微积分题解

第一卷

[德] W. 戴根　K. 包美尔编
秦　裕　瑗　译

人民教育出版社

微积分题解

第一卷

[德] W.戴 根
K.包美尔 编

秦 裕 瑗 译

人民教育出版社

此书曾为西德卡尔斯儒大学用书. 内容是对微积分的习题，补充典型的解题方法，提供解题要领. 本书第一卷共有基本概念，数列与级数，连续性，初等函数，微分法，积分法的题解一百道，可供大学理科数学专业师生参考.

微积分题解

第一卷

〔德〕W. 戴根 K. 包美尔 编

秦裕瑗 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

山东新华印刷厂印装

*

开本787×1092 1/32 印张5.625 字数132,000

1981年1月第1版 1981年9月第1次印刷

印数 00,001—33,000

书号 13012·0557 定价 0.43 元

前　　言

这本微积分I与II的习题集是——除了微小变动——为66～67年冬季学期与67年夏季学期的新生在卡尔斯儒大学的同名课程准备的. 习题的解答都写在本卷与下一卷中. 作者们是该分析课程的当时的讲师和习题课的领导人. 学生们对补充典型的解题方法表示出很大的兴趣. 这使我们感到缺少一本详细讨论且完整解算的题解. 我们希望，这本有解答的习题集能够向做类似习题的读者提供一些解题要点. 为此，一方面，介绍了一些解数学问题的方法，另一方面，为从抽象的结构到具体的问题提供了一个“阶梯”.

向所有参加者对他们不倦的帮助致以谢意.

W. 戴　根

K. 包美尔 1970 年 11 月

于斯徒加特与卡尔斯儒

目　　次

第一章 基本概念

问题1:

设 φ: $A\to B$ 与 λ: $B\to C$ 是给定的映射. 试证: 若 φ 与 λ 是满映射, 或是可逆的, 或是双侧映射, 那末 $\lambda\circ\varphi$ 也是的. 若 φ 与 λ 是双侧映射, 那末 $\varphi^{-1}\circ\lambda^{-1}$ 是 $\lambda\circ\varphi$ 的逆映射.

解:

a) $\lambda\circ\varphi$ 的满映射性: 设有任意的 $z\in C$, 那末存在 $y\in B$, 使得 $\lambda(y)=z$, 因为 λ 是满映射. 对于 y, 存在 $x\in A$, 使得 $\varphi(x)=y$, 因为 φ 是满映射. 于是有 $\lambda(\varphi(x))=z$, 又因为假设 z 是任意的, C 的每一个元素(至少)有一个关于映射 $\lambda\circ\varphi$ 的原象 $x\in A$.

b) $\lambda\circ\varphi$ 的可逆性: $\lambda\circ\varphi(x_1)=\lambda\circ\varphi(x_2)$, 按 $\lambda\circ\varphi$ 的定义, 等价于 $\lambda(\varphi(x_1))=\lambda(\varphi(x_2))$, 又因为 λ 是可逆的, 于是 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$. 因为 φ 也是可逆的, 于是 $x_1=x_2$; 所以 $\lambda\circ\varphi$ 是可逆的.

c) 如果 φ 与 λ 是双侧映射, $\lambda\circ\varphi$ 的双侧性, 按照它的定义, 由 a) 与 b) 可以推得.

d) 对于每一个 $x\in A$ 及 $z=\lambda\circ\varphi(x)$, 就有 $\varphi^{-1}\circ\lambda^{-1}(z)=\varphi^{-1}(\lambda^{-1}(\lambda(\varphi(x))))=x$, 于是, $\varphi^{-1}\circ\lambda^{-1}$ 按 c) 是存在的, 且与 $\lambda\circ\varphi$ 的逆映射相一致.

