日本新高中数学研究丛书 12

微分、积分（下）

[日] 寺田文行 著
刘占元 译

文化教育出版社

日本新高中数学研究丛书 12

微分、积分(下)

[日]寺田文行 著
刘占元 译

刘1/23

1541620

文化教育出版社

译者的话

这套丛书，译自日本旺文社出版的《新高中数学研究丛书》，原书共分十五册，我们译出了其中的第二册至第十五册，本册是第十二册．丛书包括了中学数学教材中一些较新的内容．

这套丛书的特点是比教材内容广泛、深入、易懂．对基础知识作了系统整理，归纳概括，重视类型例题的解题方法、解题要点、思考方法的研究．可供我国中学数学教师和高中学生研究参考．

这套丛书是由我院教研部组织辽宁师范学院数学系、沈阳师范学院数学系、沈阳市教育学院数学系等单位合译的，最后由我院教研部负责统校工作．本册由我院刘占元同志译出；由辽宁师范学院副院长王鸿钧教授校阅．

由于时间仓促，以及译者、校者水平所限，缺点错误恐难避免，希望读者提出宝贵意见．

辽宁省教育学院

1985 年 12 月

前言

上册主要处理了数学 II B 中的微分、积分，而本书则是对数学 III 中的微分、积分进一步地加以阐述.

数学 III 中的微分、积分，是数学 II B 中的微分、积分的继续，其处理方法除一部分理论外，其结构大体相同. 但是，对于作为研究对象的函数来说，数学 II B 中的微分、积分，主要是整函数，而数学 III 中的微分、积分所处理的函数范围扩充了，从有理函数(整函数、分数函数)、无理函数到三角函数、指数函数、对数函数，以及适应于它们的各种公式和新的计算方法都出现了，所以其内容是十分丰富的. 而且这些对于将来进入大学理工科方面学习的人来说，是必不可少的，从而这部分内容，升大学考试的出题率也比较高. 想掌握如此高度丰富的内容，只靠教科书显然是相当困难的. 有必要进一步深入研究，以加深理解.

本书就是为了适应上述愿望而编写的. 它比教科书数学 III 中的微分、积分的内容.

更加广泛，更加深入，更加易懂.

从而使初学者易学，擅长者更加爱好. 在体例上，采取

解说→例题→发展题→练习

的形式，使读者在不知不觉，反复练习中获得实际能力，为本书的最大特点，无疑它也是升学考试的较好的参考书.

最后，借本书出版之际，对春日正文先生给予的非凡帮助，深表谢忱.

著　者

几点说明

如前言所述，本书是一本独具风格的参考书．它既能使苦于学习数学的人容易理解，又能使擅长数学的人对数学更加爱好．为此，本书的结构编排如下．

■　主张划分细目

本书的各部分尽量划分细目，凡披阅所及均能一目了然，在解说时，既能配合教科书，又写得

比较广泛，比较深入，比较易懂．

在解说后的提要中，归纳出重要公式．因此，希望在理解解说的同时，必须记住这些公式．另外，用竖线把版面分成两部分，在左边列出重要项目，以便提高学习效率．

■　例题→发展题→练习

本书的最大特点是，力求在理解解说的基础上，反复学习例题、发展题、练习题，使在不知不觉中增强解决问题的实际能力．虽然从例题到发展题依次提高难度，但在解法和要点指出了思考方法和解题要领，因此，希望读者要反复学习，使对这两种问题，达到几乎能够背诵的程度．总之，学习数学最重要的是

要逐步积累学习方法

为此，建议读者要反复进行学习．如果前面的内容都能掌握，那么解练习题时就不会感到什么困难．反之，如果不大会解练习题，那就应该认为学习的还不够深刻．

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

习题

分 A、B 两部分．A 的程度相当于例题和发展题；B 中还包含稍难的问题．因为在高考试题中，这种程度的题目出的最多，所以，对于准备高考的读者，这是不可缺少的问题．

虽然常说，学数学背下来也没有用，但那是指机械的背诵．本书不提倡单纯的记忆．对于数学，在适当指导“怎样进行思考”之后，应记忆应用范围较广泛的知识．深切地希望本书的读者，能真正理解数学，从而获得广泛应用数学的实际本领．

目　　录

重要词汇一览表

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

1. 函数的极限

函数的极限

设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的足够近旁，对于所有的 x 值都有定义（在 $x=a$ 函数有无定义无关），当 x 取不等于 a 的值而且又和 a 无限趋近时，（记作 $x\to a$），如果 $f(x)$ 的值无限趋近于某个常数 α，则用

$x\to a$

$$x\to a \text{ 时 } f(x)\to\alpha, \text{或 } \lim_{x\to a} f(x)=\alpha$$

极限值

表示，这时我们把 α 叫做当 $x\to a$ 时 $f(x)$ 的**极限值**.

例

例如，$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$

又，函数 $\dfrac{x^3-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 无定义，但，当 $x\neq 1$ 时，$\dfrac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1$，所以，

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$$

极限为正或负无穷大的情形

当 $x\to a$，如果 $f(x)$ 的值为正（负）且其绝对值无限增大时，用

$$x\to a \text{ 时 } f(x)\to\infty\,(f(x)\to-\infty)$$

或 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty\,(\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty)$

例

表示，则当 $x\to a$ 时 $f(x)$ 的**极限**叫做**正（负）无穷大**. 例如，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=\infty$

