高等学校试用教材

高等数学

下册

华南师范大学数学系《高等数学》编写组 编

高等教育出版社

高等学校试用教材

高等数学

(生物专业用)

下　　册

华南师范大学数学系《高等数学》编写组　编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书分上、下两册。下册内容为数理统计，以统计推断和方差分析为重点，并介绍了几种常用的非参数检验方法。书中联系生物和农业方面实例较多。每章后附有小结和习题，便于学习。

本书可供师范院校生物系作教材试用，也可供从事生物、农业科技工作人员学习参考。

高等学校试用教材
高等数学
（生物专业用）
下 册
华南师范大学数学系《高等数学》编写组 编
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
河北省香河县印刷厂印装
开本 850×1168 1/32 印张8.625 字数210 000
1988年6月第1版 1988年6月第1次印刷
印数 00001— 3,630
ISBN7-04-000033-4/O·17
定价1.60元

目 录

第二部分 数理统计

第二部分 数理统计

数理统计是一门关于数据资料的收集、整理、分析和推断的科学。数理统计的方法及考虑的问题不同于一般的资料统计，它更侧重于应用随机现象本身的规律性来考虑数据资料的收集、整理和分析，从而对所考察的问题作出推断、预测直至为采取决策及行动提供依据和建议。数理统计研究的内容随着科学技术与生产的不断发展而逐步扩大，其应用领域相当广泛，它已成为各种科学试验，包括生物科学试验与研究不可缺少的工具。本书共分五章，主要介绍数理统计的入门知识。第七章作为数理统计的基础介绍概率论的基本知识；第八章介绍数理统计的基本概念以及从样本推断总体的基本方法；第九、十、十一章介绍农业、生物科学试验和研究中常用的统计方法，主要是方差分析，试验设计，回归分析和非参数统计。

第七章 概 率

本章主要介绍与后面各章数理统计内容有关的概率论的基本概念与理论分布。

§7.1 事件、随机变量

7.1.1 随机试验

在自然界里，在日常生活以及生产实践中有许多偶然现象或

叫随机现象。例如“在一定条件下饲养10只小白鼠，它的成活数可能是0,1,2,…,10只”；“在一批产品中随意抽取一件，可能抽到合格品，也可能抽到不合格品”；“在相同试验条件下，各小区水稻试验田粘虫幼虫的条数不尽相同”等等。还可以举出很多这样的例子。观察这类随机现象，发现它们有一共同的特点：在一定条件下，有多种可能发生的结果，而每一种结果的发生与否事先无法准确地预言，带有一定的偶然性。观察一随机现象可以看作一个试验，一般地**把事先无法准确地预言其结果，而在相同条件下可以重复进行的试验称为随机试验**。上述，“在一定条件下，饲养10只小白鼠”和“在一批产品中随意抽取一件”等都是随机试验，而小白鼠的成活数以及合格品、不合格品分别是它们的可能结果。

7.1.2 事　　件

随机试验的结果称为随机事件，简称为事件。

例 1 从一批产品中抽取一件产品，则该产品“合格”或“不合格”就是两个事件。

例 2 研究某批水稻种子发芽的情况，则“有100粒发芽”，“全部发芽”，“有80%发芽”等都是事件。

例 3 测量某零件的长度的误差，则“误差不超过1毫米”就是一个事件。

通常用字母A、B、C… 表示事件。事件的一种极端情况就是在一定条件下必然发生或必然不发生。前者称为**必然事件**，记作Ω；后者称为**不可能事件**，记作$\varnothing$。

有些事件在一定条件下是不能再进行分解的，我们称它们为**基本事件**。例如取100粒种子作发芽试验，研究发芽数时，则“有1粒发芽”，“有2粒发芽”，…，“有100粒发芽”等，便是基本事件，因为它们不可以再进行分解。而“发芽数不多于

10粒”，就不是基本事件，因为它由“有1粒发芽”，“有2粒发芽”，…，“有10粒发芽”等所组成，即它是可以分解的。由此可知，事件是由基本事件组成的。

7.1.3 事件的运算

1. 事件 A 与事件 B 至少有一发生而构成的事件称为事件 A 与事件 B 的和，以 $A+B$（或 $A\cup B$）表示。

例如在例2中，设“发芽数不超过60%”为事件 A，“有60—80%发芽”为事件 B；“发芽数不超过80%”为事件 C，则事件 C 就是事件 A 与事件 B 的和。

