山东科学技术出版社

下 册

Б·П·吉米多维奇

工科用数学分析问题解答

Б·П·吉米多维奇

工科用数学分析问题解答

下　　册

张九思　段奇　　编

山东科学技术出版社

一九八六年·济南

内容简介

这套书汇集3193道习题的详细解答，分三册出版，内容广泛，题目类型多，适用面宽。

上册包括分析引论（函数与极限）、函数的微分法、函数的极值和导数的几何应用、不定积分、定积分；中册包括多元函数、重积分与曲线积分、级数；下册包括微分方程、近似计算。

全套书充分考虑了数学分析本身的系统性、逻辑性和严密性，注意到广大工科类大学生学习高等数学的特点和需要。无论对于初学者，还是有关课程的教师，都是一本理想的学习用书和参考书。

Б·П·吉米多维奇

工科用数学分析问题解答

下 册

张九思 段奇 编

*

山东科学技术出版社出版

（济南市南郊宾馆西路中段）

山东省新华书店发行　　山东新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　11.25印张　240千字

1986年2月第1版　　1986年2月第1次印刷

印数：1—16500

书号 13195·149　　定价 2.10元

出版说明

数学分析（又称微积分学）是整个高等数学的基础，它在自然科学的各个领域中，有着广泛的应用。数学分析作为一门课程，正在成为愈来愈多专业的必修课。

Б·П·吉米多维奇是苏联有影响的教育家和数学家。他主编的《工科用数学分析中的问题和练习》一书，包括了从数学分析的各个方面精选出来的3193道习题，内容丰富，针对性强，适用面广。该书在苏联已连续印刷十次，在我国也有较大的影响。书中的许多习题，都广泛地被我国多种高等数学教材所采用。

我们邀请具有丰富教学经验的教师将该书的全部习题做了解答，其中一部分提供了多种解法；有些题目在解答时写得比较扼要，以期对广大学习数学分析的读者起到启发、引导作用，以利于培养独立思考能力和掌握解题技能技巧。有关专业的教师亦可作为教学参考书。

山东大学郭大钧教授以及孙经先同志对全书做了仔细的审校。

这本习题解答集对普通高等工科院校的大学生，以及电视大学、函授大学和其他业余大学的学生同样适用，对自学者也会有很大帮助。

本书编审过程中出现的某些误解、差错，恳请指正，不胜感谢。

1985年6月

目　录

第九章 微分方程

§1. 解的检验·曲线族的微分方程的组成·初始条件

1°基本概念　　具有形式

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \qquad (1)$$

的方程是n阶常微分方程，其中$y=y(x)$是未知函数。能够使方程(1)成为恒等式的任何函数$y=\varphi(x)$，都为此方程的解。方程(1)的解的图形，为方程(1)的积分曲线。如果解以隐式$\phi(x,y)=0$给出，则通常把它称为方程(1)的积分。

微分方程(1)的积分中一般都含有能够任意选择的常数。包含n个独立的任意常数$C_1,\cdots,C_n$,并且在给定区域中与方程(1)等价的微分方程(1)的积分

$$\phi(x,y,C_1,\cdots,C_n)=0 \qquad (2)$$

称为方程(1)在相应区域中的通积分。在(2)式中对常数$C_1,\cdots,C_n$给以某些确定的数值，便得方程(1)的特积分。在几何上，(2)式构成了一个以$C_1,\cdots,C_n$为参数的曲线族。

有了曲线族(2)，则由方程组

$$\phi=0, \quad \frac{d\phi}{dx}=0,\cdots,\frac{d^n\phi}{dx^n}=0$$

消去参数$C_1,\cdots,C_n$，就可以得到形如(1)的微分方程，该微分方程在相应区域中的通积分就是关系式(2)。

2°初始条件　　设微分方程为

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}), \qquad (3)$$

其中函数f在点$(x_0,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)})$的某一邻域内有定义。如果

对方程(3)所要求的特解$y=y(x)$，给定了初始条件（柯西问题）

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

并且已知方程(3)的通解为

$$y=\varphi(x,C_1,\cdots,C_n),$$

那么常数$C_1,\cdots,C_n$由方程组

$$\begin{cases} y_0=\varphi(x_0,C_1,\cdots,C_n), \\ y_0'=\varphi'(x_0,C_1,\cdots,C_n), \\ \cdots\cdots \\ y_0^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x_0,C_1,\cdots,C_n) \end{cases}$$

确定。

说明下列指定函数是否为已给微分方程的解：

2704. $xy'=2y$，$y=5x^2$.