$x\to\infty$

又，当 x 为正（负）且其绝对值无限增大

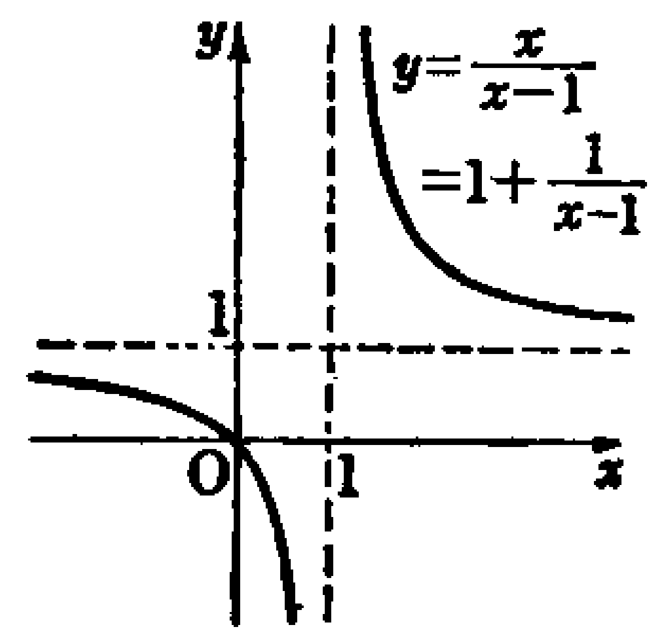
$x\to-\infty$

时，如果 $f(x)$ 的值无限地趋于一个常数 α，这里用

$$x\to\infty\quad(x\to-\infty)\text{时 } f(x)\to\alpha$$

$$\text{或}\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha\quad(\lim_{x\to-\infty} f(x)=\alpha)$$

表示，则把 α 叫做 $f(x)$ 在这时的**极限值**．例如



例

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=1$$

符号 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty,$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$$

等的意义也可同样规定．

$x\to a+0$

$x\to a-0$

当需要考察，区别 x 从 a 的那一侧趋近于 a 时，我们用 $x\to a+0$ 表示从大的方向(右侧)趋近于 a，用 $x\to a-0$ 表示从小的方向(左侧)趋近于 a．特别是当 $a=0$ 时，则分别只用 $x\to+0$，和 $x\to-0$ 表示．

右极限

左极限

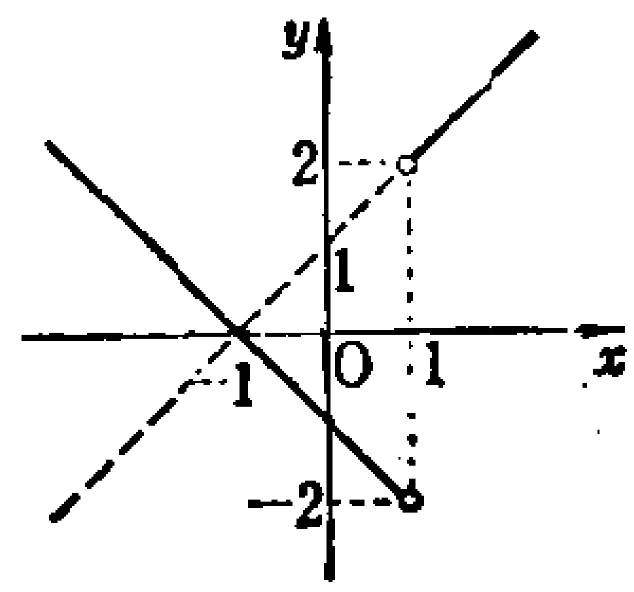
当 $x\to a+0(x\to a-0)$ 时，如果 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 α，则称 α 为 $f(x)$ 的**右极限值**(**左极限值**)用

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha\quad(\lim_{x\to a-0} f(x)=\alpha)$$

表示．

当 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\alpha$ 时，则写成 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$．

例　　例如，设 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$



由于当 $x<1$ 时 $f(x)=-(x+1)$，$x>1$ 时 $f(x)=x+1$

而 $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to1-0}\{-(x+1)\}=-2$

$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to1+0}(x+1)=2$

所以，$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在.

例　　又，设$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

当，$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=-\infty$

（参照前页图）则说，当 x 趋近于 1 时，$f(x)$的**右极限**为∞，**左极限**为$-\infty$.

右极限
左极限

构成函数极限计算的基础，有如下定理.

提　　要

(1)　　如果当 $x\to a$ 时，$f(x)\to\alpha$，$g(x)\to\beta$，那么 $cf(x)\to c\alpha$（c为常数），$f(x)\pm g(x)\to\alpha\pm\beta$（复号同顺序）

$f(x)g(x)\to\alpha\beta$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}\to\dfrac{\alpha}{\beta}$　（$\beta\neq0$）

(2)　　如果对于 a 的附近的 x，有$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=\alpha$，那么$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$.

例题1 试求下列极限值:

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\dfrac{4x^2-2x-6}{10x^2-7x-12}$ (2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$

解法 当同时分子→0、分母→0,则略记$\to\dfrac{0}{0}$.

(1) 分母,分子同以 $2x-3$ 约分,设 $x\to\dfrac{3}{2}$.

(2) 把分子有理化,分母、分子同以 $x-2$ 约分.

解 (1) 原式$=\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\dfrac{2(2x-3)(x+1)}{(2x-3)(5x+4)}=\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\dfrac{2(x+1)}{5x+4}=\dfrac{10}{23}$

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2+5)-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}$

$=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

例题2 若使 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a\sqrt{x+3}-b}{x-1}=1$ 成立,试确定常数 a、b之值

解法 因为 $x\to 1$ 时分母→0,所以为了使得有限的极限值存在,必须是当 $x\to 1$ 时分子→0. 由此得 a,b 的关系式,用公式把分子有理化,且用 $x-1$ 约分.

解 因$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$,所以为了使上边的极限值为有限值 1,必须

$\lim\limits_{x\to 1}(a\sqrt{x+3}-b)=2a-b=0$ ∴ $b=2a$ ①

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com