

日本新高中数学研究丛书 12

微分、积分(下)

[日] 寺田文行 著
刘占元 译

文化教育出版社

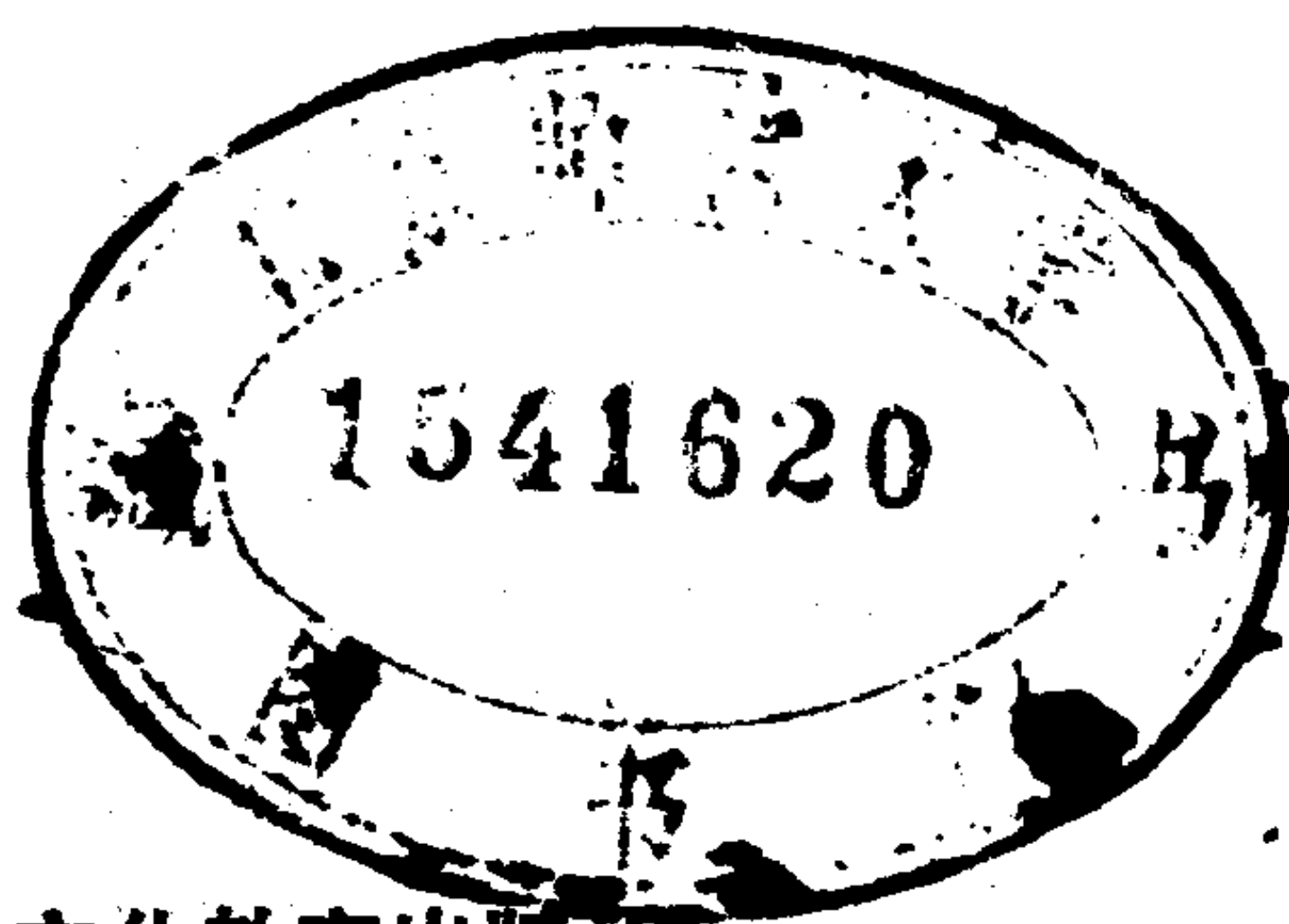
日本新高中数学研究丛书 12

微分、积分(下)

[日]寺田文行 著

刘占元 译

51/23



文化教育出版社

译 者 的 话

这套丛书，译自日本旺文社出版的《新高中数学研究丛书》，原书共分十五册，我们译出了其中的第二册至第十五册，本册是第十二册。丛书包括了中学数学教材中一些较新的内容。

这套丛书的特点是比教材内容广泛、深入、易懂。对基础知识作了系统整理，归纳概括，重视类型例题的解题方法、解题要点、思考方法的研究。可供我国中学数学教师和高中学生研究参考。