问题2:

设 φ: $A\to B$ 是一个映射, 对于子集合 $A'\subset A$ 与 $B'\subset B$, 定义 $\varphi(A')=\{y\in B\,|\,y=\varphi(x), x\in A'\}$, $\varphi^{-1}(B')=\{x\in A\,|\,\varphi(x)\in B'\}$. 试证: a) 对于 $A', A''\subset A$ 有 $\varphi(A'\cap A'')\subset\varphi(A')\cap\varphi(A'')$,

对于 $B', B''\subset B$ 有 $\varphi^{-1}(B'\cap B'')=\varphi^{-1}(B')\cap\varphi^{-1}(B'')$.

b) 以下说法是等价的:

1. φ是可逆的，

2. 对于每一对子集合 $A', A''\subset A$, 有

$$\varphi(A'\cap A'')=\varphi(A')\cap\varphi(A'')$$

3. 对于每一对子集合 $A', A''\subset A$, 且 $A'\cap A''=\varnothing$

有 $$\varphi(A')\cap\varphi(A'')=\varnothing.$$

解:

a)$_1$: $y\in\varphi(A'\cap A'')$是指：存在一个$x\in A'\cap A''$, 使得$\varphi(x)=y$. 由于 $x\in A'$, 有 $y\in\varphi(A')$, 又由于 $x\in A''$, 有 $y\in\varphi(A'')$, 所以 $y\in\varphi(A')\cap\varphi(A'')$.

a)$_2$: 按照φ^{-1}的定义（对于非可逆映射，也有），$x\in\varphi^{-1}(B'\cap B'')$与$\varphi(x)\in B'\cap B''$等价. 后一个关系的意义等于$\varphi(x)\in B'$与$\varphi(x)\in B''$. 对于这对关系，一个等价的写法是$x\in\varphi^{-1}(B')$与$x\in\varphi^{-1}(B'')$, 即$x\in\varphi^{-1}(B')\cap\varphi^{-1}(B'')$. 这就是说，集合$\varphi^{-1}(B'\cap B'')$与$\varphi^{-1}(B')\cap\varphi^{-1}(B'')$是相等的.

b) $1\Rightarrow2$: 如果说法 2 不成立，那末(由$a)_1$)就要存在一个y, 使得 $y\in\varphi(A')\cap\varphi(A'')$与$y\notin\varphi(A'\cap A'')$. 第一个关系表明，在$A'$与$A''$中，$y$各存在一个原象：$\varphi(x')=\varphi(x'')=y, x'\in A'$, $x''\in A''$; 而由第二个关系式，得到$x'\neq x''$. 这就与φ的可逆性相矛盾，这就是说，说法 2 是正确的.

$2\Rightarrow3$: 按照 2，有$\varphi(A')\cap\varphi(A'')=\varphi(A'\cap A'')$, 又按照假设，有$A'\cap A''=\varnothing$, 再有$\varphi(\varnothing)=\varnothing$. 如果利用这两个关系式，就得到 3.

$3\Rightarrow1$: 设$\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$; 要证明的是：在假设 3 之下推得$x_1=x_2$.（可逆性的定义）. 逻辑推断“$\varphi(x_1)=\varphi(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$”等价于“$x_1\neq x_2\Rightarrow\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$”. 我们来证明这后一个说法：如果在假设 3 中选取$A'=\{x_1\}, A''=\{x_2\}$, 那末由于$x_1\neq x_2$有$A'\cap A''=\varnothing$, 所以推得

$$\varphi(A')\cap\varphi(A'')=\{\varphi(x_1)\}\cap\{\varphi(x_2)\}=\varnothing,$$

就是说，$\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$.

如此，所有三个说法的等价性就证得了.

问题3:

试验证下列关系是否自返的、对称的、传递的或者泛函的. 这里，一个关系 $R\subset M\times M$ 叫做是泛函的，如果

1. $\forall a\in M, \exists b\in M$: $(a,b)\in R$,

2. $\forall a\in M$: $[(a,b)\in R\wedge(a,c)\in R]\Rightarrow b=c$.