类似地，几个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生而构成的事件称为事件 $A_1, \cdots, A_n$ 之和，以 $A_1+\cdots+A_n\left(\text{或}\sum\limits_{i=1}^{n} A_i, \text{或}\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)$ 表示。

2. 事件 A 发生而事件 B 不发生所构成的事件称为事件 A 与事件 B 的差，记作 $A-B$（或 $A\backslash B$）。

例如有一批种子，设“20—40%的种子发芽”为事件 A，“30%以上的种子发芽”为事件 B，“20—30%的种子发芽”为事件 C，则事件 C 便是 A 与 B 的差。

3. 两个事件 A 与 B 同时发生所构成的事件称为事件 A 与事件 B 的积，以 AB（或 $A\cap B$）表示。

例如从 $1,2,\cdots,10$ 十个数字中任取一个，令事件 A 表示“所取之数为奇数”，事件 B 表示“所取之数能被3整除”，事件 C 表示“所取之数是能被3整除之奇数”，则事件 C 便是事件 A 与 B 之积。

类似地，n 个事件 $A_1, \cdots, A_n$ 同时发生而构成的事件称为事件 $A_1, \cdots, A_n$ 的积，以 $A_1A_2\cdots A_n\left(\text{或}\prod\limits_{i=1}^{n} A_i, \text{或}\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right)$ 表示。

4. 两个事件 A 与 B 如果不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A 和 B 为互斥事件(不相容事件)。

例如从 1,2,…,10 十个数字中任意抽取一个，“抽到小于 3 的数”为事件 A,“抽到大于 8 的数”为事件 B，由于抽到的一个数不可能既小于 3 又大于 8，故 A 与 B 不可能同时发生，即事件 A 与 B 为互斥事件。

类似地，若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任何两个都是互斥事件，则说事件 $A_1,\cdots,A_n$ 彼此互斥。

5. 如果事件“$A+B$”是必然事件，即 $A+B=\Omega$，且 A,B 为互斥事件，即 $AB=\varnothing$，那么称 B 为 A 的对立事件，可用 $\overline{A}$ 来表示 A 的对立事件，此时 $B=\overline{A}$。同样也可以说 A 是 B 的对立事件，用 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件，此时 $A=\overline{B}$。

如例 1 中，A 为“产品合格”，B 为“产品不合格”，于是 $A+B=\Omega$，且 $AB=\varnothing$。故 A 与 B 互为对立事件。

7.1.4 随机变量

为了研究随机事件的数量规律，我们可以先把随机试验的结果加以数量化。**表示随机试验结果的一个变量叫做随机变量。**

例 4 考虑用 100 粒种子进行发芽试验，于是随机试验的所有可能结果包含了“没有一粒发芽”，“有一粒发芽”，“有二粒发芽”，…，“100 粒全部发芽”。这些都是随机事件，而且都是数量性的事件，我们可以用随机变量来表示。设 ξ 表示 100 粒种子中发芽的粒数，则

“$\xi=0$”表示事件“没有一粒种子发芽”；

“$\xi=1$”表示事件“有一粒种子发芽”；

……

“$\xi=100$”表示事件“100粒种子全部发芽”。

例 5 如例 3，若用 ξ 表示测量误差，则"误差不超过 1 毫米"这一事件可表示为"$-1\leqslant\xi\leqslant 1$"。

对于那些非数量性的随机事件，也可以通过数量化的办法用随机变量来表示。

例6 如例1，产品"合格"，"不合格"这些事件可以通过如下方法用随机变量来表示。

"$\xi=0$"表示"产品合格"，

"$\xi=1$"表示"产品不合格"。

§7.2 频率的稳定性、概率

7.2.1 频率的稳定性与概率

随机事件在一次试验中很难预言其发生与否，但是当我们大量地重复试验时就会发现一种"大量现象"的规律性。

设在n次试验中，某事件 A出现 m 次，则称比值$\frac{m}{n}$为 n 次试验中事件A出现的频率，记作

$$\mu=\frac{m}{n}, \qquad 0\leqslant m\leqslant n. \tag{7.2.1}$$

当试验次数 n 改变时，频率 μ 也会起一定的波动，但是，在大量试验中，即 n 增大时，就会发现频率 μ 将围绕着某一确定的常数摆动，这就是所谓频率的稳定性。

例 1 在掷硬币的试验中，如果硬币的质地是均匀对称的，则在大量掷硬币的试验中，出现正面的可能性大小就会呈现其规律性。历史上有人作过多次试验，其结果如下(见下页)：