这套丛书是由我院教研部组织辽宁师范学院数学系、沈阳师范学院数学系、沈阳市教育学院数学系等单位合译的，最后由我院教研部负责统校工作。本册由我院刘占元同志译出；由辽宁师范学院副院长王鸿钧教授校阅。

由于时间仓促，以及译者、校者水平所限，缺点错误恐难避免，希望读者提出宝贵意见。

辽宁省教育学院

1985年12月

前 言

上册主要处理了数学 II B 中的微分、积分，而本书则是对数学 III 中的微分、积分进一步地加以阐述。

数学 III 中的微分、积分，是数学 II B 中的微分、积分的继续，其处理方法除一部分理论外，其结构大体相同。但是，对于作为研究对象的函数来说，数学 II B 中的微分、积分，主要是整函数，而数学 III 中的微分、积分所处理的函数范围扩充了，从有理函数（整函数、分数函数）、无理函数到三角函数、指数函数、对数函数，以及适应于它们的各种公式和新的计算方法都出现了，所以其内容是十分丰富的。而且这些对于将来进入大学理工科方面学习的人来说，是必不可少的，从而这部分内容，升大学考试的出题率也比较高。想掌握如此高度丰富的内容，只靠教科书显然是相当困难的。有必要进一步深入研究，以加深理解。

本书就是为了适应上述愿望而编写的。它比教科书数学 III 中的微分、积分的内容。

更加广泛，更加深入，更加易懂。

从而使初学者易学，擅长者更加爱好。在体例上，采取

解说→例题→发展题→练习

的形式，使读者在不知不觉，反复练习中获得实际能力，为本书的最大特点，无疑它也是升学考试的较好的参考书。

最后，借本书出版之际，对春日正文先生给予的非凡帮助，深表谢忱。

著 者

几点说明

如前言所述，本书是一本独具风格的参考书。它既能使苦于学习数学的人容易理解，又能使擅长数学的人对数学更加爱好。为此，本书的结构编排如下。

■ 主张划分细目

本书的各部分尽量划分细目，凡披阅所及均能一目了然，在解说时，既能配合教科书，又写得

比较广泛，比较深入，比较易懂。

在解说后的提要中，归纳出重要公式。因此，希望在理解解说的同时，必须记住这些公式。另外，用竖线把版面分成两部分，在左边列出重要项目，以便提高学习效率。

■ 例题→发展题→练习

本书的最大特点是，力求在理解解说的基础上，反复学习例题、发展题、练习题，使在不知不觉中增强解决问题的实际能力。虽然从例题到发展题依次提高难度，但在解法和要点指出了思考方法和解题要领，因此，希望读者要反复学习，使对这两种问题，达到几乎能够背诵的程度。总之，学习数学最重要的是

要逐步积累学习方法

为此，建议读者要反复进行学习。如果前面的内容都能掌握，那么解练习题时就不会感到什么困难。反之，如果不大解练习题，那就应该认为学习的还不够深刻。

• 1 •

习题

分 A 、 B 两部分。 A 的程度相当于例题和发展题； B 中还包含稍难的问题。 因为在高考试题中，这种程度的题目出的最多，所以，对于准备高考的读者，这是不可缺少的问题。

虽然常说，学数学背下来也没有用，但那是指机械的背诵。 本书不提倡单纯的记忆。 对于数学，在适当指导“怎样进行思考”之后，应记忆应用范围较广泛的知识。 深切地希望本书的读者，能真正理解数学，从而获得广泛应用数学的实际本领。

目 录

译者的话.....	1
前言.....	1
几点说明.....	1
重要词汇一览表.....	1
1. 函数的极限.....	1
函数的极限, 极限值, 极限为正或负无穷大的情形, 右 极限, 左极限	
2. 三角函数的极限.....	10
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x}$, 当角为 60 分制的情形	
3. 极限值 e	16
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, e 的引入, e 的值	
4. 函数的连续.....	23
连续的定义, 右连续, 左连续, 不连续, 基本函数的连 续性, 连续函数的和、差、积、商, 复合函数的连续, 连 续函数的性质, 中间值定理, 实根的存在定理, 最大、 最小值的定理	
习题 (1~11).....	32
5. 导数与导函数.....	34
平均变化率, 导数, 可导的, 导函数, 导函数的符号, 微分, 可导与连续的关系, 右导数、左导数	

