複變數與應用詳解

(习题)

曉園出版社
世界图书出版公司

前　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與鋪路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

内 容 简 介

本书是J. W. 布朗、R.V.丘吉尔所著的《复变数与应用详解》一书的习题详解，是一本很好的自学教材。

复变数与应用详解(习题)

J.W.布朗，R.V.丘吉尔原著
萧永盛　译著
晓园出版社　出版
世界图书出版公司 北京分公司重印
（北京朝内大街137 号）
北京中西印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
1992年2月重印　850×1168 1/32
1992年2月第1次印刷　印张：10.75
印数：0,001—1560
ISBN 7-5062．1154.8/0.13
定价：7.40元

複變數與應用詳解(习题)

目　　錄

第一章

複　　数

1.～2.節

1. 證明下列各式：

(a) $(\sqrt{2}-i)-i(1-\sqrt{2}i)=-2i$；(b) $(2,-3)(-2,1)=(-1,8)$；

(c) $(3,1)(3,-1)\left(\frac{1}{5},\frac{1}{10}\right)=(2,1)$；(d) $\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i}=-\frac{2}{5}$；

(e) $\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}=\frac{1}{2}i$；(f) $(1-i)^4=-4$.

解：(a) $(\sqrt{2}-i)-i(1-\sqrt{2}i)=(\sqrt{2}-i)-(i+\sqrt{2})$

$$=-2i$$

(b) $(2,-3)(-2,1)=(2-3i)(-2+i)$

$$=-4+2i+6i+3$$

$$=-1+8i=(-1,8)$$

(c) $(3,1)(3,-1)(\frac{1}{5},\frac{1}{10})$

$$=(3+i)(3-i)(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i)$$

$$=(9+1)(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i)$$

$$=2+i=(2,1)$$

(d) $\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i}=\frac{(1+2i)}{(3-4i)}\frac{(3+4i)}{(3+4i)}+\frac{(2-i)i}{5i\cdot i}$

$$=\frac{-1+2i}{5}-\frac{1+2i}{5}=-\frac{2}{5}$$

(e) $\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}=\frac{5}{(1-3i)(3-i)}$

$$= \frac{5}{-10i} = \frac{1}{2}i$$

(f) $(1-i)^4 = 1 - \binom{4}{1} i + \binom{4}{2} i^2 - \binom{4}{3} i^3 + i^4$

$$= 1 - 4i - 6 + 4i + 1 = -4$$

2. 證明 $z = 1 \pm i$ 係滿足方程式 $z^2 - 2z + 2 = 0$ 。

解：$z^2 - 2z + 2 = (z - 1 + i)(z - 1 - i) = 0$

$\Rightarrow$ $z = 1 \pm i$ 爲 $z^2 - 2z + 2 = 0$ 之解

3. 試以 $z = (x, y)$ 解方程式 $z^2 + z + 1 = 0$，而以下式記之

$$(x, y)(x, y) + (x, y) + (1, 0) = (0, 0)$$

同時，解上式 x, y 的聯立方程式。

提示：注意，因 $y \neq 0$，故任意實數 x 無法滿足

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

解：以 $x + iy$ 取代 z

$$z^2 + z + 1 = (x + iy)(x + iy) + (x + iy) + 1$$
$$= (x^2 - y^2 + x + 1) + iy(2x + 1)$$
$$= 0 + i0$$

比較虛數項，若 $y = 0$，則實數項變爲 $x^2 + x + 1 = 0$，但 $x \in R$，故

$x^2 + x + 1 \neq 0$，所以 $2x + 1 = 0$， $x = -\frac{1}{2}$ ，得實數項爲

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0 \qquad y^2 = \frac{3}{4} \qquad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

