

原东京工业大学教授 丸山滋弥 主编
前琉球大学教授

日本理工科大学
硕士研究生入学
数学试题集 (详解)

田根宝 译

西南交通大学出版社

日本理工科大学
硕士研究生入学
数学试题集(详解)

原东京工业大学教授 丸山滋弥 主编
前琉球大学教授

佐藤义隆

佐野茂

中野实 著

细木圭祐

吉泽金三

田根宝 译

西南交通大学出版社

日本理工科大学硕士研究生入学
RIBEN LIGONGKE DAXUE SHUOSHI YANJIUSHENG RUXUE

数 学 试 题 集 (详 解)
SHUXUE SHITIJI (XIANGJIE)

〔日〕丸山滋弥 主编
田根宝 译

*

西南交通大学出版社出版

四川省新华书店经销

西南交通大学出版社印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 10.625
1987年12月第一版 1987年12月第一次印刷
字数: 244千字 印数: 13478册
ISBN 7-81022-007-7

统一书号: 13478·02 定价: 1.75元

译者序

本书收集了近几年来日本东京大学、东京工业大学等三十五所理工科大学硕士研究生入学的数学试题。全书共分七章：第一章微分方程（包括常微分方程与偏微分方程），第二章矢量分析（包括场论），第三章拉普拉斯变换与傅立叶分析，第四章微分与积分，第五章线性代数，第六章概率与统计，第七章复变函数。每章都有要点、解释和解答。试题新颖，别具一格，综合性、技巧性较强，国内少见。

本书除详解试题外，还有补充试题和答案，供读者进一步探讨和研究。

本书在日本颇受重视和欢迎，现将它译出供准备报考硕士研究生的同志和我国理工科大学、电视大学、业余大学、函授大学的广大师生参考。深信对提高高等数学的教学质量会有所裨益。

一九八六年十月

前 言

本书收集了最近几年来理工科，特别是工科大学研究院硕士研究生入学考试的数学试题。为提高读者分析问题和解答问题的实际能力，根据内容将试题进行了分类，并附有要点、解释和解答。

大学研究院（硕士研究生）的入学考试内容，各大学各专业是各不相同的。甚至有的理工科大学研究院的考试内容没有数学试题，即使出题也有作为一般科目和必要科目的区别，从而存在需要与选择上的差别，试题的难易程度和内容也不一样（在本书末附有表示这些差别的“大学研究院指南”）。

各大学研究院专业的性质、特色等是由该专业的人员所决定的，对入学者要求掌握的数学知识，也是由该专业的设想和要求提出来的，这是硕士研究生入学考试多样化的理由之一。实际上，不可能将此统一化，即使统一也是不正确的。

各大学研究院专业的要求，长期以来是根据各自的理由变化的，但这并不是突然随意改变的。因此，在各大学入学考试的数学试题中当然会出现某种倾向。只要将本书中收录的试题和几个大学研究院进行比较，就能很清楚地看到这些大学研究院出题的倾向。

本书所收录的试题，几乎囊括了所有主要大学研究院硕

士研究生入学的数学试题。但是，也有大学研究院没有公开发表过的入学试题，主要是依靠参加过考试的人的记忆得到的。另外，即使是公开发表过的试题，也有可能存在未经订正的印刷错误。所以，本书所载试题和实际的试题多少有点不同（象这种情况，在类似题中加上记号+）。

在收集这些试题的过程中，曾得到许多位的直接协助和关照，在此，表示衷心的感谢。

执笔是由佐藤、佐野、中野、細木、吉沢等五位分工负责的，丸山也曾过目。以上几位作者曾多次一起研究过要点的内容、形式和解答的方针等等。

要求读者具备的预备知识，必须规定出一个标准。为此，在各章中都列出要点，整理出基础项目，系统地加以阐述，我认为这对在大学阶段的数学学习也会有所帮助。

工科范围的数学是“应用数学”，不是“纯粹数学”。这种区别是概念性的。所以，实际上并不是十分恰当的，但至少不能说：“纯粹数学”的全部领域并不被应用于工科，或者“应用数学”的方法和“纯粹数学”的方法完全相同。若问在大学阶段的数学中哪一领域在现今的工科中受到重视？那么，看了本书所收集的试题就可以有所了解。在这种意义上，对于有志于科学研究的工作者而言，本书的要点定能提供一点参考。