解 因为

$$xy'=x\cdot(5x^2)'=10x^2\equiv 2y,$$

所以 $y=5x^2$是微分方程的解。

2705. $y''=x^2+y^2$，$y=\frac{1}{x}$.

解 因为

$$y''=\left(\frac{1}{x}\right)''=\frac{2}{x^3},\ x^2+y^2=x^2+\frac{1}{x^2},$$

即对 $y=\frac{1}{x}$，$y''\neq x^2+y^2$，所以$y=\frac{1}{x}$不是该微分方程的解。

2706. $(x+y)dx+xdy=0$，$y=\frac{C^2-x^2}{2x}$.

解 因为

$$(x+y)dx+xdy=\left(x+\frac{C^2-x^2}{2x}\right)dx$$

$$-\frac{x}{2}\left(\frac{C^2}{x^2}+1\right)dx$$

$$=\frac{x^2+C^2}{2x}dx-\frac{x^2+C^2}{2x}dx\equiv 0,$$

所以$y=\dfrac{C^2-x^2}{2x}$是该微分方程的解。

2707. $y''+y=0$，$y=3\sin x-4\cos x$。

解 因为

$$y''+y=(-3\sin x+4\cos x)+(3\sin x-4\cos x)\equiv 0.$$

所以$y=3\sin x-4\cos x$是该微分方程的解。

2708. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+w^2x=0$，$x=C_1\cos wt+C_2\sin wt$。

解 因为

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+w^2x&=-w^2(C_1\cos wt+C_2\sin wt)\\&\quad+w^2(C_1\cos wt+C_2\sin wt)\\&\equiv 0,\end{aligned}$$

所以$x=C_1\cos wt+C_2\sin wt$是该微分方程的解。

2709. $y''-2y'+y=0$，

1）$y=xe^x$；2）$y=x^2e^x$。

解 1）由$y'=e^x(1+x)$，$y''=e^x(2+x)$知

$$y''-2y'+y=e^x(2+x)-2e^x(1+x)+xe^x\equiv 0,$$

所以$y=xe^x$是该微分方程的解。

2）由$y'=e^x(2x+x^2)$，$y''=e^x(2+4x+x^2)$知

$$y''-2y'+y=e^x(2+4x+x^2)-2e^x(2x+x^2)$$

$$+x^2e^x$$

$=e^x(2+0)\neq 0$,

所以$y=x^2e^x$不是该方程的解。

2710. $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=0$,

$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$.

解 因为

$$\begin{aligned}&y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y\\&=(C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2^2e^{\lambda_2 x})-(\lambda_1+\lambda_2)(C_1\lambda_1e^{\lambda_1 x}\\&\qquad+C_2\lambda_2e^{\lambda_2 x})+\lambda_1\lambda_2(C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x})\\&\equiv 0,\end{aligned}$$

所以，$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$是该微分方程的解。

对于下列已给微分方程，证明指定的关系式是它的积分：

2711. $(x-2y)y'=2x-y$, $x^2-xy+y^2=C^2$.

证 对$x^2-xy+y^2=C^2$求导，得

$$2x-xy'-y+2yy'=0,$$

即
$$(x-2y)y'=2x-y,$$

所以，$x^2-xy+y^2=C^2$是该方程的积分。

2712. $(x-y+1)y'=1$, $y=x+Ce^y$.

证 对$y=x+Ce^y$求导，有

$$y'=\frac{1}{1-Ce^y},$$

因此 $(x-y+1)y'=(x-x-Ce^y+1)\dfrac{1}{1-Ce^y}\equiv 1$,

故$y=x+Ce^y$是该微分方程的积分。

2713. $(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0, y=\ln(xy)$.