其解爲 $z = x + iy = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

4. 按本節方程式(1)之第二式的說明，試證其乘法爲可交換的。

解：令 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ $\quad x_1, x_2, y_1, y_2\in R$

$$\begin{aligned}
z_1z_2&=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)\\
&=x_1x_2+i(x_1y_2+y_1x_2)+i^2(y_1y_2)\\
&=x_2x_1+i(y_2x_1+x_2y_1)+i^2(y_2y_1)\\
&=(x_2+iy_2)(x_1+iy_1)\\
&=z_2z_1 \quad（因爲實數滿足交換律）
\end{aligned}$$

5. 試證本節的結合律(2)。

解：令 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，$z_3=x_3+iy_3$

$$\begin{aligned}
(z_1+z_2)+z_3&=(x_1+iy_1+x_2+iy_2)+(x_3+iy_3)\\
&=(x_1+x_2+x_3)+i(y_1+y_2+y_3)\\
&=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2+x_3+iy_3)\\
&=z_1+(z_2+z_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(z_1z_2)z_3&=[(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)](x_3+iy_3)\\
&=[(x_1x_2-y_1y_2)+i(y_1x_2+x_1y_2)](x_3+iy_3)\\
&=[(x_1x_2-y_1y_2)x_3-(y_1x_2+x_1y_2)y_3]\\
&\quad+i[(y_1x_2+x_1y_2)x_3+(x_1x_2-y_1y_2)y_3]\\
&=[x_1(x_2x_3-y_2y_3)-y_1(x_2y_3+y_2x_3)]\\
&\quad+i[x_1(x_2y_3+x_3y_2)+y_1(x_2x_3-y_2y_3)]\\
&=(x_1+iy_1)[(x_2x_3-y_2y_3)+i(y_2x_3+x_2y_3)]\\
&=(x_1+iy_1)[(x_2+iy_2)(x_3+iy_3)]\\
&=z_1(z_2z_3)
\end{aligned}$$

6. 試證本節的分配律(3)。

解：令 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，$z_3=x_3+iy_3$

$$\begin{aligned}
z_1(z_2+z_3)&=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2+x_3+iy_3)\\
&=x_1x_2+x_1x_3+i(x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1+x_3y_1)\\
&\quad+i^2(y_1y_2+y_1y_3)\\
&=[x_1x_2+i(x_1y_2+x_2y_1)+i^2(y_1y_2)]
\end{aligned}$$

$$+[\,x_1x_3+i\,(\,x_1y_3+x_3y_1\,)+i^2\,(\,y_1y_3\,)\,]$$
$$=(\,x_1+iy_1\,)\,(\,x_2+iy_2\,)+(\,x_1+iy_1\,)\,(\,x_3+iy_3)$$
$$=z_1z_2+z_1z_3$$

7. 應用習題5.、6.之定律，證明下式：

$$z(z_1+z_2+z_3)=zz_1+zz_2+zz_3.$$

解：令 $z_4=z_1+z_2$

$$z\,(\,z_1+z_2+z_3\,)=z\,(\,z_4+z_3\,)=zz_4+zz_3$$
$$=z\,(\,z_1+z_2\,)+zz_3$$
$$=zz_1+zz_2+zz_3$$

8. 試證複數 $1=(\,1,0\,)$ 係唯一之乘法單位元素。

解：假設 $w\neq(\,1,0\,)$，是另一個乘法單位元素

$w=u+iv$，$\forall\ z=x+iy$

則 $w\cdot z=(\,u+iv\,)\,(\,x+iy\,)=x+iy=z$

$$\begin{cases} ux-vy=x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ uy+vx=y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

由①，得 $u=1+\dfrac{y}{x}v$，代進② $\Rightarrow$ $v\,(\dfrac{x^2+y^2}{x})=0$，若 $v=0$，

$u=1$，$w=(\,1,0\,)$，已知 $w\neq(\,1,0\,)$，則 $x^2+y^2=0$ $\Rightarrow$ $x=0$，$y=0$，故得證（無效的解對我們證明無用）