本书的解答力求详细，所以，在有的场合也许有些冗长。不过，几乎用相同方法解的试题，则省略了详细过程。就本书的宗旨而言，虽希望尽可能写得比较完整，但误解和不当之处在所难免，非常欢迎大家提出质问和意见，作为今后的参考。

本书在出版过程中，承蒙早川康戈（東京大學 名譽教授），奥住元一（職業培訓大學教授），反町迪子（職業培訓大學副教授）提出宝贵意见，并得到他们的协助，同时，也得到了職業培訓大學以及慶応義塾大學的事務局诸位的许多帮助，须藤静雄氏（東京図書）对本书的规划自始至终给予关照，在此，对以上诸位表示衷心感谢。

丸山滋弥
一九八二年三月

目 录

第一章 微分方程	1
§ 1. 常微分方程	1
§ 2. 联立常微分方程组及其稳定性	27
§ 3. 应用常微分方程	43
§ 4. 二阶线性偏微分方程	53
补充试题	69
第二章 拉普拉斯变换与傅立叶分析	80
§ 1. 拉普拉斯变换与拉普拉斯逆变换	80
§ 2. 傅立叶级数	85
§ 3. 傅立叶变换与傅立叶逆变换	94
补充试题	99
第三章 矢量分析	106
§ 1. 矢量函数	106
§ 2. 梯度、散度、旋度	110
补充试题	117
第四章 微分与积分	122
§ 1. 微分与积分	122
§ 2. 无穷级数	144

§ 3. 偏导数与重积分	155
补充试题	190
第五章 线性代数	199
§ 1. 矩阵与行列式	199
§ 2. 特征值与特征矢量	219
§ 3. 矩阵的无穷列与无穷级数	235
§ 4. 矢量空间	242
补充试题	248
第六章 概率与统计	257
补充试题	271
第七章 复变函数	277
§ 1. 正则函数	277
§ 2. 留数	293
§ 3. 在定积分中的应用	296
补充试题	312
数学术语日汉索引	317
主要的记号	328

第一章 微分方程

§ 1. 常微分方程

一阶常微分方程

1° 分离变量型

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \text{ 的解是 } \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

2° 齐次型

在 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 中, 令 $\frac{y}{x} = u$, 则化为分离变量型

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}(f(u) - u).$$

3° 线性型

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 的一般解是

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left\{ \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right\}.$$

4° 贝努里 (Bernoulli) 方程

在 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ 中, 令 $y^{1-n} = z$, 则化为

线性型 (3°): $\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$

5° 黎卡提(Riccati)方程

$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$. 一般地, 不能直接用求积法求得一般解, 但如果知道该方程的一个解(特解) y_1 , 令 $y = z + y_1$, 则方程可化为4°的类型(贝努里方程):

$$\frac{dz}{dx} = \{Q(x) + 2R(x)y_1\}z + R(x)z^2.$$

6° 全微分型

(1) 在 $\frac{dy}{dx} = -\frac{X(x, y)}{Y(x, y)}$ 中, 当满足 $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ 时, 一般解是 $\int X(x, y)dx + \int \left\{ Y(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int X(x, y)dx \right\} dy = C$.

(2) 当 $\lambda(x, y)X(x, y)dx + \lambda(x, y)Y(x, y)dy = 0$ 为全微分方程时, 称 $\lambda(x, y)$ 为积分因子。

注: 积分因子 λ 满足 $\frac{\partial(\lambda X)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda Y)}{\partial x}$. 如果 $\frac{X_y - Y_x}{Y}$ 仅是 x 的函数, 则 $\lambda = \exp\left(\int \frac{X_y - Y_x}{Y} dx\right)$.

7° 达朗贝尔(d'Alembert)或拉格朗日(Lagrange)方程

$$y = xf(p) + g(p) \quad \left(p = \frac{dy}{dx}\right).$$

当 $f(p) \neq p$ 时, 则方程可变形为

$$\frac{dx}{dp} + \frac{xf'(p)}{f(p) - p} + \frac{g'(p)^*}{f(p) - p} = 0 \quad (\text{线性型}).$$

*: 原稿此处为 $g(p)$ 。——译者注。

当 $f(p) = p$ 时, 方程的一般解是

$$y = f(C)x + g(C) \quad (C \text{ 是 } f(p) = p \text{ 的根}).$$

8° 克莱洛 (Clairaut) 方程

$$y = xp + g(p) \quad \left(p = \frac{dy}{dx}\right).$$

一般解是 $y = Cx + g(C)$. 奇解 (不包含于一般解的解) 是从联立方程组

$$\begin{cases} x + g'(p) = 0 \\ y = xp + g(p) \end{cases}$$

中消去 p 得到的。

注: 奇解是一般解的包络线 (见第四章 § 3. 15°).

