathbf{w}\,|\,\alpha,\beta,\cdots,\gamma\in\mathbf{R}\}.$$

(对于除$\mathscr{V}$之外的向量空间我们也将用这个记号)。

设给定向量 $\mathbf{v}$,我们记

$$\{\mathbf{v}\}^{\perp}=\{\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0\}$$

为$\mathscr{V}$的子空间,它由所有垂直于 $\mathbf{v}$ 的向量组成。

我们把张量这个词作为"从$\mathscr{V}$到$\mathscr{V}$的线性变换"的同义词。因此,张量 $\mathbf{S}$ 是把向量 $\mathbf{v}$ 对应于每个向量 $\mathbf{u}$ 的线性映射:

$$\mathbf{v}=\mathbf{S}\mathbf{u}$$

如果逐点地定义加法和数乘,则所有张量的集合构成一个向量空间,也就是 $\mathbf{S}+\mathbf{T}$ 和 $\alpha\mathbf{S}(\alpha\in\mathbf{R})$是由下式定义的张量:

$$(\mathbf{S}+\mathbf{T})\mathbf{v}=\mathbf{S}\mathbf{v}+\mathbf{T}\mathbf{v}$$

$$(\alpha\mathbf{S})\mathbf{v}=\alpha(\mathbf{S}\mathbf{v})$$

这个空间的零元素是把每个向量 $\mathbf{v}$ 映射为零向量的零张量 $\mathbf{0}$:

$$\mathbf{0}\mathbf{v}=\mathbf{0}$$

另一个重要张量是恒等张量 $\mathbf{I}$,对每个向量 $\mathbf{v}$,它定义为

$$\mathbf{I}\mathbf{v}=\mathbf{v}$$

两个张量的积 $\mathbf{ST}$ 是个张量

$$\mathbf{ST}=\mathbf{S}\circ\mathbf{T}$$

即对一切 $\mathbf{v}$ 有

$$(\mathbf{ST})\mathbf{v}=\mathbf{S}(\mathbf{T}\mathbf{v})$$

我们采用标准记号：

$$\mathbf{S}^2=\mathbf{SS}$$

等等。一般来说，$\mathbf{ST}\neq\mathbf{TS}$，如果 $\mathbf{ST}=\mathbf{TS}$，就说 $\mathbf{S}$ 与 $\mathbf{T}$ **可交换**。

我们记 $\mathbf{S}$ 的**转置**为 $\mathbf{S}^T$。$\mathbf{S}^T$ 是具有性质

$$\mathbf{Su}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{S}^T\mathbf{v}\quad(\text{对一切向量 }\mathbf{u}\text{ 与 }\mathbf{v})$$

的唯一张量。由此可得

$$\begin{gathered}(\mathbf{S}+\mathbf{T})^T=\mathbf{S}^T+\mathbf{T}\\(\mathbf{ST})^T=\mathbf{T}^T\mathbf{S}^T\\(\mathbf{S}^T)^T=\mathbf{S}\end{gathered}\tag{1}$$

如果

$$\mathbf{S}=\mathbf{S}^T$$

则 $\mathbf{S}$ 是**对称张量**；如果

$$\mathbf{S}=-\mathbf{S}^T$$

则 $\mathbf{S}$ 是**反对称张量**。每个张量 $\mathbf{S}$ 都能唯一地表示成对称张量 $\mathbf{E}$ 与反对称张量 $\mathbf{W}$ 的和：

$$\mathbf{S}=\mathbf{E}+\mathbf{W}$$

其中

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}(\mathbf{S}+\mathbf{S}^T)$$

$$\mathbf{W}=\frac{1}{2}(\mathbf{S}-\mathbf{S}^T)$$

$\mathbf{E}$ 叫做 $\mathbf{S}$ 的**对称部分**，$\mathbf{W}$ 叫做 $\mathbf{S}$ 的**反对称部分**。

两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的**张量积** $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ 是张量，它把每个向量 $\mathbf{v}$ 映射为向量 $(\mathbf{b}\cdot\mathbf{v})\mathbf{a}$：

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{v}=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{v})\mathbf{a}$$

因此

$$\begin{gathered}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})^T=(\mathbf{b}\otimes\mathbf{a})\\(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d})=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}\otimes\mathbf{d}\end{gathered}$$

$$(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_j)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ \mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i, & i=j\end{cases} \tag{2}$$

$$\sum_i(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i)=\mathbf{I}$$

令 $\mathbf{e}$ 是单位向量，则 $\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}$ 作用于 $\mathbf{v}$ 给出