由下表看出，出现正面的频率 μ 在 $0.5=\frac{1}{2}$附近摆动。

试验者	掷硬币次数	正面出现次数	频率
蒲丰	4,040	2,048	0.5069
皮尔逊	12,000	6,019	0.5016
皮尔逊	24,000	12,012	0.5005

例 2 油菜籽的发芽试验，其结果如下：

种子粒数	2	5	10	70	130	310	700	1500	2000	3000
发芽粒数	2	4	9	60	116	282	639	1339	1806	2715
频率	1	0.8	0.9	0.875	0.892	0.910	0.913	0.893	0.903	0.905

由上表看出，随着种子粒数的增加，即试验次数 n 增大时，发芽频率就在常数 0.9 附近摆动。

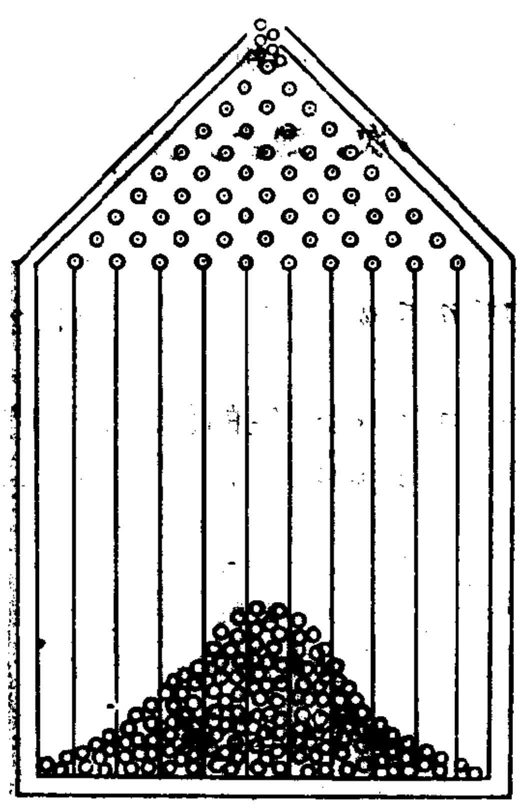

图 7.2.1

例 3 英国生物学家加尔顿（Galton）钉板模型试验如图7.2.1．试验由上端放入一小球，任其自由下落，当小球碰到钉子时，从左边或右边落下的机会均等，最后落入底板某一格．任意放入一球，它落入哪一格，预先无法确定，但大量放入小球，就会发现最后呈曲线形．多次试验其形状均类似，这就是说小球落入某一格的频率是稳定的．

以上例子表明在大量试验中，随机事件的频率具有稳定性。实际上，当我们重复进行试验时，常常会发现某些事件出现的可能性大些，而另一些事件出现的可能性要小些。既然随机事件出现的可能性有大有小，自然会想到用一个数来度量事件出现的可能性大小，而频率的稳定性正为此提供了依据。如例 1，出现正面的频率在$\frac{1}{2}$附近摆动，于是可以认为出现正面这一事件的可能性为50%；又如例 2，油菜籽的发芽频率在 0.9 附近摆动，于是可以认为油菜籽的发芽的可能性有90%。

一般地，**在 n 次试验中，事件 A 出现的频率为 $\mu=\frac{m}{n}$，当 n 增大时，μ 稳定在常数 p 附近，则称 p 为事件 A 发生的概率，记作 $P(A)=p$.**

如例 1，若以 A 表示出现正面的事件，则 A 出现的概率 $P(A)=\frac{1}{2}$；同样，在例 2 中，以B 表示油菜籽发芽的事件，则B发生的概率$P(B)=0.9$。

由(7.2.1)式知，对任一事件A，均有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

显然有$P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$。

怎样求出一个事件的概率呢？一般可以通过大量重复试验求得事件的频率，以它作为概率的近似值。但是，对一些特殊的随机事件，可以通过分析试验对象的几何、物理特性，对事件的概率作出合理的规定，或通过直接计算求出事件的概率。例如在掷硬币试验中，由于只能出现正面与反面两种可能结果，又假定硬币的质地是均匀的、对称的，因此可以认为出现正面或反面的可能性是一样的，这样，规定出现正面或反面的概率都为$\frac{1}{2}$是合理的。下面一种特殊的随机试验可以通过直接计算求出事件的概