在下列例中，总是设 R 是集合 M 与自己的笛卡尔积的子集合.

a) 给定一个集合 M 及一个子集合 $A\subset M$, $A\neq M$; $R=\{(x,y)\mid x\in A\}$.

b) 设 M 是一个固定集合 $\overline{M}$ 的子集合 A, B, C, …所成的族; $R=\{(A,B)\mid A\cap B\neq\varnothing\}$.

c) M 如 *b*) 中所述. $R=\{(A,\ B)\mid A\backslash B=\{x\}$, 对于恰好一个 $x\in A\}$.

d) 设 M 是自然数集合: $R=\{(n,m)\mid 6\mid(n-m)\}$

e) M 如 *d*) 所述. $R=\{(n,\ m)\mid m\mid n\wedge(\forall p\in\mathbf{N}:\ (p\mid n\Rightarrow p\leqslant m))\}$. 给定的那些关系把 M 分成等价类? 指出这些关系以及所属的等价类.

解:

a) $R=\{(x,y)\mid x\in A\}$ 不是自返的，因为对于 $x\notin A$(这样的 x 是存在的，因为 $A\neq M$), $(x,x)\notin R$. 如果 $A\neq\varnothing$, 它也不是对称的，因为对于 $x\in A$, $y\notin A$, 虽然 $(x,\ y)\in R$, 但是 $(y,\ x)\in R$ 不成立. (如果 $A=\varnothing$, 也有 $R=\varnothing$, 那末关系是对称的). R 是传递的，因为由 $(x,y)\in R$, $(y,z)\in R$(甚至没有第二个条件，也)得到 $(x,\ z)\in R$. R 不是泛函的，因为对于 $x\notin A$, 不存在一个 y, 使得有 $(x,y)\in R$.

b）因为M含有零集合（即空集合）$\varnothing$ 作为它的元素，又$\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$，所以$R$不是自返的．$R$是对称的，因为它是交映射．只要$\overline{M}$至少含有两个元素，$R$就不是传递的，像下面的例所表明的：$A=\{a\}, B=\{a, b\}, C=\{b\}, a \neq b$．（当$\overline{M}$至多含有一个元素时，$R$是传递的．）

c）由于$A \backslash A=\varnothing$，所以$R$不是自返的．若$M=\varnothing$，则也有$R=\varnothing$，就是说，$R$是对称的．若$M \neq \varnothing$，那末可以选取$A=\{x\}$，$x \in M$及$B=\varnothing$，就有$A \backslash B=\{x\}$，所以$(A, B) \in R$，然而$B \backslash A=\varnothing$，于是$(B, A) \notin R$；所以当$M \neq \varnothing$时，$R$不是对称的．$R$也不是泛函的，因为当$A=\varnothing$，不存在一个$B$，使得$A \backslash B$恰好由一个元素所组成．

d）R是自返的，且是对称的，因为6是$n-n=0$的因数，而且当6是$n-m$的因数时，它是$m-n=-(n-m)$的因数．R是传递的．由$(n, m) \in R$及$(m, p) \in R$，得$n-m$与$m-p$可以被6除尽；所以它们的和$n-m+m-p=n-p$也可以被6除尽，即$(n, p) \in R$．R不是泛函的，因为，例如，对于每一个$p \in N$，有$(1, 6p+1) \in R$，而第二个数$6p+1$就不是由第一个唯一确定的．

e）若$(n, m) \in R$，那末m是n的一个因数，而n的每一个因数p都有性质$p \leqslant n$．所以m是n的最大因数，所以$m=n$．这就是说，R是相等关系，并具有所有四个性质．

补充问题： 等价关系是具有自返、对称与传递性的关系．所以，例d)与e)是等价关系．在例d)中，恰好有6类，即$k_r=\{n \mid n=6p+r, p \in N\}$，其中$r$是一个介于零与5（两者都包括在内）之间的一个整数．（这些类叫做“模6的剩余类”）．在例e)中，每一类只由一个唯一的元素$k_n=\{n\}$所组成．

问题 4:

试证：若$R \subset M \times M$是一个泛函等价关系，那末有$R=$

$\{(x,x)\,|\,x\in M\}$，即关系集合含有诸严格相等的(恒等的)元素.