9° 解的线性性 (迭加原理)

齐次型 (同次型) 方程 $y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0$ 的解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 的线性组合 $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 也是它的解。

10° 朗斯基 (Wronskian) 行列式

齐次型方程的两个解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 线性无关

$\iff y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的朗斯基行列式 $W(y_1, y_2) =$

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

11° 与已知解线性无关的解

与已知解 $y_1(x)$ 线性无关的解是

$$y_1(x) \int \frac{\exp(-\int P(x)dx)}{\{y_1(x)\}^2} dx$$

注: 将 $y = v(x)y_1(x)$ 代入齐次型方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

+ Q(x)y = 0, 再从 $\frac{d^2v}{dx^2} + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + P\right)\frac{dv}{dx} = 0$ 求得 v.

因为 $W(y_1, vy_1) = \exp(-\int P(x)dx) \neq 0$, 所以 y_1 与 vy_1 线性无关。

12° 齐次型和非齐次型解的关系

非齐次型 (非同次型) 方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ 的一般解是一个特解 (特别解或特殊解) 和其齐次型方程的一般解 (余函数) 之和。

13° 常数变易法

设 $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ (其中 y_1, y_2 是齐次型方程的两个线性无关解) 为非齐次型方程的一般解, 根据方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = R(x) \end{cases}$$

求得 $C_1(x), C_2(x)$, 从而得到非齐次型方程的一般解

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_1 \int \frac{-R(x)y_2}{W(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{R(x)y_1}{W(y_1, y_2)} dx.$$

这里的 C_1, C_2 为任意常数。

14° 常系数二阶线性常微分方程的一般解

对于方程 $y'' + ay' + by = 0$; 称 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 为特征方程, 其根 λ_1, λ_2 为特征根。

λ_1, λ_2 为不相同的实根 $\implies$ 一般解是 $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$.

λ_1, λ_2 为相同实根 ($\lambda_1 = \lambda_2$) $\implies$ 一般解是 $y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$.

λ_1, λ_2 为两共轭复根 ($\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$) $\implies$ 一般解是 $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

注: 非齐次型方程 $y'' + ay' + by = R(x)$ 的一般解可用 12° 和 19°, 或者 13° 的方法求得。

常系数高阶线性常微分方程:

15° 齐次型和非齐次型方程解的关系

非齐次型方程

$\mathcal{L}y = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = R(x)$ 的一般解是一个特解与齐次型方程 $\mathcal{L}y = 0$ 的一般解之和 (参看 12°)。

16° 解的线性型 (迭加原理)

齐次型方程 $\mathcal{L}y = 0$ 解的线性组合仍是 $\mathcal{L}y = 0$ 的解 (参看 9°)。

17° 迭加原理

y_1 是 $\mathcal{L}y = R_1(x)$ 的解, y_2 是 $\mathcal{L}y = R_2(x)$ 的解 $\implies y_1 + y_2$ 是方程 $\mathcal{L}y = R_1(x) + R_2(x)$ 的解。

18° 齐次型方程的解的形式

若设特征方程 $a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$ 的不同根 (特征根) $\lambda_k (k = 1, 2, \dots, l)$ 为 m_k ($m_1 + m_2 + \dots + m_l = n$) 重, 则齐次型方程 $\mathcal{L}y = 0$ 的 n 个线性无关的解是

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, x^3 e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x}, x e^{\lambda_2 x}, x^2 e^{\lambda_2 x}, x^3 e^{\lambda_2 x}, \dots, x^{m_2-1} e^{\lambda_2 x},$$

.....