证 对$y=\ln(xy)$求两次导，有

$$y'=\frac{y}{x(y-1)},\quad y''=-\frac{y(2-2y+y^2)}{x^2(y-1)^3},$$

因此 $(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'$

$$=-x(y-1)\frac{y(2-2y+y^2)}{x^2(y-1)^3}+x\frac{y^2}{x^2(y-1)^2}$$

$$+\frac{y^2}{x(y-1)}-\frac{2y}{x(y-1)}\equiv 0$$

于是$y=\ln(xy)$是该微分方程的积分。

试组成下列已给曲线族的微分方程（C，C_1,C_2，C_3是任意常数）：

2714. $y=Cx$。

解 对$y=Cx$求导，有$y'=C$。

由$y=Cx$及$y'=C$消去参数C，得所求的微分方程

$$y'=\frac{y}{x}，\text{即}y-xy'=0.$$

2715. $y=Cx^2$。

解 将已给函数求导，有$y'=2Cx$。

由$y=Cx^2$及$y'=2Cx$消去参数C，得所求的微分方程

$$xy'-2y=0.$$

2716. $y^2=2Cx$。

解 对$y^2=2Cx$求导，有$y'=\frac{C}{y}$。

由$y^2=2Cx$及$y'=\frac{C}{y}$消去参数C，得所求的微分方程

$$y-2xy'=0.$$

2717. $x^2+y^2=C^2$.

解 将$x^2+y^2=C^2$求导，即得所求微分方程为

$$x+yy'=0\text{或}xdx+ydy=0.$$

2718. $y=Ce^x$.

解 将$y=Ce^x$求导，有

$$y'=Ce^x.$$

消去参数c，得所求的微分方程

$$y'=y.$$

2719. $x^3=C(x^2-y^2)$.

解 将$x^3=C(x^2-y^2)$求导，有

$$3x^2=C(2x-2yy').$$

消去参数C，得所求的微分方程为

$$3y^2-x^2=2xyy'.$$

2720. $y^2+\frac{1}{x}=2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}$.

解 对已给函数求导数，有

$$2yy'-\frac{1}{x^2}=Ce^{-\frac{y^2}{2}}(-yy').$$

消去参数C得所求的微分方程为

$$xyy'(xy^2+1)=1.$$

2721. $\ln\frac{x}{y}=1+ay$ （a是参数）

解 对已给函数求导，有

$$y-xy'=axyy'.$$

消去参数a得所求的微分方程为

$$y=xy'\ln\frac{x}{y'}.$$

2722. $(y-y_0)^2=2px$（y_0, p是参数）

解 现对已给函数求导两次，有

$$2(y-y_0)y'=2P,\quad 2y'^2+2(y-y_0)y''=0$$

由已给函数和上述两式消去P和y_0，得所求的微分方程为

$$2xy''+y'=0.$$

2723. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$.

解 将已给函数求导两次，得

$$y'=2C_1e^{2x}-C_2e^{-x},\quad y''=4C_1e^{2x}+C_2e^{-x}.$$

由已给函数及上两式消去参数C_1和C_2，得所求的微分方程为

$$y''-y'-2y=0.$$

2724. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

解 将已给函数求导两次，得

$$y'=-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x,$$

$$y''=-4C_1\cos 2x-4C_2\sin 2x.$$

由所给函数及上两式消去参数C_1、C_2，得所求的微分方程为

$$y''+4y=0.$$

2725. $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3$.