解:

设 R 是在一个非空集合 M 上的一个泛函等价关系，且 $(a, b)\in R$. 于是，由于自返性，有 $(a, a)\in R$，又由于泛函性，有 $a=b$，这就是说，R 是相等关系.

注记：甚至可以证明：一个自返且泛函的关系是相等关系.

问题 5:

给定 80 个有同样的货币本位与同样币值的硬币. 据称，有一个硬币是假的，它比别的轻. 试在一个天平上通过秤四次确定出这个伪币.

解:

把 80 个硬币分成含 27 个的两组和含 26 个的一组. 秤含 27 个硬币的两组，如果一样重，那末伪币就要在余下的 26 个中寻找. 如果含 27 个硬币的两组不一样重，那末伪币就在含 27 个的较轻的一组里面. 在第一种情形，从含 27 个的一组中任取一个硬币，它肯定是一个真币，把它加到含 26 个硬币的一组中去. 把这样选出的 27 个硬币分成三组，每一组 9 个. 第二次过秤，再次找出有伪币的含 9 个硬币的一组.（两个过秤了的含 9 个的组或者是重量相等，那末没有过秤的一组含有伪币，或者两个过秤了的组重量不等，那末较轻的含有伪币.）

把这 9 个硬币三等分之后，通过第三次过秤，确定有伪币的、含三个硬币的组. 然后，第四次过秤，就最终确定出伪币来.

问题 6:

设 (X_i)，$1\leqslant i\leqslant n$，是一个含有限多个集合的族. 对于一个子集合 $H\subset\{1, 2, \cdots, n\}$，设

$$V_H=\bigcup_{i\in H}X_i \text{ 与 } D_H=\bigcap_{i\in H}X_i.$$

设$\mathscr{F}_k$是$\{1, 2, \cdots, n\}$的含有k个元素的一切子集合H组成的族. 试证:

当$2k\leqslant n+1$时，$\bigcup_{H\in\mathscr{F}_k}D_H\supset\bigcap_{H\in\mathscr{F}_k}V_H$,

当$2k\geqslant n+1$时，$\bigcup_{H\in\mathscr{F}_k}D_H\subset\bigcap_{H\in\mathscr{F}_k}V_H$.

解:

首先研究陈述$x\in\bigcup_{H\in\mathscr{F}_k}D_H$与$x\in\bigcap_{H\in\mathscr{F}_k}V_H$.

$x\in\bigcap_{H\in\mathscr{F}_k}V_H$成立，当且仅当$x$含在每一个$V_H$内，而$H\in\mathscr{F}_k$, 即, 至多有$k-1$个不含$x$的集合$X_i$.

$x\in\bigcup_{H\in\mathscr{F}_k}D_H$成立, 当且仅当有一个$D_H$含有$x$. 按照$D_H$的构造, 存在这样的$D_H$, 当且仅当至少有$k$个集合$X_i$含有元素$x$.

现在设$2k\leqslant n+1$, 且$x\in\bigcap_{H\in\mathscr{F}_k}V_H$. 按照我们前面的讨论，至多有$k-1$个$X_i$不含有$x$，所以至少有$n-(k-1)$个$X_i$含有$x$. 由$2k\leqslant n+1$, 有$n-(k-1)=n+1-k\geqslant k$. 这就是说，至少有$k$个集合$X_i$含有元素$x$, 即$x\in\bigcup_{H\in\mathscr{F}_k}D_H$.

设$2k\geqslant n+1$及$x\in\bigcup_{H\in\mathscr{F}_k}D_H$. 于是至少有$k$个集合$X_i$含有$x$, 这就是说，至多$n-k\leqslant k-1$个集合$X_i$不含有$x$, 即$x\in\bigcap_{H\in\mathscr{F}_k}V_H$.