6. 导函数的计算	44
基本的导函数 $(x^n)'$, 和、差、积的微分公式, 商的微分公式, 复合函数的微分公式, 幂函数的微分公式	
7. 各类微分法 (复合函数的微分法的应用)	51
反函数的微分法, $F(x, y)=0$ 型式的微分法, $x=f(t), y=g(t)$ 所表示的函数的微分法	
8. 三角函数的导函数	58
9. 指数函数、对数函数的导函数	64
10. 高阶导函数	71
n 阶导函数, n 阶导数, x^m 的 n 阶导函数, $\sin x$ 的 n 阶导函数, $\cos x$ 的 n 阶导函数, e^x 的 n 阶导函数, $\log x$ 的 n 阶导函数, 和、积的 n 阶导函数, 莱布尼兹公式	
11. 中值定理	78
中值定理, 罗尔定理, 中值定理的另外表示法	
习题(12~23)	84
12. 函数的增减与极大、极小	86
单调递增, 单调递减, 在区间上函数值的增、减, 极大、极小, 极大值、极小值, 极值的判定	
习题(24~38)	103
13. 曲线的凹凸	105
下凸, 上凸, 曲线凹凸的判定, 曲线的凹凸和切线, 拐点	
14. 曲线的图象	115
画 $y=f(x)$ 的图象时的着眼点, 渐近线, 渐近线的求法, 与 y 轴平行的渐近线, 与 y 轴不平行的渐近线, 图象的概形	
15. 微分法在方程、不等式中的应用	122

16. 速度与加速度	138
直线运动,速度,加速度,平面运动,速度向量,分速度,速率,速度向量的方向,加速度向量,分加速度,加速度的大小与方向	
17. 函数的近似式	147
用直线近似,一次近似式,重要的一次近似式,用抛物线近似,二次近似式,重要的二次近似式	
习题(39~57)	154
18. 不定积分	156
不定积分,积分常数,不定积分的计算公式,基本的不定积分	
19. 换元积分法,分部积分法	167
换元积分法,重要积分公式,分部积分法,对数函数的不定积分	
20. 定积分	183
定积分的定义,定积分的基本性质,定积分与不定积分的关系	
21. 定积分的计算	198
定积分的换元积分法,偶函数、奇函数的定积分,定积分的分部积分法	
习题(58~68)	209
22. 用定积分形式所表达的函数	211
被积函数含有积分变量以外的变量情形,积分区间的端点含有变量的情形	
23. 定积分的近似值	225
梯形公式,梯形公式图形的意义,辛卜松公式	
习题(69~80)	232
24. 平面图形的面积	235

由两条曲线挟着 部分的面积, 曲线和 x 轴挟着的面积, 曲线和 y 轴挟着的面积, 曲线用参数表示的情形	
习题(81~88).....	252
25. 立体的体积.....	254
一般立体的体积, 旋转体的体积, 绕 x 轴旋转, 绕 y 轴旋转, 被两条曲线围成部分旋转, 参数表示曲线的旋转	
习题(89~99).....	270
26. 曲线的弧长.....	272
用直角坐标系表示的曲线 $y=f(x)$ 的弧长, 用参数表示的曲线的弧长	
27. 路程、各种物理量.....	279
习题(100~108).....	292
28. 微分方程.....	294
29. 微分方程的解法.....	300
一般解(通解), 特殊解(特解), 初始条件, 直接积分型, 分离变数型, 齐次型	
习题(109~118).....	316
练习题答案.....	318
习题答案.....	362

重要词汇一览表

一次近似式·····147	可导的·····35
一阶导函数·····71	右导数·····36
一阶微分方程·····296	左导数·····36
二次近似式·····149	右连续·····23
二阶导函数·····71	左连续·····23
二阶微分方程·····296	右极限·····2
n 阶导函数·····71	左极限·····2
n 阶导数·····72	平均曲率·····299
n 阶微分方程·····296	平均变化率·····34
三阶导函数·····71	平面运动·····138
三角函数的极限·····10	平面图形的面积·····235
三角函数的导函数·····58	齐次型·····302
上凸·····105	立体的体积·····254
下凸·····105	加速度·····138
上限·····183	加速度向量·····139
下限·····183	对数函数的导函数·····64
不连续·····23	对数微分法·····66
不定积分·····156	切线的射影·····312
中间值定理·····25	切线的斜率·····294
中值定理·····78	任意常数·····105
分加速度·····140	曲线的凹凸·····272
分速度·····139	曲线的弧长·····115
分部积分法·····169	曲线的图象·····299
分离变数型·····301	曲率·····299
无限大·····1	曲率半径·····299