率。

7.2.2 古典概型

先考虑一个特例．自标号为 $1,2,\cdots,n$ 的 n 件产品中任取一件，如果抽取时把这些产品平等看待，不特别侧重或看轻某件产品，那么每件产品被取出的可能性应该是相同的，也就是说，此时随机试验是从 n 件产品中随机抽取一件，所有可能结果（即"取得第 i 号产品"，$i=1,2,\cdots,n$）共有 n 个，其中每一种可能结果（即基本事件）的出现都是等可能的。

一般地，**如果随机试验具有如下两个性质：**

1）所有可能结果只有有限多个（有限性）；

2）每个可能结果出现的可能性是一样的（等可能性）．则称它为古典概型．

对于古典概型，事件的概率作如下规定：**若随机试验共有 n 个可能结果，而事件 A 包含了 $m(m\leqslant n)$ 个可能结果，则 A 的概率定义为：**

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

在前述例子中，若 $n=100$，以 A 表示"取得偶数号产品"，则 $P(A)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$．以 B 表示"取得号码不大于 10 的产品"，则 $P(B)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$．至于"取得号码超过 100 号的产品"这一事件为不可能事件．记为 $\varnothing$，易知 $P(\varnothing)=0$；而"取得号码不超过 100 的产品"这一事件为必然事件，记为 Ω，易知 $P(\Omega)=1$。

下面给出一些计算古典概型概率的例子：

例 4 在 100 件产品中，有 95 件合格品，5 件次品，从中任取一件，问取得次品的概率是多少？

解 从 100 件产品中任取一件，可能出现的结果有 100 个，由于是任意抽取，这些结果出现的可能性是一样的。设"取得次品"的事件记作 A，则 A 包含了 5 个可能结果，故知

$$P(A)=\frac{5}{100}.$$

例 5 号码锁有 3 个拨盘，每个拨盘上有 0 到 9 共 10 个数字，问随意试开一次就能开锁的概率是多少？

解 三个拨盘上的数字能组成的三位数字的号码共有 10^3 个，随意试开时，采用哪一种号码机会都是相等的，而开锁的号码（设为事件 A）只有一个，故试开一次就能开锁的概率为：

$$P(A)=\frac{1}{10^3}=0.001.$$

例6 如例4，今从中任意抽取 2 件产品，计算

1) 2件都合格的概率；

2) 2件都是次品的概率；

3) 1 件是合格品，1 件是次品的概率。

解 从 100 件产品中任取 2 件，可能出现的结果为 $n=C_{100}^2$ 个，由于任意抽取，这些结果出现的可能性是一样的。

1) 记 A 为"2件都合格"的事件，则所取 2 件全是合格品的可能结果有 C_{95}^2 个，故

$$P(A)=C_{95}^2/C_{100}^2=\frac{893}{990}.$$

2) 记 B 为"2 件都是次品"的事件，则 B 包含的结果有 C_5^2 个，故

$$P(B)=C_5^2/C_{100}^2=\frac{1}{495}.$$

3) 记 C 为"2 件中有 1 件合格品，1 件次品"的事件，则 C 包含了 $C_{95}^1C_5^1$ 个可能结果，故

$$P(C)=C_{95}^{1}C_{5}^{1}/C_{100}^{2}=\frac{19}{198}.$$

§7.3 概率计算

7.3.1 概率加法公式

先看下面例子。

例1 设有一批种子共100粒，其中一等占70粒，二等占20粒，三等占10粒，今从中任取一粒，取出一等种子记作 A_1，取出二等、三等种子分别记作 A_2、A_3。则 $P(A_1)=\frac{70}{100}$，$P(A_2)=\frac{20}{100}$，$P(A_3)=\frac{10}{100}$。

今研究“任取一粒种子，它是一等或二等”（即为 A_1+A_2）的概率是多少？在这里每取得一粒种子便是一基本事件，故共有100个基本事件。又因 A_1 与 A_2 互斥，所以 A_1+A_2 所包含的基本事件数等于 A_1 与 A_2 所包含的基本事件数之和，而 A_1 和 A_2 分别包含70和20个基本事件，故 A_1+A_2 包含 $70+20$ 个基本事件，由此得：

$$P(A_1+A_2)=\frac{70+20}{100}=\frac{70}{100}+\frac{20}{100}=P(A_1)+P(A_2).$$

对一般情况也有类似结果。

若事件 A 与 B 互斥，则 A、B 之和 $(A+B)$ 的概率，等于 A、B 分别发生的概率之和，即

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (7.3.1)$$

此公式也可推广到任意有限个事件的情况：若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 彼此互斥，则