问题 7:

自然数的乘法是一个具有下列性质的映射$\cdot$: $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$:

1) $\forall n\in\boldsymbol{N}$: $n\cdot 1=n$,

2) 设对于$k=1, 2, \cdots, m$, $n\cdot k$已经定义, 那末有

$$n\cdot(m+1)=n\cdot m+n\cdot 1.$$

试利用皮亚诺公理以及加法的结合律与交换律，证明

a）$n\cdot(m+k)=n\cdot m+n\cdot k$　　（分配律），

b）$(n\cdot m)\cdot k=n\cdot(m\cdot k)$　　（结合律）.

解:

要使用皮亚诺公理，加法的结合律(AA)与交换律(KA)，以及乘法定义：

($M1$) $\forall n\in\mathbf{N}$: $n\cdot 1=n$

($M2$)若对于 $k=1,\cdots,m$, $n\cdot k$ 已经定义，那末

$$n\cdot(m+1)=n\cdot m+n\cdot 1.$$

关于这样定义的乘法，其存在性与唯一性问题，这里就不讨论了．它们可以在存在性、唯一性的假设下与用($M1$)、($M2$)的性质推得.

a）要证明：$\forall n,m,k\in\mathbf{N}$: $n\cdot(m+k)=n\cdot m+n\cdot k$.

我们按以下规则定义 $\mathbf{N}$ 的一个子集合 K:

$K=\{k\in\mathbf{N}\mid\forall n,\ m\in N\colon n\cdot(m+k)=n\cdot m+n\cdot k\}$.

1. 断言：$1\in K$.

证明：按($M2$)，有 $\forall n,m\in\mathbf{N}$: $n\cdot(m+1)=n\cdot m+n\cdot 1$. 这就证明了断言.

2. 断言：$\forall p\in\mathbf{N}$: $p\in K\Rightarrow p+1\in K$.

证明：设 $p\in K$．于是有

(＊)　　$\forall n,m\in\mathbf{N}$: $n\cdot(m+p)=n\cdot m+n\cdot p$.

从而有　　$\forall n,\ m\in\mathbf{N}$: $n\cdot(m+(p+1))\overline{\overline{\ \ {}_{(AA)}\ \ }}\,n\cdot((m+p)+1)$

$\underset{(M2)}{=\!=}n\cdot(m+p)+n\cdot 1\underset{(*)}{=\!=}(n\cdot m+n\cdot p)+n\cdot 1\underset{(AA)}{=\!=}n\cdot m+(n\cdot p+n\cdot 1)$

$\underset{(M2)}{=\!=}n\cdot m+n\cdot(p+1)$.

这就证明了断言.

所以，归纳公理的假设对于集合 K 都是满足的. 于是得到 $K=\mathbf{N}$, 即 $\forall n, m, k\in\mathbf{N}$: $n\cdot(m+k)=n\cdot m+n\cdot k$,
这就证明了断言.

b）要证明 $\forall n, m, k\in\mathbf{N}$: $(n\cdot m)\cdot k=n\cdot(m\cdot k)$.

定义： $K=\{k\in\mathbf{N}\mid\forall n, m\in\mathbf{N}: (n\cdot m)\cdot k=n\cdot(m\cdot k)\}$.

1. 断言：$1\in K$.

证明： $\forall n, m\in\mathbf{N}$: $(n\cdot m)\cdot 1 \underset{(M1)}{=} n\cdot m \underset{(M1)}{=} n\cdot(m\cdot 1)$,
证毕.

2. 断言：$\forall p\in\mathbf{N}$: $p\in K\Rightarrow(p+1)\in K$.

证明：设 $p\in K$. 所以有

$$(*)\qquad \forall n, m\in\mathbf{N}: (n\cdot m)\cdot p=n\cdot(m\cdot p).$$

从而

$$\forall n, m\in\mathbf{N}: (n\cdot m)\cdot(p+1) \underset{(a)}{=} (n\cdot m)\cdot p+(n\cdot m)\cdot 1$$
$$\underset{(*)}{=} n\cdot(m\cdot p)+n\cdot(m\cdot 1) \underset{(a)}{=} n\cdot(m\cdot p+m\cdot 1) \underset{(a)}{=} n\cdot(m\cdot(p+1)),$$

证毕.