• 1 •

自然对数.....	65	罗尔定理.....	78
导函数.....	35	洛比达定理.....	85
导数.....	34	函数的近似式.....	147
体积.....	254	函数的连续.....	23
近似式.....	147	函数的极限.....	1
近似值.....	225	面积.....	235
连续.....	23	复合函数.....	24
连续函数.....	23	单调递减.....	86
初始条件.....	300	单调递增.....	86
辛卜松公式.....	226	相对误差.....	150
变化率.....	34, 143	柯西中值定理.....	83
直接积分型.....	300	星形线.....	63
直线运动.....	138	高阶导函数.....	71
参数.....	63	原函数.....	156
参数表示.....	63	速度.....	138
法线.....	56	速度向量.....	139
法线射影.....	312	速率(速度大小).....	139
定积分.....	183	通解.....	300
定积分的近似值.....	225	递推式.....	181, 207
实根的存在定理.....	25	指数函数的导函数.....	64
奇解.....	297	特解.....	300
拐点.....	107	积分.....	183
拉格朗日中值定理.....	83	积分变数.....	184
极大.....	87	积分常数.....	157
极小.....	87	被积分函数.....	156
极大值.....	87	增函数.....	86
极小值.....	87	减函数.....	86
极值.....	87	渐近线.....	115
极限值.....	1	梯形公式.....	225

换元积分法.....	167	微分公式.....	44, 45
莱布尼兹公式.....	73	微分方程.....	294
最大、最小值定理.....	25	微分法.....	51
摆线.....	146	路程.....	279
圆的渐开线.....	277	增量.....	34
微分.....	35		

1. 函数的极限

函数的极限

$x \rightarrow a$

设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的足够近旁, 对于所有的 x 值都有定义 (在 $x=a$ 函数有无定义无关), 当 x 取不等于 a 的值而且又和 a 无限趋近时, (记作 $x \rightarrow a$), 如果 $f(x)$ 的值无限趋近于某个常数 α , 则用

$$x \rightarrow a \text{ 时 } f(x) \rightarrow \alpha, \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

极限值

表示, 这时我们把 α 叫做当 $x \rightarrow a$ 时 $f(x)$ 的极限值.

例

$$\text{例如, } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

又, 函数 $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$ 在 $x=1$ 无定义, 但, 当

$$x \neq 1 \text{ 时, } \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1, \text{ 所以,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

极限为正或负无穷大的情形

当 $x \rightarrow a$, 如果 $f(x)$ 的值为正(负)且其绝对值无限增大时, 用

$$x \rightarrow a \text{ 时 } f(x) \rightarrow \infty (f(x) \rightarrow -\infty)$$

$$\text{或 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty (\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty)$$

例

表示, 则当 $x \rightarrow a$ 时 $f(x)$ 的极限叫做正(负)

$$\text{无穷大. 例如, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

$x \rightarrow \infty$

又, 当 x 为正(负)且其绝对值无限增大

$x \rightarrow -\infty$

时, 如果 $f(x)$ 的值无限地趋于一个常数 α , 这里用

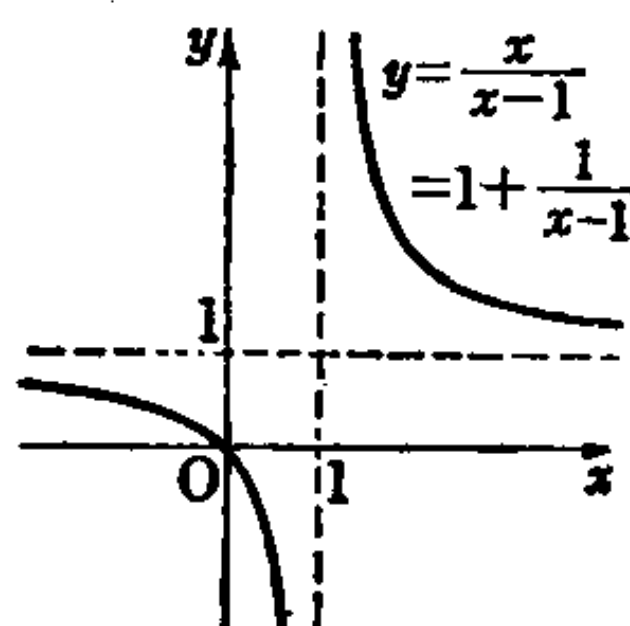
$$x \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow -\infty) \text{ 时 } f(x) \rightarrow \alpha$$

$$\text{或 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha \quad (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha)$$

表示, 则把 α 叫做 $f(x)$

在这时的极限值. 例如

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$



例

符号 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty,$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

等的意义也可同样规定.