9. 試證 $-z=(\,-x,-y\,)$ 係一已知複數 $z=(\,x,y\,)$ 的唯一加法反元素。

解：設 $z=(\,x,y\,)$，若有 $w=(\,u,v\,)$ 而

$$w+z=0,\quad w+z=(\,u+iv\,)+(\,x+iy\,)$$
$$=(\,u+x\,)+i\,(\,v+y\,)=0$$

$u+x=0 \Rightarrow u=-x$ （實數的成體公式）

$v+y=0 \Rightarrow v=-y$

故 $w=(\,u,v\,)=(\,-x,-y\,)$ 是 $z=(\,x,y\,)$ 之唯一加法逆元。

10. 試證下列各式：

(*a*) $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}\, z$; (*b*) $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}\, z$; (*c*) $1/(1/z) = z \quad (z \neq 0)$;

(*d*) $(-1)z = -z$.

解：(a)
$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(iz) &= \mathrm{Im}[\,i(x+iy)\,]\\ &= \mathrm{Im}(-y+ix) = x\\ &= \mathrm{Re}(z)\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(iz) &= \mathrm{Re}[\,i(x+iy)\,]\\ &= \mathrm{Im}(-y+ix) = -y\\ &= -\mathrm{Im}(x+iy) = -\mathrm{Im}(z)\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}1/(1/z) &= \frac{1}{1/(x+iy)}\\ &= \frac{1}{(x-iy)/(x^2+y^2)}\\ &= (x^2+y^2)\frac{1}{x-iy}\\ &= (x^2+y^2)\frac{x+iy}{(x-iy)(x+iy)}\\ &= (x^2+y^2)\frac{x+iy}{x^2+y^2}\\ &= x+iy = z\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}(-1)z &= (-1)(x+iy)\\ &= -(x+iy)\\ &= -z\end{aligned}$$

11. 利用乘法結合律與交換律，證明下式：

$$(z_1z_2)(z_3z_4) = (z_1z_3)(z_2z_4).$$

解：$(z_1z_2)(z_3z_4) = z_1[\,z_2(z_3z_4)\,]$ ………… (將 z_3z_4 看成一變數)(結合律)

$= z_1[\,(z_2z_3)z_4\,]$ ………………………… (結合律)

$$= z_1 [(z_3 z_2) z_4] \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{交換律})$$
$$= z_1 [z_3 (z_2 z_4)] \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{結合律})$$
$$= (z_1 z_3) (z_2 z_4) \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{結合律})$$

12. 若 $z_1 z_2 z_3 = 0$，證明三因子 z_1，z_2，z_3 中至少有一爲零。

解：若　z_1，z_2，z_3 全不爲零

$$z_1 z_2 z_3 = 0 \Rightarrow z_1 = 0 \cdot z_2^{-1} z_3^{-1}$$
$$= 0$$
得到矛盾故至少有一數爲零。

13. 試證本節中恒等式(14)。

解：令　$z_1 = x_1 + i y_1$，　$z_2 = x_2 + i y_2$

$$\frac{1}{z_1 z_2} = \frac{1}{(x_1 + i y_1)(x_2 + i y_2)}$$

$$= \frac{(x_1 - i y_1)(x_2 - i y_2)}{[(x_1 + i y_1)(x_1 - i y_1)][(x_2 + i y_2)(x_2 - i y_2)]}$$

$$= \frac{x_1 - i y_1}{(x_1 + i y_1)(x_1 - i y_1)} \cdot \frac{x_2 - i y_2}{(x_2 + i y_2)(x_2 - i y_2)}$$