可以把归纳公理重新用到 K 上. 从而得到 $K=\mathbf{N}$, 就是说

$$\forall m, n, k\in\mathbf{N}: (n\cdot m)\cdot k=n\cdot(m\cdot k).$$

问题 8:

试描述下列由不等式定义的集合，并把它们分别表示在一个数轴上与一个直角笛卡尔十字架上:

a）$M=\{x\in\mathbf{R}\mid(x^2+x-2)(x-4)(-x-3)\geqslant 0\}$.

b）$M=\{(x, y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\mid(x+y>1)\wedge(x+2y<2)$
$\wedge(y+2x<2)\}$.

c）$M=\{(x, y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\mid |x-1|-|y-2|<5\}$.

d）$M=\{(x, y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\mid(x^2+y^2)^2-(2x+2y-1)^2\leqslant 0\}$.

解: *a*) $M=\{x\in\boldsymbol{R}\mid(x^2+x-2)(x-4)(-x-3)\geqslant 0\}$

$$=\{x\in\boldsymbol{R}\mid(x+2)(x-1)(x-4)(-x-3)\geqslant 0\}$$

$$=\{x\in\boldsymbol{R}\mid-(x+3)(x+2)(x-1)(x-4)\geqslant 0\}$$

$$=\{x\in\boldsymbol{R}\mid-(x+3)(x+2)(x-1)(x-4)\leqslant 0\}.$$

数 $-3,-2,1,4$ 把 $\boldsymbol{R}$ 分成几个子区间.就有以下完全分离的情形:

子区间	$x+3$	$x+2$	$x-1$	$x-4$	乘积
$x<-3$	<0	<0	<0	<0	>0
$-3\leqslant x\leqslant-2$	$\geqslant 0$	$\leqslant 0$	<0	<0	$\leqslant 0$
$-2<x<1$	>0	>0	<0	<0	>0
$1\leqslant x\leqslant 4$	>0	>0	$\geqslant 0$	$\leqslant 0$	$\leqslant 0$
$4<x$	>0	>0	>0	>0	>0

所以有

$$M=\{x\in\boldsymbol{R}\mid-3\leqslant x\leqslant-2\vee 1\leqslant x\leqslant 4\}$$

$$=\{x\in\boldsymbol{R}\mid-3\leqslant x\leqslant-2\}\cup\{x\in\boldsymbol{R}\mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$$

$$=[-3,-2]\cup[1,4].$$

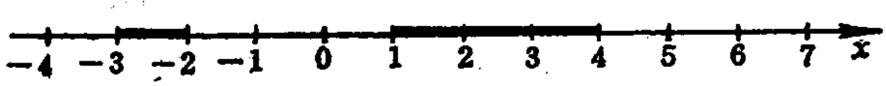

图 1 集合$\{x\in\boldsymbol{R}\mid(x^2+x-2)(x-4)(-x-3)\geqslant 0\}$

b) $M=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\mid(x+y>1)\wedge(x+2y<2)$

$\wedge(y+2x)<2)\}$.

作变形:

$x+y>1$	$x+2y<2$	$y+2x<2$
$y>-x+1$	$y<-\frac{1}{2}x+1$	$y<-2x+2$

$$M=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\mid y>-x+1\}$$

$$\cap\{(x,y)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\mid y<-\frac{1}{2}x+1\}\cap$$

$$\cap\{(x,y)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\mid y<-2x+2\}.$$