当需要考察, 区别 x 从 a 的那一侧趋近于 a 时, 我们用 $x \rightarrow a+0$ 表示从大的方向(右侧)趋近于 a , 用 $x \rightarrow a-0$ 表示从小的方向(左侧)趋近于 a . 特别是当 $a=0$ 时, 则分别只用 $x \rightarrow +0$, 和 $x \rightarrow -0$ 表示.

当 $x \rightarrow a+0$ ($x \rightarrow a-0$) 时, 如果 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 α , 则称 α 为 $f(x)$ 的右极限值(左极限值)用

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha \quad (\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha)$$

表示.

当 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha$ 时, 则写

成 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$.

$x \rightarrow a+0$

$x \rightarrow a-0$

右极限

左极限

例

例如, 设 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

由于当 $x < 1$ 时 $f(x) = -(x + 1)$, $x > 1$ 时 $f(x) = x + 1$

而 $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \{-(x + 1)\} = -2$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x + 1) = 2$$

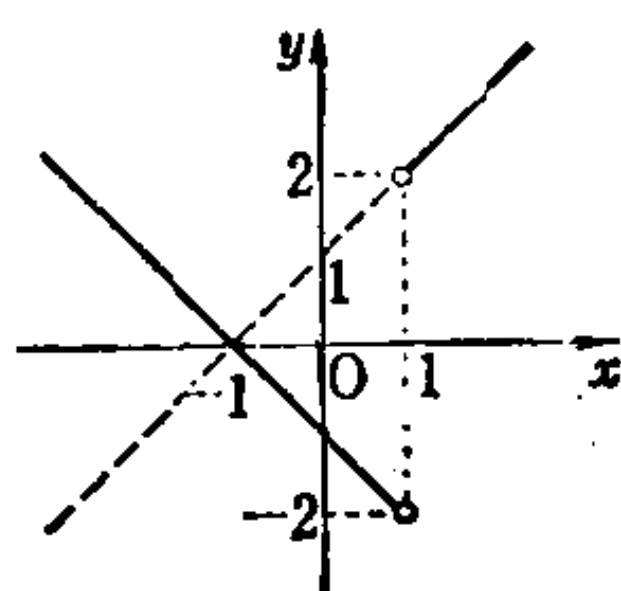
所以, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在.

又, 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}$

当, $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -\infty$

(参照前页图) 则说, 当 x 趋近于 1 时, $f(x)$ 的右极限为 ∞ , 左极限为 $-\infty$.

构成函数极限计算的基础, 有如下定理.



例

右极限
左极限

提 要

- (1) 如果当 $x \rightarrow a$ 时, $f(x) \rightarrow \alpha$, $g(x) \rightarrow \beta$, 那么 $cf(x) \rightarrow c\alpha$ (c 为常数), $f(x) \pm g(x) \rightarrow \alpha \pm \beta$ (复号同顺序)

$$f(x)g(x) \rightarrow \alpha\beta, \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$$

- (2) 如果对于 a 的附近的 x , 有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha$, 那么 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$.

例题 1 试求下列极限值:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 2x - 6}{10x^2 - 7x - 12} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2}$$

解法 当同时分子 $\rightarrow 0$ 、分母 $\rightarrow 0$, 则略记 $\rightarrow \frac{0}{0}$.

(1) 分母, 分子同以 $2x - 3$ 约分, 设 $x \rightarrow \frac{3}{2}$.

(2) 把分子有理化, 分母、分子同以 $x - 2$ 约分.

解 (1) 原式 $= \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{2(2x-3)(x+1)}{(2x-3)(5x+4)} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{2(x+1)}{5x+4} = \frac{10}{23}$

(2) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 5) - 9}{(x-2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3}$
 $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

例题 2 若使 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+3} - b}{x-1} = 1$ 成立, 试确定常数 a, b 之值

解法 因为 $x \rightarrow 1$ 时分母 $\rightarrow 0$, 所以为了使得有限的极限值存在, 必须是当 $x \rightarrow 1$ 时分子 $\rightarrow 0$. 由此得 a, b 的关系式, 用公式把分子有理化, 且用 $x - 1$ 约分.

解 因 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$, 所以为了使上边的极限值为有限值 1, 必须

$$\lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{x+3} - b) = 2a - b = 0 \quad \therefore b = 2a \quad \text{①}$$

• ↑ •