解 将已给函数求导三次，有

$$y'=C_1e^x+C_2e^x+C_2xe^x,$$

$$y''=(C_1+2C_2)e^x+C_2xe^x,$$

$$y\ =(C_1+3C_2)e^x+C_2xe^x.$$

由原已给函数及上三式消去参数C_1、C_2、C_3，得所求的微分方程为

$$y'''-2y''+y'=0.$$

2726．试组成xoy平面上所有直线的微分方程．

解 xoy平面上所有直线可表示为

$$y=kx+b,$$

这里以斜率k及截距b作为参数，对该式求导两次，有

$$y'=k，\ y''=0\ .$$

消去参数k、b，得所求的微分方程为

$$y''=0\ .$$

2727．试组成xoy平面上具有铅直轴的所有抛物线的微分方程．

解 xoy平面上具有铅直轴的所有抛物线可表示为

$$(x-x_0)^2=2P(y-y_0),$$

其中x_0，y_0及p视为参数，求导三次，有

$$y'=\frac{x-x_0}{p}，\ y''=\frac{1}{p}，\ y'''=0\ .$$

得所求的微分方程为

$$y'''=0\ .$$

2728．试组成xoy平面上所有圆的微分方程．

解 xoy平面上所有圆可表示为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2,$$

其中x_0，y_0及R视为参数，求导三次，有

$$(x-x_0)+(y-y_0)y'=0,$$

$$1+y'^2+(y-y_0)y''=0,$$

$$3y'y''+(y-y_0)y'''=0.$$

消去参数，得所求的微分方程为

$$(1+y'^2)y'''-3y'y''^2=0.$$

对下列已给曲线族，求满足给定初始条件的曲线：

2729. $x^2-y^2=C$，$y(0)=5$.

解 在$x^2-y^2=C$中，令$x=0$，并利用$y(0)=5$，有

$$-25=C.$$

于是所求的曲线为

$$y^2-x^2=25.$$

2730. $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$，$y(0)=0, y'(0)=1$.

解 $y'=C_2e^{2x}+2(C_1+C_2x)e^{2x}$,

由$y(0)=0$及$y'(0)=1$，有

$$C_1=0,\ C_2=1.$$

于是所求的曲线为

$$y=xe^{2x}.$$

2731. $y=C_1\sin(x-C_2)$，$y(\pi)=1$，$y'(\pi)=0$.

解 $y'=C_1\cos(x-C_2)$,

由$y(\pi)=1$及$y'(\pi)=0$，得

$$\begin{cases}C_1\sin(\pi-C_2)=1,\\ C_1\cos(\pi-C_2)=0.\end{cases}$$

显然$C_1\neq 0$，因而可求出$C_1=1$，$C_2=\frac{\pi}{2}$，故所求的函数为

$$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x.$$

2732. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+C_3e^{2x}$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$，$y''(0)=-2$.

解 $y'=-C_1e^{-x}+C_2e^{x}+2C_3e^{2x}$,

$y''=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+4C_3e^{2x}$.

将初始条件代入，有

$$\begin{cases} C_1+C_2+C_3=0, \\ -C_1+C_2+2C_3=1, \\ C_1+C_2+4C_3=-2. \end{cases}$$

解联立方程得

$$C_1=-\frac{5}{6},\ C_2=\frac{3}{2},\ C_3=-\frac{2}{3}.$$

于是所求的函数为

$$y=\frac{1}{6}(-5e^{-x}+9e^{x}-4e^{2x}).$$

§2. 一阶微分方程

1°一阶微分方程的形式 如果一阶微分方程已就未知函数 y 的导数y'解出，则其形式为

$$y'=f(x,y), \tag{1}$$

其中$f(x,y)$是已知函数.有时,把变量x看作未知函数，而把方程(1)改写成

$$x'=g(x,y) \tag{1'}$$

的形式是方便的，其中$g(x,\ y)=\dfrac{1}{f(x,y)}$.

微分方程(1)和(1′)也可以改写成对称的形式

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{2}$$

其中$P(x,y)$，$Q(x,y)$都是已知函数.

满足方程(2)的形如$y=\varphi(x)$或$x=\psi(y)$的函数为方程(2)的解.方程(2)〔同样地，方程(1)或(1′)〕的通积分，具有$\phi(x,y,C)=0$形式，其中C是任意常数.

2°方向场 满足

$$\mathrm{tg}\alpha=f(x,y)$$

的方向的集合为微分方程(1)的方向场，通常用倾斜角为α的线族或

箭头族表示。

每一点处场的倾斜度都等于常数k的曲线称为等斜线. 在最简单情形中，当画出了等斜线和方向场后，就可以近似地描绘出积分曲线族，只要把后者看成是在其上每一点处都具有给定场的方向的曲线.

3°柯西定理 如果函数$f(x, y)$在某一区域U $\{a<x<A, b<y<B\}$内连续，并且在该区域内具有有界的导数$f_y'(x,y)$，则通过U内的每一点(x_0,y_0)，都有并且只有方程(1)的一条积分曲线$y=\varphi(x)$.