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}$$

它是 $\mathbf{v}$ 在 $\mathbf{e}$ 方向的投影，而 $\mathbf{I}-\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}$ 作用于向量 $\mathbf{v}$，就得到

$$\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}$$

它是 $\mathbf{v}$ 在垂直于 $\mathbf{e}$ 的平面上的投影(图 2)。

张量 $\mathbf{S}$ 的分量 S_{ij} 定义为

$$S_{ij}=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{S}\mathbf{e}_j$$

用这个定义，$\mathbf{v}=\mathbf{S}\mathbf{u}$ 等价于

$$v_i=\sum_j S_{ij}u_j$$

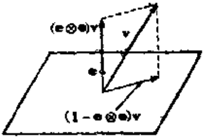

图 2

此外

$$\mathbf{S}=\sum_{i,j}S_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j \tag{3}$$

和

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_{ij}=a_ib_j$$

矩阵[S]写成

$$[\mathbf{S}]=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13}\\ S_{21} & S_{22} & S_{23}\\ S_{31} & S_{32} & S_{33}\end{bmatrix}$$

由此可得

$$[\mathbf{S}^{\mathrm{T}}]=[\mathbf{S}]^{\mathrm{T}}$$

$$[\mathbf{ST}]=[\mathbf{S}][\mathbf{T}]$$

和

$$[\mathbf{I}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

迹是一种线性运算，它赋予每个张量$\mathbf{S}$一个标量$\mathrm{tr}\mathbf{S}$，并且，对所有向量$\mathbf{u}$与$\mathbf{v}$，它满足

$$\mathrm{tr}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$$

由(3)式和迹的线性性质

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\mathbf{S}=\mathrm{tr}\Big(\sum_{i,j}S_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\Big)&=\sum_{i,j}S_{ij}\,\mathrm{tr}(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j)\\&=\sum_{i,j}S_{ij}\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\sum_i S_{ii}\end{aligned}$$

因此，迹是良定的：

$$\mathrm{tr}\mathbf{S}=\sum_i S_{ii}$$

这种运算具有下列性质：

$$\mathrm{tr}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}=\mathrm{tr}\mathbf{S}\tag{4}$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{S}\mathbf{T})=\mathrm{tr}(\mathbf{T}\mathbf{S})$$

全部张量构成的空间有一个自然的内积

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}=\mathrm{tr}(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{T})$$

其分量表示有如下的形式

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}=\sum_{i,j}S_{ij}T_{ij}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbf{I}\cdot\mathbf{S}&=\mathrm{tr}\mathbf{S}\\ \mathbf{R}\cdot(\mathbf{S}\mathbf{T})&=(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{R})\cdot\mathbf{T}=(\mathbf{R}\mathbf{T}^{\mathrm{T}})\cdot\mathbf{S}\\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{S}\mathbf{v}&=\mathbf{S}\cdot(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\\ (\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\cdot(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})&=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{v})\end{aligned}\tag{5}$$

更重要的是以下命题。

命题

(a) 如果 $\mathbf{S}$ 是对称张量，则

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}=\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}^{\mathrm{T}}=\mathbf{S}\cdot\left\{\frac{1}{2}(\mathbf{T}+\mathbf{T}^{\mathrm{T}})\right\}$$

(b) 如果 $\mathbf{W}$ 是反对称张量，则

$$\mathbf{W}\cdot\mathbf{T}=-\mathbf{W}\cdot\mathbf{T}^{\mathrm{T}}=\mathbf{W}\cdot\left\{\frac{1}{2}(\mathbf{T}-\mathbf{T}^{\mathrm{T}})\right\}$$

(c) 若 $\mathbf{S}$ 是对称张量，$\mathbf{W}$ 是反对称张量，则

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{W}=0$$

(d) 如果对每个张量 $\mathbf{S}$ 都有 $\mathbf{T}\cdot\mathbf{S}=0$，则 $\mathbf{T}=\mathbf{0}$.