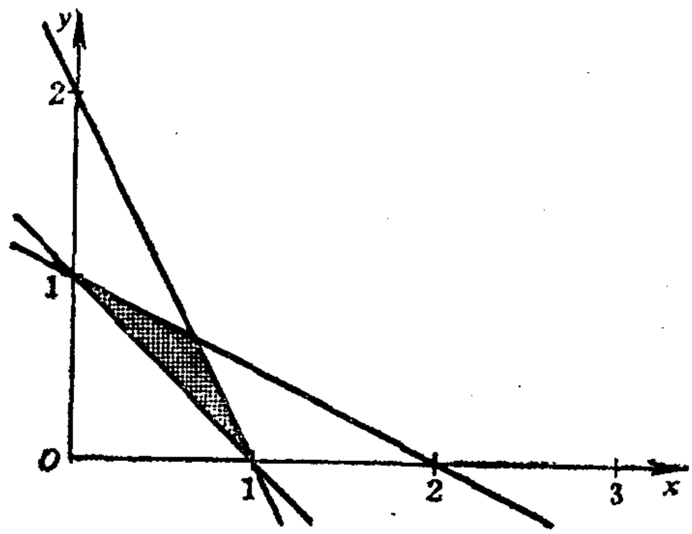

图 2　集合$\{(x,y)\in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R} \mid (x+y>1)\wedge(x+2y>2)\wedge(y+2x<2)\}$

c) $M=\{(x,\ y)\in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R} \mid |x-1|-|y-2|<5\}$. 引入变换 $x-1=\xi, y-2=\eta$ 就得到$(x,y)\in M$应满足的条件.

(*)
$$|\eta|>|\xi|-5,$$

这就是说，或者$|\xi|<5$而η为任意(因为条件(*)的右端是负的，所以条件(*)对每一个实数η都满足)，或者有$|\xi|\geqslant 5$而(*)表示一个真正的条件. 集合M在ξ-η坐标系的第一象限部分由

$$\xi\geqslant 0,\qquad \eta\geqslant 0\qquad \eta>\xi-5$$

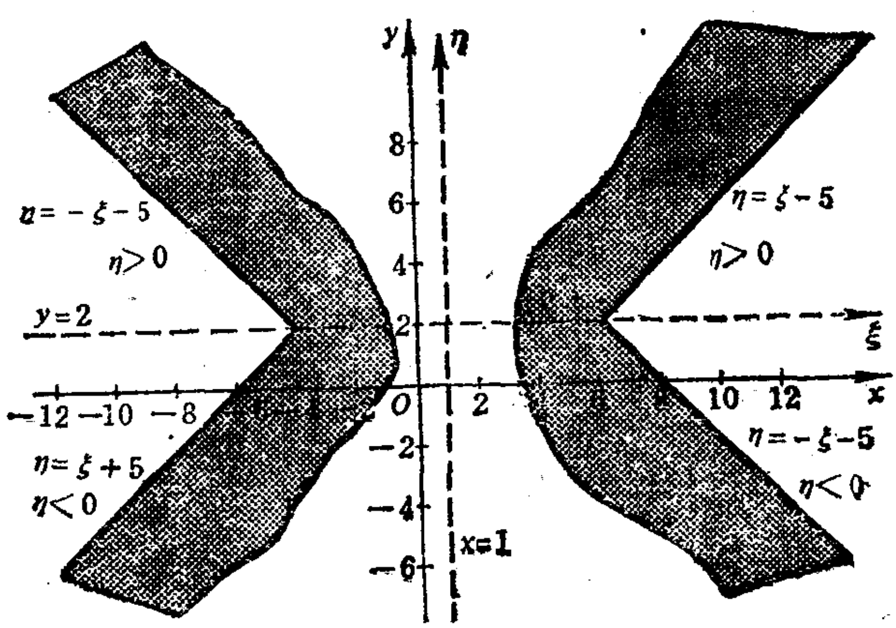

图 3　集合$\{(x,y)\in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R} \mid |x-1|-|y-2|<5\}$

来定义，就是说，这部分是由η的正半轴、在ξ-轴上的线段$0\leqslant\xi<5, \eta=0$以及半直线$\eta=\xi-5, \xi\geqslant5$所围成，其中最先讲的两个边界部分属于集合，可是后面讲的不算在内. 其余部分由这通过对ξ-轴、η-轴以及对这坐标系的原点的镜面映射而得到.

d) $M=\{(x, y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\mid(x^2+y^2)^2-(2x+2y-1)^2\leqslant0\}$.