（$\because [(x_1 + i y_1)(x_1 - i y_1)]$ 及 $[(x_2 + i y_2)(x_2 - i y_2)]$ 均爲實數）

$$= \frac{1}{x_1 + i y_1} \quad \frac{1}{x_2 + i y_2}$$

$$= \frac{1}{z_1} \quad \frac{1}{z_2}$$

14. 試求本節中恒等式(15)之第一式。

解：$z_1 = x_1 + i y_1$，　$z_2 = x_2 + i y_2$，　$z_3 = x_3 + i y_3$

$$\frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{(x_1 + i y_1) + (x_2 + i y_2)}{x_3 + i y_3}$$

$$= \frac{(x_1 + i y_1)(x_3 - i y_3) + (x_2 + i y_2)(x_3 - i y_3)}{(x_3 + i y_3)(x_3 - i y_3)}$$

$$= \frac{(x_1 - iy_1)(x_3 - iy_3)}{(x_3 + iy_3)(x_3 - iy_3)} + \frac{(x_2 + iy_2)(x_3 - iy_3)}{(x_3 + iy_3)(x_3 - iy_3)}$$

$$= \frac{x_1 + iy_1}{x_3 + iy_3} + \frac{x_2 + iy_2}{x_3 + iy_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}$$

$(\because [(x_3 + iy_3)(x_3 - iy_3)]$ 是實數)

15. 試求本節中恒等式(15)之第二式，且藉該式證明下式消去律（cancellation law）。

$$\frac{zz_1}{zz_2} = \frac{z_1}{z_2} \qquad (z \neq 0,\ z_2 \neq 0)$$

解：$z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$，$z_3 = x_3 + iy_3$，$z_4 = x_4 + iy_4$

$$\frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)}{(x_3 + iy_3)(x_4 + iy_4)}$$

$$= \frac{(x_1 + iy_1)(x_3 - iy_3)(x_2 + iy_2)(x_4 - iy_4)}{(x_3 + iy_3)(x_3 - iy_3)(x_4 + iy_4)(x_4 - iy_4)}$$

$$= \left[\frac{(x_1 + iy_1)(x_3 - iy_3)}{(x_3 + iy_3)(x_3 - iy_3)}\right]\left[\frac{(x_2 + iy_2)(x_4 - iy_4)}{(x_4 + iy_4)(x_4 - iy_4)}\right]$$

$$= \frac{[(x_1x_3 + y_1y_3) + i(y_1x_3 - x_1y_3)][(x_2x_4 + y_2y_4) + i(y_2x_4 - x_2y_4)]}{(x_3^2 + y_3^2)(x_4^2 + y_4^2)}$$

$$= \frac{(x_1x_3 + y_1y_3)(x_2x_4 + y_2y_4) - (y_1x_3 - x_1y_3)(y_2x_4 - x_2y_4)}{(x_3^2 + y_3^2)(x_4^2 + y_4^2)}$$

$$+ i\,\frac{(y_1x_3 - x_1y_3)(x_2x_4 + y_2y_4) + (x_1x_3 + y_1y_3)(y_2x_4 - x_2y_4)}{(x_3^2 + y_3^2)(x_4^2 + y_4^2)}$$

但 $\left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{z_2}{z_4}\right) = \left(\frac{x_1 + iy_1}{x_3 + iy_3}\right)\left(\frac{x_2 + iy_2}{x_4 + iy_4}\right)$

$$= \left[\frac{(x_1 + iy_1)(x_3 - iy_3)}{(x_3 + iy_3)(x_3 - iy_3)}\right]\left[\frac{(x_2 + iy_2)(x_4 - iy_4)}{(x_4 + iy_4)(x_4 - iy_4)}\right]$$

$$= \left[\frac{(x_1x_3 + y_1y_3) + i(y_1x_3 - x_1y_3)}{(x_3^2 + y_3^2)}\right]$$

$$\cdot\left[\frac{(x_2x_4+y_2y_4)+i(y_2x_4-x_2y_4)}{(x_4^2+y_4^2)}\right]$$

$$=\frac{(x_1x_3+y_1y_3)(x_2x_4+y_2y_4)-(y_1x_3-x_1y_3)(y_2x_4-x_2y_4)}{(x_3^2+y_3^2)(x_4^2+y_4^2)}$$

$$+i\,\frac{(y_1x_3-x_1y_3)(x_2x_4+y_2y_4)+(x_1x_3+y_1y_3)(y_2x_4-x_2y_4)}{(x_3^2+y_3^2)(x_4^2+y_4^2)}$$