(e) 如果对每个对称张量 $\mathbf{S}$ 都有 $\mathbf{T}\cdot\mathbf{S}=0$，则 $\mathbf{T}$ 是反对称张量。

(f) 如果对每个反对称张量 $\mathbf{W}$ 都有 $\mathbf{T}\cdot\mathbf{W}=0$，则 $\mathbf{T}$ 是对称张量。

张量 $\mathbf{S}$ 的**行列式**定义为矩阵[$\mathbf{S}$]的行列式：

$$\det\mathbf{S}=\det[\mathbf{S}]$$

这个定义与基$\{\mathbf{e}_i\}$的选择无关。

如果存在张量 $\mathbf{S}^{-1}$，使得

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1}=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}=\mathbf{I}$$

则 $\mathbf{S}$ 是可逆张量，$\mathbf{S}^{-1}$ 叫做 $\mathbf{S}$ 的逆。由此得 $\mathbf{S}$ 是可逆的当且仅当 $\det\mathbf{S}\neq 0$ 时。

下列各恒等式将是有用的：

$$\begin{aligned}&\det(\mathbf{S}\mathbf{T})=(\det\mathbf{S})(\det\mathbf{T})\\&\det\mathbf{S}^{\mathrm{T}}=\det\mathbf{S}\\&\det(\mathbf{S}^{-1})=(\det\mathbf{S})^{-1}\\&(\mathbf{S}\mathbf{T})^{-1}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}^{-1}\\&(\mathbf{S}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\mathbf{S}^{\mathrm{T}})^{-1}\end{aligned}\tag{6}$$

为方便计，我们用缩写记号

$$\mathbf{S}^{-\mathrm{T}}=(\mathbf{S}^{-1})^{\mathrm{T}}$$

如果张量 $\mathbf{Q}$ 对一切向量 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 保持内积:

$$\mathbf{Qu}\cdot\mathbf{Qv}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$$

则 $\mathbf{Q}$ 是正交张量。$\mathbf{Q}$ 为正交张量的充要条件是:

$$\mathbf{QQ}^{\mathrm{T}}=\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}=\mathbf{I}$$

或等价地，

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}=\mathbf{Q}^{-1}$$

行列式为正的正交张量称为转动（转动有时称做正常正交张量）。每一正交张量要么是转动，或是转动与 $-\mathbf{I}$ 的积。如果 $\mathbf{R}\neq\mathbf{I}$ 是转动，则由

$$\mathbf{Rv}=\mathbf{v}$$

确定的所有向量 $\mathbf{v}$ 的集合构成 $\mathscr{V}$ 的一维子空间，称为 $\mathbf{R}$ 的轴。

对一切向量 $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$，使

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{Sv}>0$$

的张量 $\mathbf{S}$ 是正定张量。

本书中将使用下列符号:

Lin＝一切张量的集合

Lin^+＝$\det\mathbf{S}>0$ 的一切张量 $\mathbf{S}$ 的集合

Sym＝一切对称张量的集合

Skw＝一切反对称张量的集合

Psym＝所有对称、正定张量的集合

Orth＝所有正交张量的集合

Orth^+＝所有转动的集合

集合 Lin^+, Orth 和 Orth^+ 是乘法群，实际上 Orth^+ 是 Orth 和 Lin^+ 的子群。Orth 是正交群；Orth^+ 是转动群（正常正交群）。

任何三维向量空间都恰好有两个叉积，且一个是另一个的负

号。我们假设对所有的 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 已选出了一个这样的叉积

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$$

直观上，$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 将表示 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 的右手叉积。这样，如果

$$\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2$$

则 $\{\mathbf{e}_i\}$ 是右手基，并且 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 对于 $\{\mathbf{e}_i\}$ 的分量为

$$u_2v_3-u_3v_2,\quad u_3v_1-u_1v_3,\quad u_1v_2-u_2v_1$$

并且

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u}\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u})$$

当 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 线性无关时，标量

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$$

的值表示由 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 确定的平行六面体 $\mathscr{P}$ 的体积。此外[1]

$$\det\mathbf{S}=\frac{\mathbf{S}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{S}\mathbf{v}\times\mathbf{S}\mathbf{w})}{\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})}$$

所以

$$|\det\mathbf{S}|=\frac{\mathrm{vol}(\mathbf{S}(\mathscr{P}))}{\mathrm{vol}(\mathscr{P})}$$

它给出了行列式的几何意义 (图 3)。这里，$\mathbf{S}(\mathscr{P})$ 是 $\mathscr{P}$ 在 $\mathbf{S}$ 下的象，vol 表示体积。