条件$(x^2+y^2)^2-(2x+2y-1)^2\leqslant0$ 等价于

$$(*)\qquad x^2+y^2\leqslant|2x+2y-1|.$$

分两个情况来讨论:

I) $2x+2y-1\geqslant0$ 即$y\geqslant\frac{1}{2}-x$,

所以(*)有: $x^2+y^2\leqslant2x+2y-1$

或

$$(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant1.$$

这个不等式表示中心为$(1, 1)$而半径为1的整个圆面. 所有这些点也都自动满足附加条件$y\geqslant\frac{1}{2}-x$.

II) $2x+2y-1\leqslant0$ 即$y\leqslant\frac{1}{2}-x$

所以(*)有: $x^2+y^2\leqslant-(2x+2y-1)$

或

$$(x+1)^2+(y+1)^2\leqslant3.$$

这个不等式表示中心为$(-1, -1)$而半径为$\sqrt{3}$的整个圆面. 所有这些点也都自动满足附加条件 $y\leqslant\frac{1}{2}-x$, 因为直线$y=\frac{1}{2}-x$上离圆心$(-1, -1)$ 最近的点是$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, 它离圆心的距离是$\frac{5}{4}\sqrt{2}>\sqrt{3}$.

集合M由这两个圆面的并所组成.

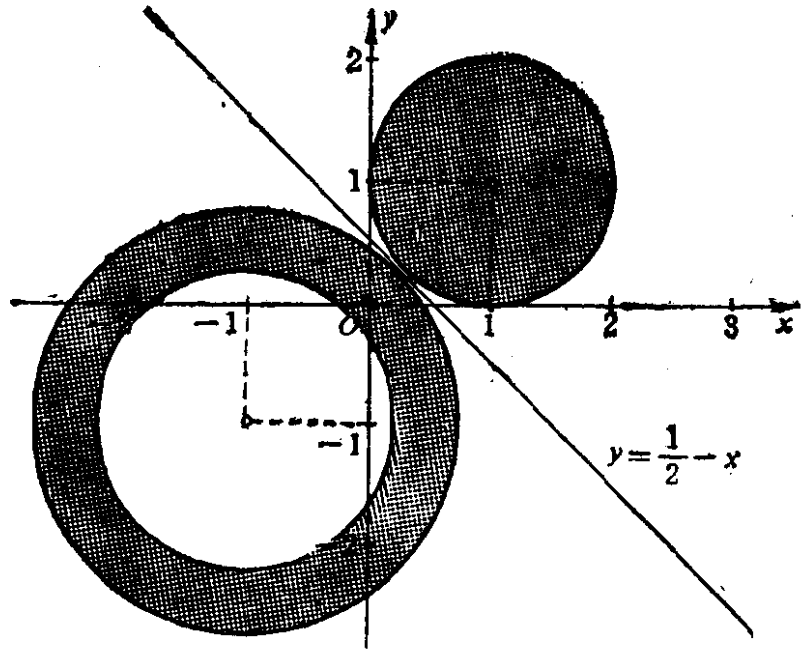

图 4　集合 $\{(x, y)\in R\times R \mid (x^2+y^2)^2-(2x+2y-1)^2\leqslant 0\}$ 是包括边界的两个圆

问题 9:

试证下列不等式:

a）对于 $h\geqslant -1$ 及一切自然数 n 有

$$(1+h)^n\geqslant 1+n\cdot h$$

(柏努利不等式).

b）对于一切实数 a_1, a_2, b_1, b_2, 有

$$(a_1b_1+a_2b_2)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$$

(柯西-许瓦兹不等式).

c）对于一切非负实数 a_1, a_2, 有

$$\frac{a_1+a_2}{2}\geqslant\sqrt{a_1\cdot a_2}$$

(算术-几何平均值不等式).

解:

a）用对 n 的完全归纳法来证明:

归纳初值: $(1+h)^1\geqslant 1+1\cdot h$ 是平凡地成立的.