$\because\ \dfrac{z_1z_2}{z_3z_4}$ 與 $\left(\dfrac{z_1}{z_3}\right)\left(\dfrac{z_2}{z_4}\right)$ 的實部、虛部都相等

$$\therefore\ \frac{z_1z_2}{z_3z_4}=\left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{z_2}{z_4}\right)$$

令　$z\neq 0$，　$z=x+iy$

$$\frac{zz_1}{zz_2}=\left(\frac{z}{z}\right)\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

$$=1\cdot\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

$$=\frac{z_1}{z_2}$$

16.　試證 $(1+z)^2=1+2z+z^2$ 。

解：$(1+z)^2=(1+z)(1+z)$

$$=(1+z)+(1+z)z$$

$$=1+z+z+z^2$$

$$=1+2z+z^2\quad(\text{使用分配律})$$

17.　試利用數學歸納法求二項式公式（binomial formula）。

$$(z_1+z_2)^n=z_1^n+\frac{n}{1!}z_1^{n-1}z_2+\frac{n(n-1)}{2!}z_1^{n-2}z_2^2+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}z_1^{n-k}z_2^k+\cdots+z_2^n.$$

上式 z_1，z_2 係任意複數，且 n 爲正整數（$n=1$，2，……）。

解：數學歸納法：

令 $n=1$，$(z_1+z_2)^1=z_1^1+z_2^1$

若 $n=k$

則
$$(z_1+z_2)^k=z_1^k+\frac{k}{1!}z_1^{k-1}z_2+\frac{k(k-1)}{2!}z_1^{k-2}z_2^2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots\cdots(k-\ell+1)}{\ell!}z_1^{k-\ell}z_2^{\ell}$$
$$+\cdots\cdots+z_2^k$$

$n=k+1$，

$$\begin{aligned}(z_1+z_2)^{k+1}&=(z_1+z_2)(z_1+z_2)^k\\&=[z_1(z_1+z_2)^k]+[z_2(z_1+z_2)^k]\\&=[z_1^{k+1}+\frac{k}{1!}z_1^kz_2+\cdots\cdots\\&\quad+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots\cdots(k-\ell+1)}{\ell!}z_1^{k-\ell+1}z_2^{\ell}\\&\quad+\cdots\cdots+z_1z_2^k]+[z_1^kz_2+\cdots\cdots\\&\quad+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots\cdots(k-\ell+1)}{\ell!}z_1^{k-\ell}z_2^{\ell+1}\\&\quad+\cdots\cdots+z_1z_2^k+z_2^{k+1}]\end{aligned}$$

考慮通式：$z_1^{k-\ell+1}z_2^{\ell}$，其係數爲

$$\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-\ell+1)}{\ell!}+\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-\ell+2)}{(\ell-1)!}$$
$$=\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-\ell+2)[(k-\ell+1)+\ell]}{\ell!}$$
$$=\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-\ell+2)}{\ell!}\cdot(k+1)$$
$$=\frac{(k+1)k(k-1)\cdots\cdots(k-\ell+2)}{\ell!}$$