4°欧拉折线法 为了近似地画出方程(1)通过给定点$M_0(x_0,y_0)$的积分曲线，可以用顶点为$M_i(x_i,y_i)$的折线代替这条曲线，其中

$$x_{i+1}=x_i+\Delta x_i,\quad y_{i+1}=y_i+\Delta y_i,$$

$$\Delta x_i=h(\text{步长});$$

$$\Delta y_i=hf(x_i,\ y_i)\quad (i=0,1,2,\cdots).$$

用斜线法近似地画出下列指定微分方程的积分曲线族:

2733. $y'=-x$.

解 作出等斜线$-x=k$和方向场（图9·1），就近似得

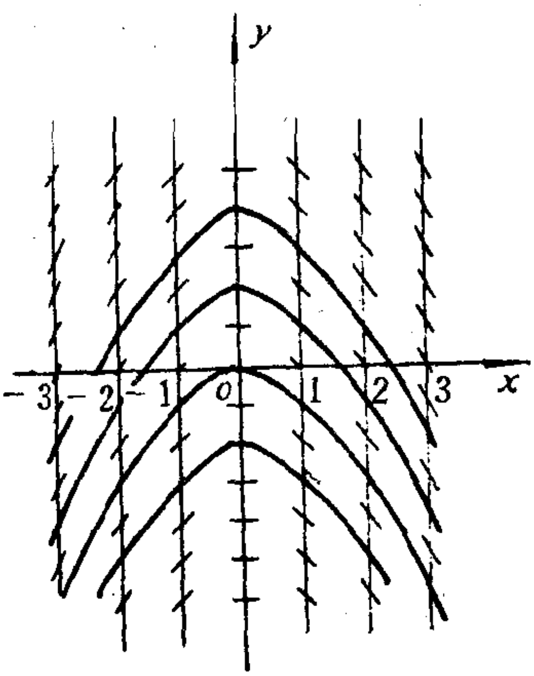

图9·1

到积分曲线族，通解是抛物线族

$$y=-\frac{x^2}{2}+C.$$

2734. $y'=-\frac{x}{y}$

解 作出等斜线$-\frac{x}{y}=k$和方向场（图9·2），就近似得到积分曲线族，通解是圆族

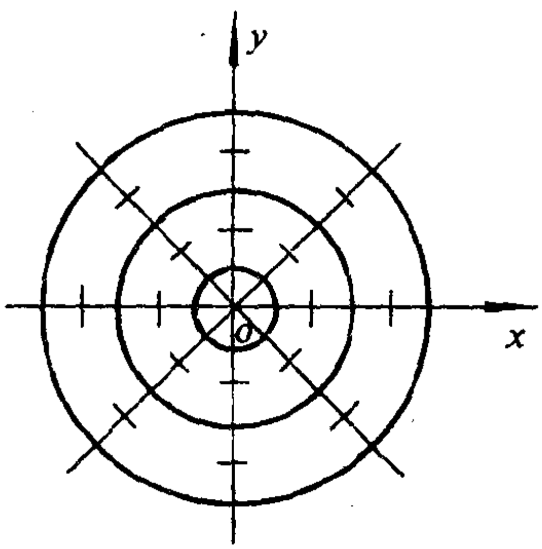

图9·2

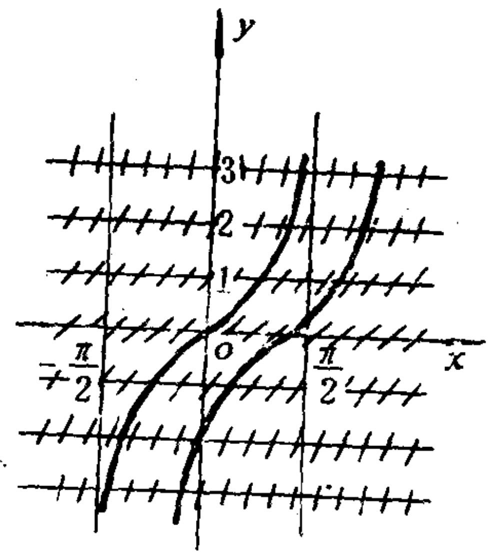

图9·3

$$x^2+y^2=C^2.$$

2735. $y'=1+y^2$.

解 作出等斜线$1+y^2=k'$，即$y=k$和方向场（图9·3），就近似得到积分曲线族，通解是曲线族

$$y=\mathrm{tg}(x+C).$$