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, x^3 e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x}.$$

注：当特征根中有虚数时，解也是虚数，不过利用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 可作同样个数的实数解。不妨设 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ 为 $m_1 = m_2$ 重特征根，则从 $2m_1$ 个虚数解可得下面的 $2m_1$ 个实数解：

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{m_1-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{m_1-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

19° 特解的求法

(1) 应用拉普拉斯变换

若将微分方程 $\mathcal{L}y = R(x)$ 的两边进行拉普拉斯变换，则此方程可化为 $L[y(x)]$ 的线性方程。由此求 $L[y(x)]$ 的拉普拉斯逆变换即得解 $y(x)$ 。当 $R(x)$ 是指数级的函数时，利用这种方法是有效的（见第二章 § 1）。

注：变系数的情况，例如 $y'' + x^2 y = 0$ ，拉普拉斯变换的方法虽不是完全有效的，但对系数是一次的初始值问题的情况，拉普拉斯变换还是有作用的。

(2) 待定系数法

当 $R(x) = (x \text{ 的多项式}) \times e^{\alpha x} \times (\sin \beta x, \cos \beta x \text{ 的多项式})$ 时，考虑特解也具有和此相同的形式，代入方程 $\mathcal{L}y = R(x)$ 比较系数确定特解。

注：当特征根为复数 $\alpha \pm i\beta$ 或有重根时，须将特解中 x 的多项式的次数提高到相应的重复次数。

20° 算子法

令 $D^0 = 1$, $D^j = \frac{d^j}{dx^j}$ ($j = 1, 2, \dots, n$), 则微分方程 $\mathcal{L}y = R(x)$ 可写成 $(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = R(x)$. 再令左边 $= \phi(D)y$, 则解是 $y = \frac{1}{\phi(D)} R(x)$.

21° 算子法公式

根据 $\phi(D)$ 与 $R(x)$ 的形式, 有下列公式成立:

$$(1) \frac{1}{D^m} R(x) = \underbrace{\int \dots \int}_{m \text{ 个积分号}} R(x) dx \dots dx$$

(将 $R(x)$ 进行 m 次积分).

$$(2) \frac{1}{D-a} R(x) = e^{ax} \int e^{-ax} R(x) dx.$$

$$\frac{1}{(D-a)(D-\beta)} R(x)$$

$$= \frac{1}{a-\beta} \left\{ \frac{1}{D-a} R(x) - \frac{1}{D-\beta} R(x) \right\}$$

$$= \frac{1}{a-\beta} \left(e^{ax} \int e^{-ax} R(x) dx - e^{\beta x} \int e^{-\beta x} R(x) dx \right).$$

(3) 当 $R(x) = k$ 次多项式时, 将 $\frac{1}{\phi(D)}$ 展开成 D 的

幂级数, 并设 $\frac{1}{\phi(D)} = \frac{1}{a_n} (1 + c_1 D + c_2 D^2 + \dots + c_k D^k + \dots)$, 则

$$\frac{1}{\phi(D)}R(x) = \frac{1}{a_n} (1 + c_1 D + c_2 D^2 + \dots + c_k D^k) R(x).$$

$$\frac{1}{\phi(D)}R(x) = \frac{1}{a_{n-m}D} (1 + c'_1 D + c'_2 D^2 + \dots + c'_k D^k) R(x).$$

(当 $a_{n-m} \neq 0$ 时, $\phi(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \dots + a_{n-m} D^m$).

$$(4) \quad \frac{1}{(D-a)^n} e^{ax} = e^{ax} \frac{x^m}{m!} \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

$$\frac{1}{(D-a)^n g(D)} e^{ax} = \frac{e^{ax}}{g(a)} \frac{x^m}{m!} \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

$$(5) \quad \frac{1}{\phi(D)} e^{ax} r(x) = e^{ax} \frac{1}{\phi(D+a)} r'(x) \quad (r(x) = k$$

次多项式), 再将 $\frac{1}{\phi(D+a)}$ 展开成幂级数。

(6) 当 $R(x) = r(x) \cos ax$ 或 $r(x) \sin ax$ ($r(x) = k$ 次多项式) 时, 用 (5) 的方法求微分方程为 $\mathcal{L}y = r(x) e^{i ax}$ 的解, 其实部是 $\mathcal{L}y = r(x) \cos ax$ 的解, 虚部是 $\mathcal{L}y = r(x) \sin ax$ 的解。

利用幂级数的解法

22° 正则点与奇点

当齐次型方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 中的 $P(x)$, $Q(x)$ 是多项式或在 $x=a$ 的邻域中可展成收敛的幂级数