則 $(z_1+z_2)^{k+1}=z_1^{k+1}+\dfrac{k+1}{1!}z_1^k z_2+\cdots\cdots$

$$+\frac{(k+1)k(k-1)\cdots\cdots(k-\ell+2)}{\ell!}z_1^{k-\ell+1}z_2^{\ell}$$

$$+\frac{(k+1)k\cdots\cdots(k-\ell+1)}{(\ell+1)!}z_1^{k-\ell}z_2^{\ell+1}$$

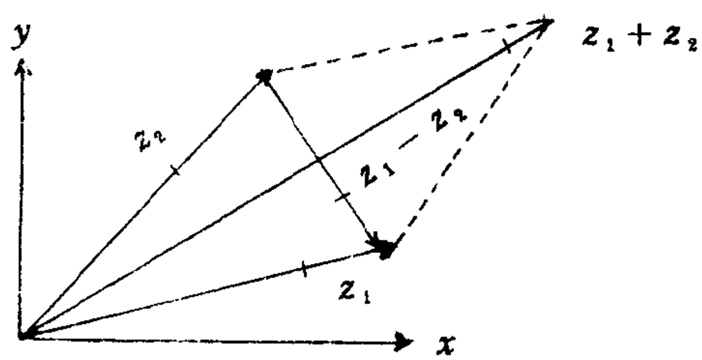
$+\cdots\cdots+z_2^{k+1}$ 故得證

3.～4. 節

1. 就下列各情況，以圖解方式，試求 z_1+z_2 ，z_1-z_2 之向量關係。

(a) $z_1=2i,\ z_2=\dfrac{2}{3}-i$; (b) $z_1=(-\sqrt{3},1),\ z_2=(\sqrt{3},0)$;

(c) $z_1=(-3,1),\ z_2=(1,4)$; (d) $z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_1-iy_1$.



（各題數值自行代入畫圖）

解：(a) $z_1+z_2=2i+\dfrac{2}{3}-i=\dfrac{2}{3}+i$

$z_1-z_2=2i-\dfrac{2}{3}+i=-\dfrac{2}{3}+3i$

(b) $z_1+z_2=(-\sqrt{3}+i)+\sqrt{3}=i$

$z_1-z_2=(-\sqrt{3}+i)-\sqrt{3}=-2\sqrt{3}+i$

(c) $z_1+z_2=(-3+i)+(1+4i)=-2+5i$

$$z_1-z_2=(-3+i)-(1+4i)=-4-3i$$

(d) $z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_1-iy_1)=2x_1$

$$z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_1-iy_1)=2iy_1$$

2. 試證

(a) $\overline{\bar{z}+3i}=z-3i$; (b) $\overline{iz}=-i\bar{z}$; (c) $\overline{(2+i)^2}=3-4i$;

(d) $|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)|=\sqrt{3}|2z+5|$.

解：(a) $z=x+iy$ ， $\bar{z}=x-iy$

$$\begin{aligned}\overline{\bar{z}+3i}&=\overline{x+(3-y)i}\\&=x+(y-3)i\\&=x+iy-3i\\&=z-3i\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\overline{iz}&=\overline{i(x+iy)}=\overline{-y+ix}\\&=-y-ix=-(ix+y)\\&=-i(x-iy)\\&=-i\bar{z}\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\overline{(2+i)^2}&=\overline{(4+4i-1)}\\&=\overline{3+4i}=3-4i\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)|&=|2\bar{z}+5|\,|\sqrt{2}-i|\\&=|\overline{2z+5}|\,|\sqrt{2}-i|\\&=|2z+5|\sqrt{3}\\&=\sqrt{3}\,|2z+5|\end{aligned}$$

3. 試證第三節中不等式(3)。

解：$|z|=\sqrt{(\mathrm{Re}\,z)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2}\geq\sqrt{(\mathrm{Re}\,z)^2}$

$$=|\mathrm{Re}\,z|\geq\mathrm{Re}\,z$$

$$|z|=\sqrt{(\mathrm{Re}\,z)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2}\geq\sqrt{(\mathrm{Im}\,z)^2}=|\mathrm{Im}\,z|\geq\mathrm{Im}\,z$$

4. 證明 $\sqrt{2}\,|z|\geqq|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|$ 。

解：$\sqrt{2}\,|z|=[\,2(\mathrm{Re}\,z)^2+2(\mathrm{Im}\,z)^2\,]^{1/2}$

$$\Rightarrow\ (\sqrt{2}\,|z|)^2=2(\mathrm{Re}\,z)^2+2(\mathrm{Im}\,z)^2$$

$$(|\mathrm{Re}\, z|+|\mathrm{Im}\, z|)^2=(\mathrm{Re}\, z)^2+2|\mathrm{Re}\, z||\mathrm{Im}\, z|+(\mathrm{Im}\, z)^2$$