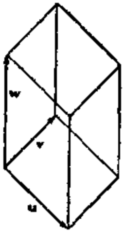

图 3

在向量和反对称张量之间存在一一对应关系：对每个 $\mathbf{v}$，给定任一反对称张量 $\mathbf{W}$，就存在唯一的向量 $\mathbf{w}$，使得

$$\mathbf{W}\mathbf{v}=\mathbf{w}\times\mathbf{v}$$

反之亦真。实际上，

1）可参阅 Nikerson, Spencer *and* Steenrod[1, § 52]。

$$[\mathbf{W}]=\begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

相应于

$$w_1=\alpha, \quad w_2=\beta, \quad w_3=\gamma$$

我们称 $\mathbf{w}$ 为对应于 $\mathbf{W}$ 的轴向量。由(7)式可得，(对于 $\mathbf{W}\neq\mathbf{0}$) $\mathbf{W}$ 的零空间，也就是所有使

$$\mathbf{W}\mathbf{v}=\mathbf{0}$$

的向量 $\mathbf{v}$ 的集合，等于由 $\mathbf{w}$ 张成的一维子空间，这子空间叫做 $\mathbf{W}$ 的轴。

我们将经常用到下述事实，即 $\mathscr{V}$ 和 Lin 是赋范向量空间，并且张量分析的标准运算是连续的。特别地，$\mathscr{V}$ 和 Lin 上的和、内积及数积是连续的；$\mathscr{V}$ 上的张量积以及 Lin 的适当子集上的积、迹、转置和行列式也是连续的。

习　题

1. 选 $\mathbf{a}\in\mathscr{V}$ 并设 $\psi:\mathscr{V}\to\mathbb{R}$ 由 $\psi(\mathbf{v})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}$ 定义。证明

$$\mathbf{a}=\sum_i \psi(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i$$

2. 证明线性形式的表示定理(第1页)。
3. 证明和 $\mathbf{S}+\mathbf{T}$ 与积 $\mathbf{ST}$ 都是张量。
4. 证明 $\mathbf{S}$ 的转置 $\mathbf{S}^T$ 的存在性和唯一性。
5. 证明张量积 $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ 是张量。
6. 证明

(a) $\mathbf{S}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})=(\mathbf{Sa})\otimes\mathbf{b}$

(b) $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{S}=\mathbf{a}\otimes(\mathbf{S}^T\mathbf{b})$

(c) $\sum_i(\mathbf{Se}_i)\otimes\mathbf{e}_i=\mathbf{S}$

7. 证明(1)，(2)，(4)和(5)式

8. 证明

(a) $\mathbf{v}=\mathbf{S}\mathbf{u}$ 等价于 $v_i=\sum_j S_{ij}u_j$

(b) $(\mathbf{S}^T)_{ij}=S_{ji}$

(c) $(\mathbf{S}\mathbf{T})_{ij}=\sum_k S_{ik}T_{kj}$

(d) $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_{ij}=a_ib_j$

(e) $\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}=\sum_{i,j} S_{ij}T_{ij}$

9. 证明运算 $\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}$ 确实是内积，即要证明

(a) $\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}=\mathbf{T}\cdot\mathbf{S}$,

(b) 对固定的 $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}$ 关于 $\mathbf{T}$ 是线性的，

(c) $\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}\geqslant 0$,

(d) 仅当 $\mathbf{S}=\mathbf{0}$ 时 $\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}=0$。

10. 证明第 6 页的命题。

11. 证明张量的迹等于它的对称部分的迹。因此，反对称张量的迹为零。

12. 证明当且仅当 $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}=\mathbf{I}$ 时 $\mathbf{Q}$ 是正交张量。

13. 证明当且仅当 $\mathbf{H}=\mathbf{Q}-\mathbf{I}$ 满足

$$\mathbf{H}+\mathbf{H}^T+\mathbf{H}\mathbf{H}^T=0,\quad \mathbf{H}\mathbf{H}^T=\mathbf{H}^T\mathbf{H}$$

时，$\mathbf{Q}$ 是正交张量。

14. 令 $\varphi:\mathscr{V}\times\mathscr{V}\times\mathscr{V}\to\mathbb{R}$ 是三线性和反对称的，即 φ 对每个自变量是线性的且对一切 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$、$\mathbf{w}\in\mathscr{V}$ 有

$$\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})=-\varphi(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w})=-\varphi(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v})$$
$$=-\varphi(\mathbf{w},\mathbf{v},\mathbf{u})$$

令 $\mathbf{S}\in\mathrm{Lin}$，证明

$$\varphi(\mathbf{S}\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)+\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{S}\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)+\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{S}\mathbf{e}_3)$$
$$=(\mathrm{tr}\mathbf{S})\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$$

15. 令 $\mathbf{Q}$ 是正交张量，$\mathbf{e}$ 是向量满足

$$\mathbf{Q}\mathbf{e}=\mathbf{e}$$

(a) 证明

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{e}=\mathbf{e}$$