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}|z|)^2-(|\mathrm{Re}\, z|+|\mathrm{Im}\, z|)^2 &=(\mathrm{Re}\, z)^2-2|\mathrm{Re}\, z||\mathrm{Im}\, z|+(\mathrm{Im}\, z)^2\\ &=(|\mathrm{Re}\, z|-|\mathrm{Im}\, z|)^2\geq 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}|z|\geq|\mathrm{Re}\, z|+|\mathrm{Im}\, z|$$

5 證明第三節中式(6)，(7)之性質。

解：(6)

$$\begin{aligned}\overline{z_1+z_2} &=\overline{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)}\\ &=\overline{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}\\ &=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2)\\ &=(x_1-iy_1)+(x_2-iy_2)\\ &=\bar{z}_1+\bar{z}_2\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}\overline{z_1z_2} &=\overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)}=\overline{(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2)}\\ &=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_2y_1+x_1y_2)=(x_1-iy_1)(x_2-iy_2)\\ &=\bar{z}_1\bar{z}_2\end{aligned}$$

6. 試證(a)若且唯若 $\bar{z}=z$，則 z 爲實數；(b)若且唯若 $(\bar{z})^2=z^2$，則 z 是實數或純虛數。

解：(a) $(\Rightarrow)$ $z=\bar{z} \Rightarrow x+iy=x-iy, \Rightarrow y=0$，故 z 爲實數

$(\Leftarrow)$ 若 z 是實數，則 $z=\bar{z}$

(b) $(\Rightarrow)$ $z\in R$，$(\bar{z})^2=(z)^2=z^2$

z 是純虛數，$(\bar{z})^2=(-z)^2=z^2$

$(\Leftarrow)$ $(\bar{z})^2=(x-iy)^2=x^2-2ixy-y^2$

$z^2=x^2+2ixy-y^2$

$$\Rightarrow (\bar{z})^2=z^2 \Rightarrow \begin{cases}x^2-y^2=x^2-y^2\\ -2xy=+2xy\end{cases}$$

可知，若不是 $y=0$ 卽 $x=0$，則 z 不是實數就是虛數。

7. 利用 $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$ 性質，證明(a) $\overline{z_1z_2z_3}=\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3$；(b) $\overline{(z^4)}=(\bar{z})^4$。

解：(a) 令 $z=z_1z_2$

$$\overline{z_1 z_2 z_3} = \overline{z z_3} = \bar{z}\bar{z}_3$$
$$= \overline{z_1 z_2}\,\bar{z}_3 = \bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3$$

(b) $\overline{(z^4)} = \overline{zzzz} = \overline{zz}\,\overline{zz}$

$$= \bar{z}\bar{z}\bar{z}\bar{z} = (\bar{z})^4$$

8. 證明本節模數式(2)之性質。

解：假設 $|z_2| \neq 0$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\right|$$
$$= \left|\frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}\right|$$
$$= \left|\frac{z_1\bar{z}_2}{x_2^2 + y_2^2}\right|$$
$$= \frac{|z_1||\bar{z}_2|}{|z_2|^2}$$
$$= \frac{|z_1||z_2|}{|z_2|^2}$$
$$= \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

9. 當 z_2，z_3 爲非零時，試以第 3 節和本節之概念，試證：

(a) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2 z_3}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2\bar{z}_3}$； (b) $\left|\dfrac{z_1}{z_2 z_3}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2||z_3|}$.

解：(a) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2 z_3}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\overline{z_2 z_3}}$

$$= \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2\bar{z}_3}$$ （將 $z_2 z_3$ 視爲一個複數）

(b) $\left|\dfrac{z_1}{z_2 z_3}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2 z_3|} = \dfrac{|z_1|}{|z_2||z_3|}$